УДК 533.6.621.4

КВАЗИОДНОМЕРНАЯ ТЕОРИЯ СОПЛА ДЛЯ ВИНТОВОГО ПОТОКА ГАЗА

А. Н. АФАНАСЕНКОВ, Ю. А. ГОСТИНЦЕВ, О. А. УСПЕНСКИЙ

(Москва)

Вращение вытекающего газа приводит к перестройке поля течения и к изменению рабочих характеристик сопла. Вопрос о расходе и тяге сопла без диффузора для завихренных потоков исследован довольно подробно теоретически и экспериментально [1–6]. Другие интегральные параметры (такие, например, как импульс и момент количества движения потока, определяющие структуру сверхзвуковой закрученной струи за соплом, или удельная тяга) детально не изучались. Ниже сформулирована квазиодномерная теория сопла для вихревого истечения идеального газа, которая является продолжением работ [3, 6, 7]. Анализируются особенности движения в до- и сверхзвуковой областях и вычисляются рабочие характеристики сопла.

Уравнение стационарного вихревого движения идеального совершенного газа в форме Мизеса [8] имеет вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v} = T\operatorname{grad}S - \operatorname{grad}H = -\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}\right)$$

где T, S, H – температура, энтропия и полная энтальпия. Отсюда следует, что любой стационарный изэнтропический и изэнергетический (H=const) поток необходимо винтовой, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}=0$ или $\operatorname{rot}\mathbf{v}=\lambda\mathbf{v}$, где λ – скалярная функция координат. Это позволяет в ряде случаев найти аналитические решения трехмерных задач вихревого движения газа [3, 6].

Рассмотрим винтовое (вихревое изэнтропическое и изэнергетическое) осесимметричное течение вращающегося газа по соплу. Система уравнений, описывающих такое движение, имеет вид [7]

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)+\frac{m\Phi}{\xi}=0 \tag{1}$$

$$\mathring{v}_\xi=-\varepsilon^{1/2}\frac{1}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta},\qquad \mathring{v}_r=\frac{1}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\qquad \mathring{v}_\varphi=\frac{\Phi}{\xi}$$

$$\frac{D(\rho/m,\Phi)}{D(\xi,\varepsilon^{1/2}\zeta)}=0,\qquad H=\frac{v^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=H_t,\qquad \frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_t}{\rho_t^\gamma},\qquad p=\rho RT$$

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(\xi,\varepsilon^{1/2}\zeta)}=0\quad\text{при}\quad \xi=\xi_1(\zeta),\qquad \Phi=0\quad\text{при}\quad \xi=0$$

$$\xi=r/R_*,\quad \zeta=z\varepsilon^{1/2}/R_*,\quad \xi_1=R/R_*,\quad \varepsilon=R_*/R_w$$
$$\Phi=\Gamma/(R_*v_{\max})=\Gamma\alpha_*/\Gamma_0,\quad v_{\max}=a_t\sqrt{2/(\gamma-1)},\quad \alpha_*=\Gamma_0/(R_*v_{\max})$$
$$m=\lambda R_*,\quad \mathring{v}_i=v_i/v_{\max}\ (i=z,\varphi,r)$$

Здесь R – переменный по длине z радиус стенки сопла (R_* – его значение в критическом сечении, R_w – радиус кривизны стенки в этом сечении), $\Gamma=v_\varphi r$ – циркуляция (Γ_0 – ее значение на стенке), p и ρ – давление и плотность, $F(\xi,\zeta)$ – уравнение поверхности стенок сопла, $D(a,b)/D(c,d)$ – якобиан. Звездочкой и индексом t отмечены параметры в критическом сечении и в заторможенном потоке.

Для достаточно удлиненных сопл с большим радиусом кривизны стенки в критическом сечении, когда $\varepsilon\ll1$, в нулевом приближении в (1) можно пренебречь производными по ζ (квазицилиндрическое приближение). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{m\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)+\frac{m\Phi}{\xi}=0,\qquad \Phi=\alpha_*,\qquad \xi=\xi_1(\zeta),\qquad \Phi=0,\qquad \xi=0 \tag{2}$$

Если напряженность вихревого движения постоянна в каждом поперечном сечении потока $m=m(\zeta)$ (однородное винтовое течение, описывающее при малых m поток с квазитвердым вращением газа), то решение уравнения (2) зависит от про-

дольной координаты только параметрически и имеет вид

$$\Phi=\beta\xi I_1(m\xi),\qquad \overset{\circ}{v}_\varphi=\beta I_1(m\xi)$$

(3)

$$\overset{\circ}{v}_z=\beta I_0(m\xi),\qquad \beta=\alpha_*/(\xi_1 I_1(m\xi_1))$$

Уравнение неразрывности из (1) в этом случае заменяется на интегральное условие сохранения потока массы по длине сопла

$$G=2\pi\int_0^R \rho v_z r\,dr=2\pi\rho_t v_{\max}R_*^2\Pi(m,\alpha_*,\xi_1)=\text{const}$$

(4)

$$\Pi=\int_0^{\xi_1}[X(\xi)]^\varkappa\beta I_0(m\xi)\xi\,d\xi,\qquad X=1-\beta^2[I_0^2(m\xi)+I_1^2(m\xi)]\qquad \varkappa=1/(\gamma-1)$$

В критическом сечении значение интеграла равно $\Pi_*(m_*,\alpha_*,\xi_1=1)$ и из (4) следует:

(5) $$\Pi(m,\alpha_*,\xi_1)=\Pi_*(m_*,\alpha_*,\xi_1=1)$$

Величины m_* и α_* в (5) не являются независимыми. В квазицилиндрическом приближении связь между ними находится из принципа реализации максимального (для данной интенсивности вращения α_*) расхода газа через критическое сечение сопла [3]

