

**ВИХРЕВОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕВЯЗКОЙ
ЖИДКОСТИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ЗАЗОРЕ МЕЖДУ СООСНЫМИ
КРУГОВЫМИ ЦИЛИНДРАМИ**

Ю. В. МАРТЫНОВ

(Москва)

В рамках уравнений Громеки — Ламба исследуется осесимметричное вихревое течение невязкой несжимаемой жидкости как в полубесконечном, так и в бесконечном зазоре между соосными круговыми цилиндрами. Исследование проведено для двух зависимостей циркуляции от функции тока и постоянной Бернулли, выбранной в виде полинома третьего порядка от функции тока, что позволило определить влияние азимутальной компоненты скорости на течение в осевой плоскости с радиальными и осевыми компонентами скорости. Показано, что при определенных условиях возможно существование волновых колебаний в потоке, что согласуется с работами [1-3], в которых исследовались соответственно течения в бесконечной трубе, в полубесконечной трубе с более простыми функциями циркуляции и постоянной Бернулли и в плоском случае. Установлена зависимость возникновения волновых возмущений от третьего члена постоянной Бернулли и азимутальной компоненты скорости. Результаты работы согласуются с исследованиями других авторов [1-4].

Уравнение и граничные условия в безразмерном виде для функции тока ψ осесимметричного вихревого течения невязкой несжимаемой жидкости в полубесконечном зазоре с радиусами $\xi=1$, $\xi_1 (1 > \xi_1)$, $\eta \geq 0$ имеют вид

$$(1) \quad \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + G(\psi) \frac{\partial G(\psi)}{d\psi} + \xi^2 \frac{dE}{d\psi}(\psi) = 0$$

$$v_\xi = \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_\eta = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad v_\varphi \xi = G(\psi)$$

$$\psi(\xi, 0) = \psi_0(\xi), \quad \frac{\partial \psi(1, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial \psi(\xi_1, \eta)}{\partial \eta} = 0$$

$$\psi(\xi, \infty) < \infty$$

Здесь ξ , η , φ — безразмерные цилиндрические координаты (ось ξ направлена по радиусу), v_ξ , v_η , v_φ — радиальная, осевая и азимутальная компоненты скорости соответственно, $\psi_0(\xi)$ — безразмерная гладкая функция тока на входе, $G(\psi)$ — циркуляция, $E(\psi)$ — константа Бернулли.

Краевая задача приведена к безразмерному виду использованием масштабов $\theta(R)$ и R , представляющих собой соответственно размерную функцию тока на входе у внешней стенки и радиус внешнего цилиндра.

Представляет интерес исследовать взаимодействие азимутальной компоненты скорости и движения в осевой плоскости с компонентами скорости v_ξ и v_η в осесимметричном закрученном течении. С этой целью рассмо-

трим вихревое течение с функциями $E(\psi)$ и $G(\psi)$ в виде

$$(2) \quad G(\psi) = \begin{cases} k_1\psi + c_1 \\ (k_2\psi^2/2 + 2c_2 + b)^{1/2} \end{cases}, \quad \frac{dE(\psi)}{d\psi} = a_0 + a_1\psi$$

$$k_i, c_i, b, a_0, a_1 = \text{const} \quad (i=1, 2)$$

Заменой $\vartheta(\xi, \eta) = \psi(\xi, \eta) - \psi_0(\xi)$ приведем (1) с учетом (2) к виду

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right) + \sigma_i \vartheta + \tau_i + \xi^2 a_0 + \xi^2 a_1 =$$

$$= -(\sigma_i + \xi^2 a_1) \psi_0 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right)$$

$$v_\eta = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial (\vartheta + \psi_0)}{\partial \xi}, \quad \vartheta_\xi = \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}$$

$$v_\varphi = \begin{cases} [k_1(\vartheta + \psi_0) + c_1]/\xi \\ [k_2(\vartheta + \psi_0)^2 + 2c_2(\vartheta + \psi_0) + b]^{1/2}/\xi \end{cases}$$

$$\vartheta(0, \xi) = 0, \quad \frac{\partial \vartheta(1, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial \vartheta(\xi_1, \eta)}{\partial \eta} = 0$$

$$\vartheta(\xi, \infty) < \infty$$

$$\sigma_1 = k_1^2, \quad \tau_1 = k_1 c_1, \quad \sigma_2 = k_2, \quad \tau_2 = c_2$$

Решение задачи (3) ищем в виде ряда

$$\vartheta(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\xi) N_n(\eta)$$

по собственным функциям $M_n(\xi)$, которые находятся из уравнения

$$(4) \quad \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial M}{\partial \xi} \right) - (\kappa - a_1 \xi^2) M + \lambda M = 0$$

Здесь λ — константа разделения, $\kappa = a_1$, если $a_1 > 0$, и $\kappa = 0$, если $a_1 < 0$, величина κ введена для того, чтобы спектр собственных значений был положительным, когда $a_1 > 0$.

