МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1977

УДК 532.51.013.4

О РАЗВИТИИ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ

А. Г. КУЛИКОВСКИЙ, И. С. ШИКИНА

(Москва)

Изучается асимптотическое поведение при больших временах первоначально локализованных одномерных малых возмущений границы раздела двух жидкостей при наличии тангенциального разрыва скорости с учетом поверхностного натяжения и силы тяжести. Найдено асимптотическое поведение возмущенной области, т. е. на плоскости x, t указан сектор с вершиной в начале координат, внутри которого возмущения стремятся к бесконечности с ростом t, вне которого возмущения стремятся к нулю, и вычислены скорости движения границ возмущенной области. Указаны условия, при которых неустойчивость тангенциального разрыва не будет абсолютной, т. е. при их выполнении могут осуществляться течения с тангенциальным разрывом скорости. Для случая, когда можно пренебречь влиянием силы тяжести, эти условия не зависят от величины поверхностного натяжения.

При исследовании устойчивости стационарных течений, не зависящих от одной из координат (x), принят подход, в котором задается начальное локализованное малое возмущение $u(x, 0)$ и изучается его поведение во времени. При этом используется представление

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(k)\,e^{ikx-i\omega(k)t}\,dk$$

а аналитическая функция $\omega(k)$ определяется из дисперсионного уравнения. Под $u(x, t)$ понимается возмущение любой из величин, описывающих течение.

Асимптотическое поведение $u(x, t)$ при $t\to\infty$ определяет устойчивость или неустойчивость течения. Если $u(x, t)\to\infty$ при $t\to\infty$ для любого фиксированного x, то течение называется абсолютно неустойчивым. Если все экспоненциальные возмущения вида $\exp(ikx-i\omega t)$ с действительными k затухают, т. е. $\operatorname{Im}\omega(k)<0$, то $u(x, t)\to0$ равномерно по x и течение устойчиво. Если для любого конечного фиксированного x при $t\to\infty$ $u(x, t)\to0$, но существуют действительные k, для которых $\operatorname{Im}\omega(k)>0$, то неустойчивость называется конвективной, т. е. возмущение растет и выносится из любой заданной области. Известны критерии, позволяющие определить характер неустойчивости (см., например, обзор [1]).

Понятия абсолютной и конвективной неустойчивости связаны с выбором системы координат; может быть поставлена задача об определении скоростей системы координат, в которых неустойчивость абсолютная.

1. Выясним, как ведет себя возмущение при $x\to\infty$, $t\to\infty$. Перейдем в систему координат, движущуюся со скоростью W, в ней $x'=x-Wt$, $t'=t$, $k'=k$, $\omega'=\omega-Wk$. В новой системе координат поведение возмущения для фиксированных x' при $t\to\infty$ определится асимптотикой интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(k)\,e^{ikx'-i\omega'(k)t}dk=u(x'\ t) \tag{1.1}$$

Для разных W поведение может быть различным.

Если для $W_-<W<W_+$ при $t\to\infty$ $u(x', t)\to\infty$, а для $W>W_+$, $W<W_-$ возмущение $u(x', t)\to0$, то в плоскости x, t можно выделить сектор, внутри которого возмущение растет, а вне его затухает. (Таких секторов, вообще говоря, может быть несколько.) Назовем тогда W_+ скоростью передней, а W_- скоростью задней границы возмущенной области.

Для нахождения асимптотики интеграла (1) воспользуемся методом перевала [2], согласно которому при $t\to\infty$ $u(x', t)\sim t^{-\alpha}\exp(t\operatorname{Im}\omega')$. Здесь $\operatorname{Im}\omega'$ вычисляется в седловой точке, через которую будем проводить контур интегрирования в (1.1), $\alpha>0$ и определяется порядком первой отличной от нуля в этой точке производной функции $\omega'(k)$. В седловой точке $d\omega'/dk=0$, т. е. $\operatorname{Re} d\omega/dk=W$, $\operatorname{Im} d\omega/dk=0$. Линии $\operatorname{Im} d\omega/dk=0$ в плоскости k будем называть «хребтами» (хотя некоторые из них могут быть «оврагами»).

Если в некоторой точке хребта $\operatorname{Im}\omega'=\operatorname{Im}\omega-W\operatorname{Im}k\leqslant 0$, то для соответствующего W получим $u(x', t)\to 0$ при $t\to\infty$, если $\operatorname{Im}\omega'>0$, то $u(x', t)\to\infty$. Таким образом, по знаку $\operatorname{Im}\omega'$ для k, лежащих на хребтах, можно определить поведение возмущения $u(x, t)$ вдоль любого луча в плоскости x, t.

