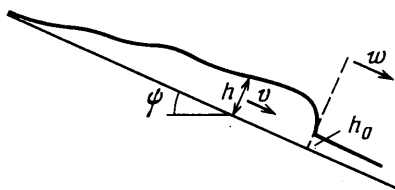


ДВИЖЕНИЕ СНЕЖНЫХ ЛАВИН В УСЛОВИЯХ ПРЕДЕЛЬНОГО ТРЕНИЯ

Е. М. ДАНИЛОВА, М. Э. ЭГЛИТ

(Москва)

Исследуются уравнения движения больших снежных лавин, когда в отличие от [1-3] учитывается, что сухое трение может достигать предельной величины, больше которой не выдерживает снег в лавине или подстилающий материал [4]. Строятся асимптотические (для больших времен с момента начала движения) решения, описывающие движение лавин, в которых часть снега движется в условиях предельного трения, по длинным плоским склонам с однородным снежным покровом. Используемые для построения асимптотических решений уравнения обладают тем свойством, что в некотором диапазоне глубин потока скорость малых возмущений убывает с ростом глубины. С этим связан ряд необычных (с точки зрения гидравлики) черт получаемых решений. В частности, на относительно пологих склонах в лавине образуются две зоны — передняя с большими скоростями и большими толщинами движущегося слоя и задняя, значительно более медленная и тонкая. Эти зоны разделяются узкой областью резкого понижения скорости и толщины движущегося слоя.



Фиг. 1

1. Для описания движения снежных лавин из достаточно плотного снега по широкому плоскому склону будем использовать следующую систему уравнений [1, 2, 4] (см. фиг. 1):

$$(1.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hv}{\partial x} = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = g \sin \psi - F - g \cos \psi \frac{\partial h}{\partial x} - k \frac{v^2}{h}$$

$$(1.3) \quad F = \begin{cases} \mu g \cos \psi, & h \leq h_* = \frac{\tau_*}{\mu g \cos \psi} \\ \frac{\tau_*}{\rho h} = \frac{\mu g h_* \cos \psi}{h}, & h > h_* \end{cases}$$

Здесь x — координата вниз вдоль склона, t — время, h — толщина движущегося слоя снега, v — средняя по толщине слоя скорость снега вдоль склона, ψ — угол наклона склона к горизонту, g — ускорение силы тяжести, k — коэффициент гидравлического трения, μ — коэффициент кулоновского трения, τ_* — предельное значение напряжения сухого трения, h_* —

толщина слоя снега, при которой напряжение кулоновского трения достигает величины τ_* , ρ — плотность снега в лавине.

Граничными условиями для этой системы служат условия на переднем и заднем фронтах лавины. Условия на переднем фронте примем в форме [2]

$$(1.4) \quad h = h_n, \quad v = v_n, \quad h_n(w - v_n) = h_0 w$$

$$h_0 w v_n = \frac{1}{2} g h_n^2 \cos \psi - \frac{\sigma_* h_0}{\rho}, \quad \sigma_* > \frac{1}{2} \rho g h_0 \cos \psi$$

Здесь h_0 — толщина, а σ_* — величина, характеризующая прочность слоя снежного покрова, сдираемого лавиной, h_n и v_n — толщина слоя и скорость снега в лавине на переднем фронте, w — скорость переднего фронта. Задним фронтом лавины при используемом подходе является линия отрыва, на которой будем считать выполненными условия

$$(1.5) \quad h = 0, \quad v = 0$$

2. Для построения решения системы (1.1) — (1.3) с условиями (1.4), (1.5) можно, как это делалось в [2, 3], предположить, что при движении по длинному плоскому однородному склону с течением времени в решении всюду, за исключением, быть может, нескольких узких областей, производные по x и t стремятся к нулю, т. е. для больших t система (1.1) — (1.3) может быть заменена системой

$$(2.1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h V(h)}{\partial x} = 0, \quad v = V(h) = \sqrt{\frac{(g \sin \psi - F) h}{k}}$$

Такой подход применим, если параметры склона и снега удовлетворяют условию $g \sin \psi - F \geq 0$, т. е. $\operatorname{tg} \psi \geq \mu$ при $h \leq h_*$, $\operatorname{tg} \psi \geq \mu h_*/h$ при $h > h_*$, а также если решение с малыми производными является устойчивым. Это условие устойчивости имеет вид

$$4k > \operatorname{tg} \psi - \mu, \quad 4k > \frac{h \operatorname{tg}^2 \psi}{h \operatorname{tg} \psi - \mu h_*}$$

при $h \geq h_*$ и $h > h_*$ соответственно.