Заменой $M(\xi) = y \exp(-y/2) u(y)$ и $y = i\xi^2 \sqrt{a_1}$ сведем уравнение (4) к вырожденному гипергеометрическому уравнению. С учетом граничных условий и условия нормировки имеем для $M_n(\xi)$ следующее выражение:

$$(5) \quad M_n(\xi) = \xi^2 \exp(i\sqrt{a_1} \xi^2 / 2) [\Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi^2) \times \\ \times \xi^2 - \Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2) \psi^{-1}(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2) \times \\ \times \Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi^2)]$$

$$\Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi^2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\omega_n)_r}{(2)_r} \frac{(-i\sqrt{a_1} \xi^2)^r}{r!}$$

$$\Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi^2) = \frac{1}{\Gamma(\omega_n - 1)} \left\{ \Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi^2) \times \right.$$

$$\times \ln(-i\sqrt{a_1} \xi^2) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\omega_n)_r}{(2)_r} [\psi(\omega_n+r) - \psi(1+r) - \psi(1+n+r)] \frac{(-i\sqrt{a_1} \xi^2)^r}{r!} \left. \right\} + \frac{1}{-i\sqrt{a_1} \xi^2 \Gamma(\omega_n)}$$

Здесь a_r — символ Похгаммера [5], $\Gamma(z)$, $\psi(z)$ — гамма-функция и ее логарифмическая производная соответственно, $\omega_n = 1 - (\lambda_n - \kappa) i / 4\sqrt{a_1}$, а λ_n -й положительный корень трансцендентного уравнения

$$(6) \quad \Psi\left(1 - \frac{(\lambda - \kappa)i}{4\sqrt{a_1}}, 2; -i\sqrt{a_1}\right) \Phi\left(1 - \frac{(\lambda - \kappa)i}{4\sqrt{a_1}}, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2\right) - \psi\left(1 - \frac{(\lambda - \kappa)i}{4\sqrt{a_1}}, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2\right) \Phi\left(1 - \frac{(\lambda - \kappa)i}{4\sqrt{a_1}}, 2; -i\sqrt{a_1}\right) = 0$$

$$B_n^{-2} = \int_{\xi_1}^1 \xi^2 \exp(i\sqrt{a_1}t) [\Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1}t) -$$

$$- \Psi^{-1}(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2) \Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2) \Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1}t)] dt$$

Выпишем уравнения для определения функции $N_n(\eta)$

$$N_n''(\eta) - [\lambda_n - (\sigma_i + \kappa)] N_n(\eta) = \alpha_{n,1} \tau_i + \alpha_{n,2} a_0 + \alpha_{n,3} \sigma_i + \alpha_{n,4} a_1 + \alpha_{n,5}$$

$$\alpha_{n,i} = \int_{\xi_1}^1 \beta_i(t) M_n(t) \frac{1}{t^2} dt, \quad i=1, \dots, 5$$

$$\beta_1 = -1, \beta_2 = -\xi^2, \beta_3 = -\psi_0(\xi), \beta_4 = -\xi^2 \psi_0(\xi)$$

$$\beta_5 = -\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_0}{\partial \xi} \right)$$

Отсюда

$$N_n(\eta) = \frac{C_n}{|\Delta_n|} \begin{cases} \exp(-\eta \sqrt{|\Delta_n|}) - 1, & \Delta_n > 0 \\ 1 - \frac{\cos(\eta \sqrt{|\Delta_n|} + \varphi_n)}{\cos \varphi_n}, & \Delta_n < 0 \end{cases} \quad \varphi_n \neq (\pi/2) (2n+1)$$

$$\Delta_n = \lambda_n - \sigma_i - \kappa, C_n = \alpha_{n,1} \tau_i + \alpha_{n,2} a_0 + \alpha_{n,3} \sigma_i + \alpha_{n,4} a_1 + \alpha_{n,5}$$

В случае, когда $\Delta_n < 0$, $\Delta_{n+1} > 0$, решение задачи (1), (2) после выделения действительной части имеет вид

$$(7) \quad \psi(\xi, \eta) = \psi_0(\xi) + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^m \frac{C_n}{|\Delta_n|} \left[1 - \frac{\cos(\eta \sqrt{|\Delta_n|} + \varphi_n)}{\cos \varphi_n} \right] \times \\ \times M_n(\xi) + \operatorname{Re} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{C_n}{|\Delta_n|} [\exp(-\eta \sqrt{|\Delta_n|}) - 1] M_n(\xi)$$

Компоненты скорости выражаются через функцию тока по формулам (3).