Относительно хребтов справедливы следующие утверждения. Линии $\operatorname{Im} d\omega/dk=0$ в комплексной плоскости k могут начинаться и кончаться в точках ветвления четного порядка функции $f(k)=d\omega/dk$ или уходить на бесконечность. Хребты могут пересекаться в точках, где $d^2\omega/dk^2=0$. Хребты могут также иметь точками самопересечения полюсы выше первого порядка функции $f(k)$, но случай наличия особенностей такого типа в дисперсионном уравнении здесь не рассматривается. Если хребет замкнутый, то внутри него обязательно имеется особая точка функции $f(k)$.

Действительно, пусть точка ветвления k^* функции $f(k)$ лежит на хребте. В окрестности нее $f(k)-f(k^*)=\lambda(k-k^*)^{1/n}$, где n — целое число. При четных n на хребте в окрестности точки k^* имеет место равенство $\arg(k-k^*)=2\pi p-n\arg\lambda$, где $p=0, 1, 2, \ldots$, следовательно, хребет выходит из точки k^* в одном направлении. При нечетных n на хребте в окрестности точки ветвления $\arg(k-k^*)=\pi p-n\arg\lambda$, следовательно, хребет выходит из нее в двух направлениях, имеющих общую касательную. Таким образом, точка k^* является конечной точкой хребта, если n — четное число.

Пусть в некоторой точке k_0 хребта $f'(k_0)=0$. Тогда вдоль хребта в окрестности k_0 $n!\operatorname{Im} f(k)=\operatorname{Im} f^{(n)}(k_0)(k-k_0)^n=0$ $(n\geqslant 2)$. Так как при повороте $\Delta k=k-k_0$ на угол π/n в комплексной плоскости k, $(\Delta k)^n$ меняет знак, то в точке k_0 имеем n пересекающихся хребтов.

Наличие особой точки внутри замкнутой линии $\operatorname{Im} d\omega/dk=0$ следует из аналитичности функции $d\omega/dk\neq\text{const}$ [2].

2. Используем приведенные соображения, чтобы выяснить, как развивается со временем начальное локализованное возмущение поверхности раздела двух идеальных несжимаемых жидкостей. Пусть в невозмущенном состоянии верхняя жидкость движется с постоянной скоростью v_1, а нижняя — со скоростью v_2, ρ_1 и ρ_2 соответственно — плотности верхней и нижней жидкостей, σ — коэффициент поверхностного натяжения. Начальное возмущение поверхности $\zeta(x, 0)$ и ее скорость $\zeta_t(x, 0)$ считаем малыми. Для определения потенциалов скоростей возмущенного движения обеих жидкостей и уравнения возмущенной поверхности раздела $\zeta(x, t)$ используем уравнения Лапласа и линеаризированные граничные условия.

Дисперсионное уравнение для K с $\operatorname{Re} K>0$ имеет вид [3, 4]

$$\Omega=K\left(\beta_1\frac{v_1}{|v_1-v_2|}+\beta_2\frac{v_2}{|v_1-v_2|}\right)\pm\sqrt{K^3-K^2\beta_1\beta_2+KG(\beta_2-\beta_1)} \tag{2.1}$$

$$\Omega=\frac{\omega\sigma}{|v_1-v_2|^3(\rho_1+\rho_2)},\quad K=\frac{k\sigma}{|v_1-v_2|^2(\rho_1+\rho_2)},\quad G=\frac{g\sigma}{|v_1-v_2|^4(\rho_1+\rho_2)}$$

$$\beta_1=\frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2},\quad \beta_2=\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$$

В силу условия затухания возмущений потенциалов скоростей при $z=\pm\infty$ для K с $\operatorname{Re} K<0$ в дисперсионном уравнении (2) надо заменить K на $-K$, тогда аналитическая функция $\Omega(K)$ будет определена во всей комплексной плоскости K с разрезом по мнимой оси.

Если $\varepsilon=G(\beta_2-\beta_1)(\beta_1\beta_2)^{-2}\geqslant{}^1/_4$, то Ω действительно для всех действительных значений K и течение устойчиво. Если $\varepsilon<{}^1/_4$, то для действительных значений K существуют Ω с $\operatorname{Im}\Omega>0$, экспоненциальные возмущения растут и имеет место неустойчивость Кельвина – Гельмгольца [3, 4].