Легко видеть, что оба эти неравенства выполняются для всех h , если

$$(2.2) \quad 4k > \operatorname{tg}^2 \psi (\operatorname{tg} \psi - \mu)^{-1}$$

Будем считать, что $\operatorname{tg} \psi > \mu$ и условие (2.2) также выполнено.

Если решения уравнения (2.1) получаются с разрывами, то с точки зрения полной системы (1.1), (1.2) эти разрывы соответствуют зонам, где производные h и v конечны, сами эти зоны узкие по сравнению со всей областью, занятой лавиной. Будем считать, что могут осуществляться только такие разрывы решений уравнения (2.1), которым соответствуют решения полной системы (1.1), (1.2) типа «структуры разрыва», т. е. типа бегущей волны, в которой параметры справа и слева стремятся к значениям, удовлетворяющим соотношению $v = V(h)$.

Итак, для построения решения задачи надо построить решение уравнения (2.1) с условиями

$$(2.3) \quad h = h_\Phi, \quad h_\Phi [w - V(h_\Phi)] = h_0 w$$

$$(2.4) \quad h_+ [w' - V(h_+)] = h_- [w' - V(h_-)]$$

на переднем фронте и внутренних разрывах соответственно и условием $h = 0$ на заднем фронте. Структура получающихся при этом разрывов также представляет интерес и должна быть определена. При нахождении ре-

шения уравнения (2.1) будем принимать, что движение начинается с линии $x=0$ (пренебрегаем конечной величиной области начального возмущения с точки зрения рассматриваемых здесь больших масштабов).

3. Сформулированная задача была исследована и соответствующие решения были найдены в [2] при условии, что всюду в лавине $h \leq h_*$.

Обозначим величины, вычисленные в [2], индексом 2. Максимальной толщиной слоя снега в лавине в решении [2] является толщина на переднем фронте h_n , толщина слоя в конце зоны переднего фронта h_Φ меньше или равна $3h_0$. Таким образом, если $h_{n2} \leq h_*$, то решение, построенное в [2], есть решение рассматриваемой здесь задачи.

Введем обозначения

$$\varphi(h) = \frac{h}{h_0} \left[\frac{h}{2h_0} - \frac{h \operatorname{tg} \psi - \mu h_*}{k(h-h_0)} \right] \quad \alpha = \frac{\sigma_*}{\rho g h_0 \cos \psi}$$

Можно показать, что условие $h_{n2} \leq h_*$ равносильно условию $\alpha \leq \varphi(h_*)$. Если $h_{n2} > h_*$, $h_{\Phi 2} \leq h_*$, то есть $\alpha > \varphi(h_*)$, $3h_0 \leq h_*$, то, как показывает исследование, проведенное при выполнении этой работы, решение отличается от решения [2] только структурой зоны переднего фронта, причем $h_n = h_{n2}$, $h_\Phi = h_{\Phi 2}$, $w = w_2$. Структура зоны переднего фронта при этом существует и может быть найдена в виде бегущей волны интегрированием соответствующих двух (для $h \leq h_*$ и $h > h_*$) обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Наконец, если $h_{n2} > h_*$, $h_{\Phi 2} > h_*$, т. е. $\alpha > \varphi(h_*)$, $3h_0 > h_*$, то решение существенно отличается от решения [2].

Итак, неравенства $\alpha > \varphi(h_*)$, $3h_0 > h_*$ являются необходимыми для того, чтобы в рассматриваемых условиях (в частности, при отсутствии подпора сзади) учет возможности возникновения предельного трения приводил к другой по сравнению с полученной в [2] формуле для скорости переднего фронта лавины. Во всем дальнейшем тексте эти неравенства будут считаться выполненными.