Из формулы (7) видно, что решение имеет различный вид при $a_1 > 0$ и $a_1 < 0$. При $a_1 < 0$ выражение (7) становится вещественным и упрощается.

Функцией тока $\psi_0(\xi)$ на входе может быть любая дважды дифференцируемая функция. При этом в случае $\Delta_1 > 0$ функция $\psi_0(\xi)$ однозначно задает на входе азимутальные и осевые компоненты скорости, а радиальные компоненты скорости на входе определяются из решения задачи (3) как единственно возможное распределение, при котором функция тока ограничена на бесконечности. Таким образом, можно задать произвольное распределение осевой компоненты скорости на входе, а радиальные и азимутальные компоненты скорости определяются так, чтобы выполнялись соотношения (2). В случае колебательного характера $\psi_0(\xi)$ течение в полубесконечном зазоре между соосными круговыми цилиндрами разбивается на ряд областей, причем осевые и азимутальные компоненты скорости в смежных областях имеют разные знаки. Единственное ограничение на $\psi_0(\xi)$ накладывает критерий Рэлея [4] (течение устойчиво, если G^2 увеличивается с увеличением радиуса, и неустойчиво, если G^2 уменьшается). Возможны только такие функции $\psi_0(\xi)$, при которых циркуляции (2) удовлетворяют критерию Рэлея.

В случае течения в бесконечном зазоре между круговыми цилиндрами число возможных распределений скоростей становится ограниченным, как и в плоском случае [3]. Типы распределений скоростей с функциями $G(\psi)$ и $E(\psi)$ в виде (2) определяются решением следующего уравнения для функции тока с граничными условиями (3)

$$(8) \quad \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \sigma_i \psi + \tau_i + \xi^2 a_0 + \xi^2 a_1 \psi = 0$$

$$\psi(\xi) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{\xi_1}^1 G(\xi, x) (\tau_i + x^2 a_0) dx + \right.$$

$$\left. + A \Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi^2) + B \Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi^2) \right\}$$

$$A = \left[- \int_{\xi_1}^1 G(\xi_1, x) (\tau_i + a_0 x^2) dx - B \psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2) \right] \times$$

$$\times [\Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2)]^{-1}$$

$$B = \left\{ \int_{\xi_1}^1 G(\xi_1, x) (\tau_i + a_0 x^2) dx \Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1}) \times \right.$$

$$\left. \times [\Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2)]^{-1} - \int_{\xi_1}^1 G(1, x) (\tau_i + a_0 x^2) dx \right\} \times$$

$$\times [\Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} x) - \Phi^{-1}(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2) \times$$

$$\times \Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2) \Phi^{-1}(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_1^2)]^{-1}$$

$$G(\xi, x) = -[\Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi_2) \Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} x^2) -$$

$$-\Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} x^2) \Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} \xi^2)]$$

$$[-\Phi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} x^2) \Gamma(\omega_n + 1) \Gamma^{-1}(\omega_n) \times$$

$$\times \Psi(\omega_n + 1, 3; -i\sqrt{a_1} x^2) - \Psi(\omega_n, 2; -i\sqrt{a_1} x^2)$$

$$\Gamma(\omega_n + 1) \Gamma^{-1}(\omega_n) / 2 \Phi(\omega_n + 1, 3; -i\sqrt{a_1} x^2)]^{-1}$$