Выясним, как развивается начальное возмущение в этом случае. Предварительно отметим одно общее свойство системы уравнений для малых возмущений. Если $u(x, z, t)=u(z)\exp(ikx-i\omega t)$ – решение такой системы, то всегда имеется также комплексно-сопряженное решение $\bar{u}(x, z, t)=\bar{u}(z)\exp(-i\bar{k}x+i\bar{\omega}t)$. Значит для K, расположенных симметрично относительно мнимой оси K, на комплексной плоскости Ω корни дисперсионного уравнения также симметричны относительно оси $\operatorname{Im}\Omega$. Поэтому в плоскости K хребты $\operatorname{Im} d\Omega/dK=(d\operatorname{Im}\Omega/d\operatorname{Re}K)=0$ лежат симметрично относительно оси $\operatorname{Im}K$, а значения

$$\operatorname{Re}\frac{d\Omega}{dK}=\frac{d\operatorname{Re}\Omega}{d\operatorname{Re}K}=\frac{W}{|v_1-v_2|},\qquad \operatorname{Im}\Omega'=\operatorname{Im}\Omega-\frac{W}{|v_1-v_2|}\operatorname{Im}K$$

для K с $\operatorname{Re}K<0$ совпадают с их значениями для K с $\operatorname{Re}K>0$. Это утверждение следует также непосредственно из дисперсионного уравнения (2) и замечания о разрезе функции $\Omega(K)$.

Учитывая симметрию хребтов, все дальнейшие рассмотрения достаточно провести в правой полуплоскости $\operatorname{Re}K>0$.

Обозначим

$$\Omega-K\left(\beta_1\frac{v_1}{|v_1-v_2|}+\beta_2\frac{v_2}{|v_1-v_2|}\right)=\Omega_1$$

Рассмотрим сначала случай, когда влияние поля тяжести можно не учитывать, тогда $\Omega_1=K\sqrt{K-\beta_1\beta_2}$, $d\Omega_1/dK=({}^3/_2K-\beta_1\beta_2)(K-\beta_1\beta_2)^{-1/2}$. Построим линии $\operatorname{Im} d\Omega_1/dk=0$ (хребты). Для действительных K полуинтервал $[\beta_1\beta_2, \infty)$ является хребтом. Для комплексных K хребтом служит окружность с центром в точке ветвления $K=\beta_1\beta_2$ и радиусом $r={}^1/_3\beta_1\beta_2$, так как на ней $\arg(K-{}^2/_3\beta_1\beta_2)={}^1/_2\arg(K-\beta_1\beta_2)$. Оба хребта пересекаются в точке $K_0={}^4/_3\beta_1\beta_2$, в ней $d^2\Omega_1/dK^2=0$. Других хребтов нет.

Выясним, как меняются $\operatorname{Re} d\Omega_1/dK=U$ и $\operatorname{Im}\Omega_1'=\operatorname{Im}\Omega_1-U\operatorname{Im}K$ вдоль хребтов. На $[\beta_1\beta_2, \infty)$ $|U|$ имеет минимум в точке K_0. При движении от точки K_0 по окружности U меняется монотонно, в противном случае на окружности была бы еще одна точка пересечения хребтов, что невозможно из-за отсутствия других хребтов. На верхней полуокружности $U>0$, на нижней $U<0$. На хребте $[\beta_1\beta_2, \infty]$ $\operatorname{Im}\Omega_1'=0$. Поскольку вдоль любого хребта $d\Omega_1'/dK=-KdU/dK$, то и на окружности $d\operatorname{Im}\Omega_1'=-\operatorname{Im}KdU$. На обеих полуокружностях $|U|$ убывает от $U=\sqrt{3\beta_1\beta_2}$ в точке K_0 до нуля в в точке $K={}^2/_3\beta_1\beta_2$. Следовательно, $\operatorname{Im}\Omega_1'$ возрастает на них от $\operatorname{Im}\Omega_1'=0$ в точке K_0 до $\operatorname{Im}\Omega_1'=2({}^1/_3\beta_1\beta_2)^{3/2}>0$ при $K={}^2/_3\beta_1\beta_2$. (Вдоль окружности, лежащей на втором листе комплексной плоскости K, $\operatorname{Im}\Omega_1'\leqslant0$.) Таким образом, неравенство $\operatorname{Im}\Omega_1'>0$ может выполняться только при $|U|<\sqrt{3\beta_1\beta_2}$, а при $|U|\geqslant\sqrt{3\beta_1\beta_2}\operatorname{Im}\Omega_1'=0$.