4. Решение задачи о движении лавины в условиях предельного трения имеет более сложную структуру, чем соответствующее решение для «допредельного» движения, за счет двух обстоятельств. Во-первых, движение при $h \leq h_*$ и $h > h_*$ описывается разными уравнениями. Во-вторых, при использовании упрощенного уравнения (2.1) для области $h > h_*$ скорость малых возмущений не является монотонной функцией h . Уравнения характеристик (2.1) имеют вид

$$\frac{dh}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h V(h)}{\partial h}$$

т. е. соответственно при $h \leq h_*$ и $h > h_*$ имеем

$$(4.1) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} V(h), \quad v = V(h) = \sqrt{\frac{g(\sin \psi - \mu \cos \psi) h}{k}}$$

$$(4.2) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} V(h) + \frac{\tau_*}{2k\rho V(h)}, \quad v = V(h) = \sqrt{\frac{g(h \sin \psi - \mu h_* \cos \psi)}{k}}$$

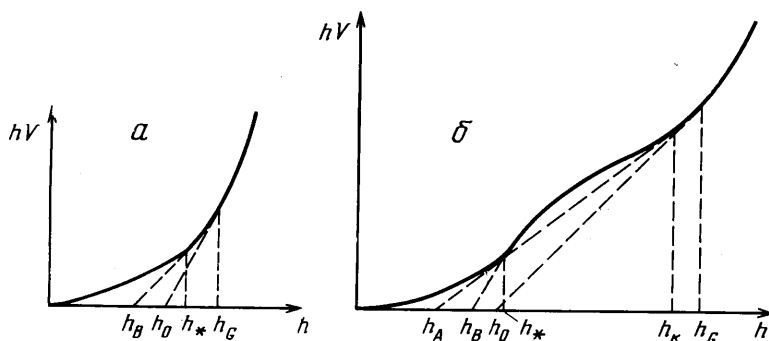
Скорость характеристик (4.2) минимальна при $h = h_m = 4\mu h_*/3 \operatorname{tg} \psi$, с ростом h падает при $h < h_m$ и растет при $h > h_m$.

При построении решения полезно [5, 6] использовать график функции $hV(h)$, который условно может быть назван «адиабатой» для уравнения (2.1) (см. фиг. 2). Тангенс угла наклона касательной и секущей для кривой $hV(h)$ есть соответственно скорость малых возмущений и ударных

волн для движений, описываемых уравнением (2.1) с условиями на разрывах (2.3) и (2.4).

Решение рассматриваемой задачи для уравнения (2.1) может быть построено в виде комбинации центрированных волн «разрежения», областей, где параметры постоянны, скачков «разрежения» и «уплотнения», т. е. понижения и повышения h , следующим образом.

Задняя часть лавины, примыкающая к линии отрыва, где $h=0$, является областью малых глубин, где действуют «допредельные» уравнения.



Фиг. 2

Распределение параметров в ней описывается центрированной волной разрежения, найденной в [2]. Таким образом, в области

$$(4.3) \quad 0 \leq x \leq \frac{3}{2} v_* t, \quad v_* = V(h_*) = \sqrt{\frac{g(\sin \psi - \mu \cos \psi) h_*}{k}}$$

имеем следующее распределение глубин и скоростей:

$$(4.4) \quad h = \frac{4k}{9g(\sin \psi - \mu \cos \psi)} \frac{x^2}{t^2}, \quad v = V(h) = \frac{2}{3} \frac{x}{t}$$

Далее, так как при $h \rightarrow h_*$ скорость характеристик (4.1) меньше, чем (4.2), то с областью (4.3), (4.4) будет всегда граничить область, где $h = h_*$, $v = V(h_*) = v_*$. Дальнейшая структура решения будет различной для различных диапазонов параметров, задающих свойства снега и склона.

Если $3 \operatorname{tg} \psi \geq 4\mu$, то $h_m \leq h_*$ (фиг. 2, а) и всюду в лавине скорость характеристик уравнения (2.1) является хотя и разрывной, но монотонно возрастающей функцией h . Для таких склонов существует следующее непрерывное в области до переднего фронта асимптотическое решение.

При (см. фиг. 2, а)

$$h_0 > \frac{h_* \operatorname{tg} \psi}{3 \operatorname{tg} \psi - 2\mu} = h_B \quad \left(h_* < 3h_0 - \frac{2\mu}{\operatorname{tg} \psi} h_0 \right)$$

постоянные значения $h = h_*$, $v = v_*$ будут в области

$$(4.5) \quad \frac{3}{2} v_* t \leq x \leq \left(\frac{3}{2} v_* + \frac{\tau_*}{2\rho k v_*} \right) t$$

Далее в области

$$(4.6) \quad \left(\frac{3}{2} v_* + \frac{\tau_*}{2\rho k v_*} \right) t \leq x \leq \left[\frac{3}{2} V(h_a) + \frac{\tau_*}{2\rho k V(h_a)} \right] t = at$$