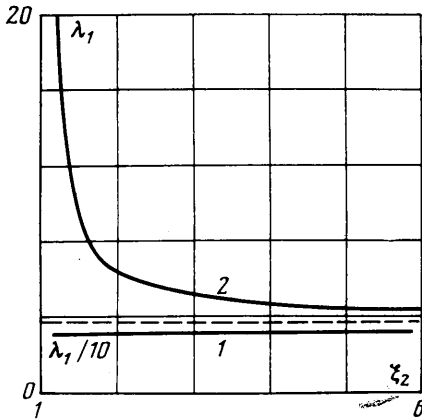
Некоторые частные случаи полученного решения содержатся в [6]. Устремив $\xi_1 \rightarrow 0$ в формулах (7), (8), получим выражения для функции тока в случае течения в полубесконечной трубе. При $a_1 \rightarrow 0$ функции $\xi \Psi(1 - (\lambda_n - \kappa) i / 4\sqrt{a_1}, 2; -i\sqrt{a_1}\xi^2)$ и $\xi \Phi(1 - (\lambda_n - \kappa) i / 4\sqrt{a_1}, 2, -i\sqrt{a_1}\xi^2)$ выражаются согласно [7] в функции $N_1(\sqrt{\lambda_n}\xi)$ и $J_1(\sqrt{\lambda_n}\xi)$ соответственно.

Если $a_1 = a_0 = 0$, то течение однородное винтовое. Выражение (7) переходит в формулу, найденную в [2], если $c_1 = a_1 = a_0 = 0$, $\xi_1 \rightarrow 0$.

Как видно из формулы (7), течение в осевой плоскости одно и то же для двух распределений азимутальных скоростей (2), если $k_1^2 = k_2$ и $k_1 c_1 = c_2$. Видно, что течение в осевой плоскости не зависит от b , в то же время зависит от c_1 , т. е. если азимутальное распределение скорости имеет вид $(k_1 \psi + c_1) / \xi$, то течение в осевой плоскости зависит не только от $dG(\psi) / d\psi$, но и от абсолютной величины $G(\psi)$; если же азимутальное распределение скорости имеет вид $(k_2 \psi^2 + 2c_2 \psi + b)^{1/2} / \xi$, то течение в осевой плоскости зависит только от $dG(\psi) / d\psi$. Из формулы (7) видно, что решения имеют различный вид при $a_1 > 0$ и $a_1 < 0$. В случае $\Delta_n < 0$ решение имеет члены, описывающие периодические возмущения с безразмерными длинами волн

$$l_n = 2\pi / \sqrt{|\Delta_n|}.$$

Видно, что периодические возмущения возникают при любом a_1 , в то время как в плоском течении только при $a_1 < 0$ [3]. В случае, когда $\Delta_n < 0$, условия ограниченности функции тока на бесконечности не достаточно для определения фазы колебания f_n . В этом случае необходимо либо задать фазы колебания, либо ограничиться рассмотрением течения на конечном отрезке, задав на другом конце отрезка распределение функции тока. Как следует из формулы (7), возникновение периодических возмущений ($\Delta_1 < 0$) в осевой плоскости зависит только для $a_1 > 0$ от k_1 , ξ_1 и a_1 , или k_2 , ξ_1 и a_1 ; для $a_1 < 0$ от k_1 , ξ_1 или k_2 , ξ_1 , т. е. в осевой плоскости не может быть периодических возмущений, если азимутальная скорость определяется в виде $v_\varphi = \sqrt{2c_2 \psi + b} / \xi$ или $v_\varphi = c_1 / \xi$ для $a_1 <$



Фиг. 1

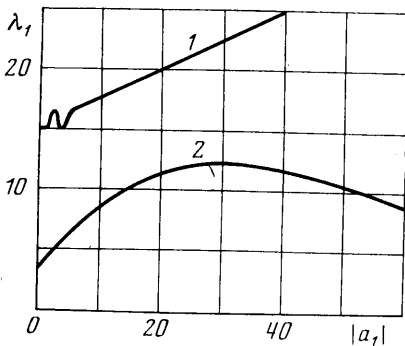
< 0 , или $\lambda_1 > a_1$, если $a_1 > 0$ при любом ξ_1 . Отсюда для течения с функциями $G(\psi)$ и $E(\psi)$ (если $a_1 > 0$, то $a_1 < \lambda_1$) в виде (2) возможно при определенных условиях существование периодических возмущений в потоке, если $dG / d\psi$ не убывает, если убывает, то такие возмущения не появляются.

Чтобы возникли периодические возмущения, необходимо также наличие ненулевого радиального течения, так как только в этом случае сила Кориолиса (если перейти во вращающуюся систему координат), которая ответственна согласно [1] за возникновение колебаний, не равна нулю. Поэтому в формуле (8), описывающей цилиндрическое течение [1], не наблюдалось синусоидальных возмущений.