В плоскости x, t внутри сектора, ограниченного лучами $W_+=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\sqrt{3\beta_1\beta_2}|v_1-v_2|$ и $W_-=\beta_1v_1+\beta_2v_2-\sqrt{3\beta_1\beta_2}|v_1-v_2|$, возмущения потенциалов скоростей и возмущение поверхности раздела $\zeta(x-Wt, t)$ стремятся к ∞ при $t\to\infty$, а вне сектора они стремятся к нулю. Следовательно, при больших t передняя граница возмущенной области двигается со скоростью W_+, а задняя — со скоростью W_-. Если $|\beta_1 v_1+\beta_2 v_2|<\sqrt{3\beta_1\beta_2}|v_1-v_2|$, то указанный сектор охватывает ось t и рассматриваемое течение абсолютно неустойчиво. Если $|\beta_1 v_1+\beta_2 v_2|>\sqrt{3\beta_1\beta_2}|v_1-v_2|$, то неустойчивость конвективная и растущее возмущение сносится жидкостью. Заметим, что так как скорости границ возмущенной области W_+, W_- не зависят от коэффициента поверхностного натяжения σ, то конвективная неустойчивость возможна и при $\sigma\to 0$.

3. В проведенном рассмотрении влиянием силы тяжести полностью пренебрегалось. Это возможно, если $|\varepsilon|\ll 1$. С учетом силы тяжести

$$\Omega_1=\sqrt{K^3-K^2\beta_1\beta_2+\varepsilon K\beta_1{}^2\beta_2{}^2}$$

Так как экспоненциальные возмущения растут при $\varepsilon<{}^1/_4$, то $d\Omega_1/dK$ имеет кроме $K=0$ две действительные точки ветвления ($K_+>0$ и $K_-<K_+$).

Если $\rho_1<\rho_2$, то $\varepsilon>0$ и $K_->0$. Хребтами, лежащими на действительной оси, будут $(0K_-]$ и $[K_+,\infty)$. При $\varepsilon<0$ в полуплоскости $\operatorname{Re}K>0$ на действительной оси будет только один хребет $[K_+,\infty)$, так как $K_-<0$. На $(0K_-]$ $d^2\Omega_1/dK^2\neq 0$. На $[K_+,\infty)$ существует точка $K_0>K_+$, в которой $d^2\Omega_1/dK^2=0$, поэтому имеется также замкнутый хребет, охватывающий точку K_+. Он пересекает действительную ось в точках K_s и K_0, где $K_s>0$ есть больший корень уравнения $d\Omega_1/dK=0$ и $K_s<K_+$.

Проведя такие же, как и в п. 2 рассуждения об изменении U и $\operatorname{Im}\Omega_1'$ вдоль замкнутого хребта, получим, что неравенство $\operatorname{Im}(\Omega_1-KU)>0$ выполняется только для $|U|<U(K_0)$ и $\operatorname{Im}(\Omega_1-KU)=0$ для $|U|\geqslant U(K_0)$. Следовательно, при $t\to\infty$ возмущения поверхности раздела и возмущения потенциалов скоростей бесконечно растут для $W_-t<x<W_+t$, где $W_+=\beta_1v_1+\beta_2v_2+U(K_0)|v_1-v_2|$, а $W_-=\beta_1v_1+\beta_2v_2-U(K_0)|v_1-v_2|$. Если $|\varepsilon|$ мал, то в линейном приближении получим $U(K_0)=\sqrt{3\beta_1\beta_2}(1-{}^3/_4\varepsilon)$.

4. Аналогично можно рассмотреть предельный случай, когда $v_1=v_2=v$, $\rho_1>\rho_2$, и выяснить, как развивается начальное возмущение при неустойчивости Рэлея — Тейлора. Оказывается, что эта неустойчивость будет абсолютной, если $v^4<A\sigma g(\rho_1-\rho_2)(\rho_1+\rho_2)^{-2}$, $A=3\sqrt{3}(1+\sqrt{3})^4/4(2+\sqrt{3})\simeq 2.1^4$.

В противном случае неустойчивость конвективная.

Таким образом, найдены скорости W_+, W_- распространения границ области, в которой происходит рост первоначально локализованных возмущений. Если скорости W_+ и W_- имеют одинаковые знаки, то неустойчивость разрыва будет конвективной, начальные возмущения с течением времени покинут любой рассматриваемый участок разрыва, и при отсутствии новых приходящих возмущений он будет существовать. Этим, возможно, объясняется осуществление тангенциальных разрывов, наблюдаемых в реальных течениях.

Поступила 17 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер А. И., Половин Р. В.* Критерии нарастания волн. Усп. физ. н., 1971, т. 104, вып. 2.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press., 1961.