интегрированием уравнений (4.2) получаем следующее распределение параметров:

$$(4.7) \quad h = \frac{2}{3} \frac{\mu h_*}{\operatorname{tg} \psi} + \frac{2k}{9g \sin \psi} \frac{x^2}{t^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3\tau_* t^2}{\rho k x^2}} \right)$$

$$v = \frac{1}{3} \frac{x}{t} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3\tau_* t^2}{\rho k x^2}} \right)$$

Для определения величины a (или h_a) необходимо обратиться к рассмотрению движения вблизи переднего фронта лавины. Передний фронт с точки зрения упрощенного уравнения (2.1) представляет собой скачок, движущийся со скоростью w , удовлетворяющей условию (2.3). Оказывается, что величины a и w , а поэтому h_a и h_Φ , можно однозначно определить из условий, что скачок, моделирующий передний фронт, должен иметь «структуру» и a должна быть меньше или равна w . Получается следующий ответ.

Пусть прочность захватываемого лавиной снежного покрова относительно велика, так что $\alpha \geq \varphi(h_G)$, причем величина h_G определяется формулой (см. фиг. 2, a)

$$h_G = \frac{3}{2} h_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{8\mu h_*}{9h_0 \operatorname{tg} \psi}} \right)$$

(Заметим, что если $h_0 > h_B$, то $h_G > h_*$). Тогда

$$(4.8) \quad h_a = h_\Phi = h_G, \quad a = w = \frac{h_G V(h_G)}{h_G - h_0}$$

Решение уравнения (2.1) изображено в этом случае на фиг. 3, a (система характеристик) и 4, a (распределение h). Решение полных уравнений (1.1) и (1.2) в зоне переднего фронта при условии $\alpha > \varphi(h_G)$ изображено на фиг. 5, a ; оно определяется формулой

$$(4.9) \quad x - wt = \int_{h_n}^h \frac{(gh^3 \cos \psi - w^2 h_0^2) dh}{gh^2 (h \sin \psi - \mu h_* \cos \psi) - kw^2 (h - h_0)^2}$$

где h_n — высота переднего фронта лавины, находится по w из соотношений (1.4). Если же $\alpha = \varphi(h_G)$, то в зоне переднего фронта всюду $h = h_n = h_\Phi = \text{const}$ (фиг. 5, b).

При $\varphi(h_*) < \alpha < \varphi(h_G)$ получается

$$h_a = h_\Phi < h_G, \quad w > a, \quad w > w(h_G)$$

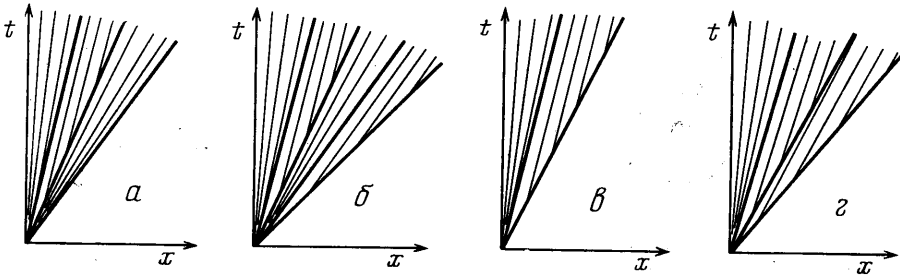
в этом случае величина h_Φ (а следовательно, и h_a) находится как корень, больший чем h_* , уравнения $\alpha = \varphi(h)$, выражающего условие совпадения h_Φ с h_n , необходимое при $\varphi(h_*) < \alpha < \varphi(h_G)$ для существования «структуры» переднего скачка. Величина w находится по h_Φ из (2.3). К зоне (4.6) и (4.7) примыкает еще область $at \leq x < wt$, где

$$h = h_\Phi = \text{const}, \quad v = V(h_\Phi) = v_\Phi = \text{const}.$$

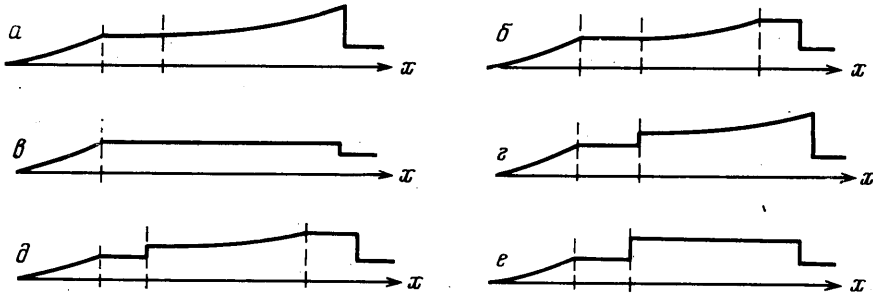
В зоне переднего фронта также всюду $h = h_\Phi = \text{const}$, $v = v_\Phi = v_n$. Решение изображено на фиг. 3, b , 4, b , 5, b .