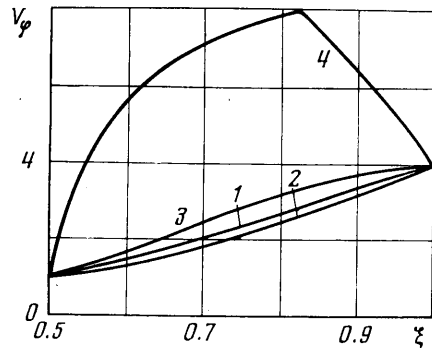
Рассмотрим подробнее зависимость λ_1 от ξ_1 и a_1 . На фиг. 1 дан график зависимости λ_1 с ростом ξ_2 , здесь обезразмеривание проведено по радиусу внутреннего цилиндра, а ξ_2 — безразмерный радиус внешнего цилиндра. Кривая 1 соответствует случаю $a_1 = -16$, кривая 2 — $a_1 = 0$. Область под кривой — область однозначного решения, в которой отсутствуют волновые возмущения. Кривая 1 построена на основании численного счета, кри-

вая 2 — по табулированным значениям корней уравнения (7) для $a_1=0$ [8]. Если $a_1=0$, то согласно [9] значение ξ_1 будет монотонно убывать с ростом ξ_2 и при $\xi_2 \rightarrow \infty \lambda_1 \rightarrow 3.83$. Если $a_1 \neq 0$, то в этом случае краевая задача не удовлетворяет условиям теоремы [9] и с ростом $\xi_2 \lambda_1$ тем не менее должно убывать, так как согласно фиг. 2 при $\xi_2 \rightarrow 0 \lambda_1 \rightarrow 19.6$.

На фиг. 2 построен график зависимости λ_1 от $|a_1|$ для случая течения в трубе ($\xi_1=0$). Кривая 1 соответствует течению с $a_1 < 0$. Видно, что эта зависимость линейная для большого диапазона чисел $|a_1|$, вблизи нуля кривая осциллирует и при $a_1 \rightarrow 0$ величина $\lambda_1 \rightarrow 3.83$. График построен по таблицам [7]. Кривая 2 соответствует значению $a_1 > 0$ ($\xi_1=0$). Видно, что режим течения без волновых возмущений возможен только при малых a_1 , так как с возрастанием величины a_1 она становится больше λ_1 и $\Delta_1 < 0$. Кривая 2 построена по таблицам [10].



Фиг. 2



Фиг. 3

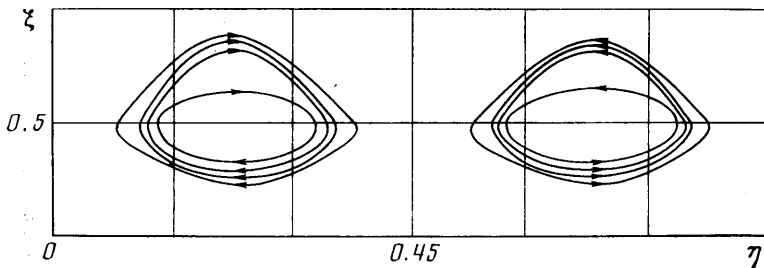
На основании формулы (7) был проведен численный расчет поля скоростей в полубесконечном зазоре между коаксиальными цилиндрами в случае, когда $\xi_1=0.5$, $a_1=a_0=c_1=0$, $\Delta_1 > 0$. Рассмотрено два различных распределения циркуляции на входе: $G(\psi)=\xi^3$ (случай устойчивого течения) и $G=\text{const}$ (случай безразличной устойчивости). На фиг. 3 дано распределение азимутальной компоненты скорости для $G(\psi)=\xi^3$. Кривая 1 дает входное распределение. Кривые 2—4 показывают распределение азимутальной скорости на расстоянии $\eta=3.8$ при значениях $k_1=1.5, 2.1, 3.0$ соответственно. Радиальные компоненты скорости с возрастанием η стремятся к нулю.

Для рассчитанного течения наблюдается небольшой отток жидкости от внутренней стенки, с возрастанием k_1 отток уменьшается, и при $k_1=2.1$ у внешней стенки появляется возвратное течение. В случае $G(\psi)=\text{const}$ возвратные течения возникают при любом k_1 . Эти течения вряд ли могут быть описаны полученными решениями, так как они получены в предположении, что на входе имеется специфическая зависимость G и E от ψ . Чтобы полученные решения были верны в области возвратных течений, необходимо предположить, что такая же зависимость $G(\psi)$ и $E(\psi)$ выполняется и в этой области, что маловероятно.