Пусть теперь

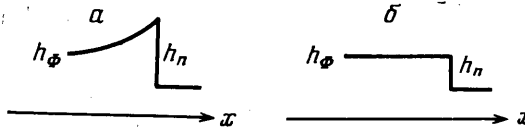
$$1/3 h_* < h_0 \leq h_B \quad (3h_0 > h_* > 3h_0 - 2\mu h_0 / \operatorname{tg} \psi)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

В этом случае для рассматриваемых склонов с условием $3 \operatorname{tg} \psi \geq 4\mu$ существует решение, в котором всюду, кроме зоны переднего фронта, $h \leq h_*$. Именно: к зоне (4.3), (4.4) примыкает область

$$(4.10) \quad \frac{3}{2}v_*t \leq x \leq wt$$

где $h = h_*$, $v = v_*$, $h_\phi = h_*$. Для w имеем формулу

$$(4.11) \quad w = \frac{h_* v_*}{h_* - h_0} = \frac{h_*}{h_* - h_0} \sqrt{\frac{g(\sin \psi - \mu \cos \psi) h_*}{k}}$$

не являющуюся частным случаем формул работы [2].

Структура зоны переднего фронта существует и определяется формулой (4.9), а величина $h_n > h_*$ вычисляется из соотношений (1.4). Решение показано на фиг. 3, в, 4, в, 5, б.

Рассмотрим теперь более пологие склоны, а именно склоны, где $3 \operatorname{tg} \psi < 4\mu$. График функции $hV(h)$ для таких склонов изображен на фиг. 2, б. При $3 \operatorname{tg} \psi < 4\mu$ скорость малых возмущений (4.2) не является монотонной функцией h и непрерывное решение уравнения (2.1), вообще говоря, построить не удастся.

Пусть (см. фиг. 2, б) $h_k \leq h_G$, то есть

$$h_0 \geq h_A = \frac{h_k^2 \operatorname{tg} \psi}{3h_k \operatorname{tg} \psi - 2\mu h_*}$$

где h_k находится из уравнения

$$\frac{h_k V(h_k) - h_* v_*}{h_k - h_*} = \frac{3}{2} V(h_k) + \frac{\tau_*}{2\rho k V(h_k)}$$

Пусть, кроме того, $\alpha \geq \varphi(h_g)$. Тогда решение имеет следующий вид (см. фиг. 3, а, 4, з). К зоне (4.3), (4.4) примыкает область $^{3/2}v_* t \leq x < w't$, где $h=h_*$, $v=v_*$. Величина w' есть скорость внутреннего скачка («разрежения»), который связывает h_* с h_k

$$(4.12) \quad w' = \frac{h_k V(h_k) - h_* v_*}{h_k - h_*} = \frac{3}{2} V(h_k) + \frac{\tau_*}{2\rho k V(h_k)}$$

Далее в области $w't \leq x \leq wt$ распределения h и v даются формулами (4.7). Для h_Φ и w верны формулы (4.8). Структура зоны переднего фронта при $\alpha > \varphi(h_g)$ определяется формулой (4.9), $h_n > h_\Phi$ — соотношениями (1.4). Если же $\alpha = \varphi(h_g)$, то в зоне переднего фронта всюду $h=h_g=h_n=\text{const}$. Структура зоны скачка, движущегося со скоростью w' , т. е. решение полной системы вида $h(x-w't)$, $v(x-w't)$, соединяющее h_* , v_* с h_k , v_k , также существует и определяется формулой, аналогичной (4.9).

Заметим, что в частном случае, когда $h_0=h_A$, имеем $h_k=h_g$ и $w'=w$, т. е. в асимптотическом решении внутренний скачок сливается со скачком, моделирующим передний фронт, а зона $w't \leq x \leq wt$ с распределением (4.7) исчезает.