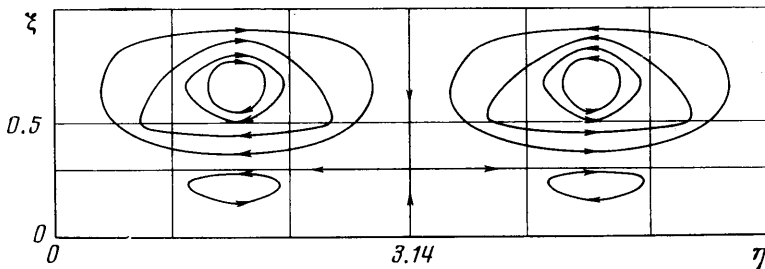
В заключение рассмотрим подробнее течение вращающейся жидкости в полубесконечном цилиндре в случае, когда $a_1=-8.41$, $\Delta_m < 0$, $\Delta_m > 0$. Общее решение представим в виде

$$(9) \quad \psi(\xi, \eta) = \psi_0(\xi) + \sum_{n=1}^m \Psi_n(\xi, \eta) + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varphi_n(\xi, \eta)$$

Здесь второе и третье слагаемые суть первая и вторая суммы формулы (7) соответственно. Рассмотрим отдельно осесимметричные функции тока $\Psi_1(\xi, \eta)$ и $\Psi_2(\xi, \eta)$, их распределения даны соответственно на фиг. 4 и 5 для случая $k_i = 0.532 \cdot 10^2$; $\xi_i = 0$ ($i=1, 2$). Вследствие симметрии на фигурах изображены верхние половины сечения. Из формулы (7) видно, что с увеличением k_1 или k_2 размер этих вихреобразований вдоль оси η уменьшается, в то время как размер вдоль оси ξ при фиксированном n неизменен. В пределе при $k \rightarrow \infty$ вихреобразование вырождается в кольцо (толщина вдоль оси η близка к нулю). Случай $a_1 = 0$ рассмотрен в [1]. Из фиг. 4, 5 видно, что члены Ψ_n решения (7) не участвуют в переносе жидкости вдоль оси η . Если в течении образуются области замкнутой циркуляции, как показано для течения в трубе ($\xi_1 = 0$) в [2] в предположении,



Фиг. 4



Фиг. 5

что $a_1 = a_0 = c_1 = 0$, $\Delta_1 < 0$, то в этом случае необходимо, чтобы в этих областях функции $G(\psi)$ и $E(\psi)$ имели тот же вид, что и в потоке. Таким образом, перенос жидкости вдоль оси η определяется только первым и третьим слагаемыми в формуле (9). Течения в зазоре между соосными цилиндрами можно рассматривать в виде суперпозиций течения вдоль оси η и течения в вихреобразованиях.

Автор благодарен Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцеву за постановку задачи и внимание к работе. Автор благодарит Г. Ю. Степанова за обсуждение и ценные замечания.

Поступила 15 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
2. Гостинцев Ю. А., Позил П. Ф., Успенский О. А. Поток Громека — Бельтрами в полубесконечной цилиндрической трубе. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 2.
3. Lautard J.-J., Zejtounian R. Sur certains types d'écoulements stationnaires bidimensionnels rotationnels d'un fluide parfait incompressible C. r. Acad. Sci. Paris, 1970, vol. 271, No. 10. (Рус. перев.: О некоторых типах установившегося двумерного

- вихревого движения идеальной несжимаемой жидкости. *Механика*, Период. сб. перев. иностр. статей, 1971, № 4.)
4. Greenspan H. The theory of rotating fluids. Cambridge Univ. Press., 1968. (Рус. перев.: Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеоиздат, 1975.)
 5. Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
 6. Wei Lai. Flow of an inviscid fluid past a sphere in a pipe. *J. Fluid Mech.*, 1964, vol. 18, pt 4.
 7. Слейтор Люси Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. М., ВЦ АН СССР, 1966.
 8. Chandrasekhar S., Elbert Donna. The roots of $Y_n(\lambda\eta)J_n(\lambda) - J_n(\lambda\eta)Y_n(\lambda) = 0$. *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, 1954, vol. 50, pt 2.
 9. Бабский В. Г., Мышкис А. Д. О монотонности изменения первого собственного значения для одного класса несамосопряженных краевых задач теории гидродинамической устойчивости. В сб. «Задачи механики и математической физики». М., «Наука», 1976.
 10. Lowan A. N., Hohnstein W. On the function $H(m, a, x) = \exp(-ix)F(m+1-ia, 2m+2, 2ix)$. *J. Math. Physics*, 1942, vol. 21, pt 3.
-