Пусть теперь $\varphi(h_k) < \alpha < \varphi(h_g)$. Тогда решение имеет следующее строение (см. фиг. 3, б, 4, д): в задней части лавины — область (4.3), (4.4), далее область $^{3/2}v_* t \leq x \leq w't$, в которой $h=h_*$, $v=v_*$, а величина w' определяется формулой (4.12), далее область

$$w't < x \leq \left[\frac{3}{2} V(h_a) + \frac{\tau_*}{2\rho k V(h_a)} \right] t = at$$

где для h , v верны формулы (4.7). Величина h_a , а следовательно, и a находится как корень, меньший чем h_g и больший чем h_k , уравнения $\alpha = \varphi(h)$, $h_\Phi = h_a$, по h_Φ из условия (2.3) находится w , которая оказывается больше, чем a . Поэтому в решении появляется еще область $at \leq x \leq wt$, где $h=h_\Phi = h_a$, $v=v_\Phi = v_a$. В зоне переднего фронта также всюду $h=h_\Phi = \text{const}$, $v=v_\Phi = \text{const}$ (фиг. 5, б).

Пусть далее $\alpha \leq \varphi(h_k)$. Тогда получается решение одного типа, если $h_0 > h_B$ или $h_B > h_0 > h_A$ и $\varphi(h_1) \leq \alpha \leq \varphi(h_k)$, где (см. фиг. 2, б)

$$h = \frac{h_0 h_* (2h_* - h_0) (\text{tg } \psi - \mu)}{2(h_* - h_0)^2 \text{tg } \psi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4(h_* - h_0)^2 \text{tg } \psi}{(2h_* - h_0)^2 (\text{tg } \psi - \mu)}} \right)$$

Оно имеет следующий вид (фиг. 3, з, 4, е). Зона $h=h_*$, $v=v_*$ будет при $^{3/2}v_* t \leq x < w't$. Скорость внутреннего скачка разрежения w' определяется формулой

$$w' = \frac{h_\Phi V(h_\Phi) - h_* v_*}{h_\Phi - h_*}$$

а h_Φ определяется из уравнения $\alpha = \varphi(h)$; если $h_A < h_0 < h_B$, то h_Φ — корень этого уравнения, лежащий между h_1 и h_k . По этому h_Φ из условия (2.3) определяется скорость переднего фронта лавины w , причем $w \geq w'$. В области $w't < x < wt$ имеем $h=h_\Phi = \text{const}$, $v=v_\Phi = \text{const}$. В зоне переднего фронта также $h=h_\Phi = h_n = \text{const}$ (фиг. 5, б). Равенство $w=w'$ получается при $\alpha = \varphi(h_1)$. Тогда зона $w't < x < wt$ исчезает.

Если $1/3 h_* < h_0 < h_A$ или $h_A \leq h_0 < h_B$, $\alpha < \varphi(h_1)$, то решение описывается формулами (4.3), (4.4), (4.10) и (4.11) (фиг. 3, в, 4, в, 5, а).

Отметим в заключение, что при учете существования предельного трения при движении по относительно пологим склонам ($3 \operatorname{tg} \psi < 4\mu$) получается эффект разделения тела лавины на две части: в передней части образуется зона больших толщин движущегося слоя и больших скоростей, отделенная от гораздо более медленной части лавины узкой зоной, где скорость и толщина слоя резко падают. При этом, хотя конкретные получающиеся здесь формулы зависят от принятой формы уравнений, определяющих структуру переднего фронта, указанный эффект от структуры переднего фронта не зависит.

Поступила 23 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С., Эглит М. Э., Якимов Ю. Л. Новая постановка и решение задачи о движении снежной лавины. Тр. Высокогорного геофиз. ин-та, 1967, вып. 12.
2. Базвалов Н. С., Эглит М. Э. Исследование одномерного движения снежной лавины по плоскому склону. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 5.
3. Куликовский А. Г., Эглит М. Э. Двумерная задача о движении снежной лавины по склону с плавно меняющимися свойствами. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
4. Григорян С. С., Остроумов А. В. О механике формирования и обрушения отвалов горной массы. НИИ механ. МГУ, Отчет, 1975, № 1724.
5. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Усп. матем. н., 1959, т. 14, вып. 2.
6. Галин Г. Я. К теории ударных волн. Докл. АН СССР, 1959, т. 127, № 1.