(6) $$(d\Pi_*/dm_*)_{\alpha_*}=0$$

Покажем справедливость (6). Из (4) видно, что в наиболее узком сечении сопла ($\min\xi_1$) плотность потока массы $i=\Pi/\xi_1^2$, в общем случае параметрически зависящая от ζ через $\xi_1(\zeta)$, должна быть максимальной. Если форма критического сечения обеспечивает плавный (без изломов) переход от конфузора к диффузору $(d\xi_1/d\zeta)_*=0$, то

$$\left(\frac{di}{d\zeta}\right)_*=\left(\frac{\partial\Pi}{\partial\zeta}\frac{1}{\xi_1^2}-\frac{2\Pi}{\xi_1^3}\frac{d\xi_1}{d\zeta}\right)_*=\left(\frac{d\Pi}{d\zeta}\right)_*=0$$

При заданной величине α_* это равносильно $(\partial\Pi/\partial m\times\partial m/\partial\zeta)_*=0$.

Одно из фундаментальных свойств винтовых потоков заключается в том, что в них отношение m/ρ должно быть постоянным вдоль линий тока [3]. Для рассматриваемого однородного течения (m не зависит от ξ в каждом сечении) отсюда следует, что $(dm/d\zeta)_*=\text{const}\,(\partial\rho/\partial\zeta)_*$ для любой линии тока. Газовый поток в сверхзвуковом режиме истечения должен ускоряться в критическом сечении сопла и $(\partial\rho/\partial\zeta)_*<0$. Поэтому $(dm/d\zeta)_*\neq0$, откуда и следует (6).

При малых m_* и α_* из (4), (6) можно получить $m_*=2\alpha_*(\varkappa\delta)^{1/2}$, $\delta=\gamma+1$. При больших значениях α_* зависимости $m_*(\alpha_*)$ в критическом сечении для $\gamma=1.25$, 1.40 и 1.66 приведены в [7]. Параметрическая связь $m(\xi_1)$ для каждого α_* и m_*, описывающая изменение m по длине сопла, находится из интегрального условия сохранения массы (5).

Уравнения (3)—(6) вместе с законами изменения давления, плотности и температуры газа в изэнтропическом течении

(7) $$\frac{p}{p_t}=X^{\gamma/(\gamma-1)},\qquad \frac{\rho}{\rho_t}=X^{1/(\gamma-1)}\qquad \frac{T}{T_t}=X$$

позволяют рассчитать параметры винтового потока по соплу.

Интегральные характеристики. В качестве интегральных параметров, характеризующих работу сопла при истечении вращающегося газа, рассмотрим расход, тягу, импульс, момент количества движения и удельную тягу. В квазиодномерном приближении и пренебрежении вкладом сил атмосферного давления в тягу выражения для этих параметров имеют вид

$$G=2\pi\int_0^R\rho v_z r\,dr,\qquad T=2\pi\int_0^R(p+\rho v_z^2)r\,dr$$

$$I=2\pi\int_0^R\rho v_z^2 r\,dr,\qquad M=2\pi\int_0^R\rho v_z v_\varphi r^2\,dr,\qquad j=T/G$$

Таблица 1

Расширение	Тяга	Импульс	Удельная тяга	Коэффициент реактивности	Корень ур-ния (6)
			$\alpha_*=0$		
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	—
1.08	1.0512	1.3753	1.0512	1.0512	—
1.50	1.1925	1.8421	1.1925	1.1925	—
2.00	1.2764	2.0697	1.2764	1.2764	—
2.50	1.3278	2.2014	1.3278	1.3278	—
3.00	1.3635	2.2903	1.3635	1.3635	—
4.00	1.4108	2.4059	1.4108	1.4108	—
			$\alpha_*=0.18,\ m_*=1.073,\ G/G_0=0.9144,\ M/(\pi\rho_t R_*^3 v_{\max}^2)=0.0176$		
1.00	0.9097	0.9236	0.9949	1.0000	1.0000
1.08	0.9600	1.2707	1.0498	1.0552	0.6209
1.50	1.0948	1.7019	1.1974	1.2035	0.2403
2.00	1.1729	1.9096	1.2827	1.2893	0.1205
2.50	1.2199	2.0285	1.3343	1.3410	0.0726
3.00	1.2522	2.0901	1.3695	1.3765	0.0484
4.00	1.2952	2.2125	1.4165	1.4237	0.0260
			$\alpha_*=0.275,\ m_*=1.351,\ G/G_0=0.7589,\ M/(\pi\rho_t R_*^3 v_{\max}^2)=0.02357$		
1.00	0.7575	0.8263	0.9981	1.0000	1.0000
1.08	0.8035	1.0992	1.0588	1.0608	0.6361
1.50	0.9201	1.4498	1.2124	1.2146	0.2504
2.00	0.9851	1.6172	1.2980	1.3004	0.1264
2.50	1.0233	1.7121	1.3484	1.3509	0.0764
3.00	1.0495	1.7757	1.3829	1.3855	0.0512
4.00	1.0831	1.8563	1.4280	1.4299	0.0275
			$\alpha_*=0.35,\ m_*=1.746,\ G/G_0=0.5638,\ M/(\pi\rho_t R_*^3 v_{\max}^2)=0.02402$		
1.00	0.5679	0.6749	1.0072	1.0000	1.0000
1.08	0.6079	0.8695	1.0782	1.0705	0.6605
1.50	0.6981	1.1208	1.2381	1.2292	0.2680
2.00	0.7454	1.2382	1.3221	1.3126	0.1368
2.50	0.7728	1.3041	1.3706	1.3608	0.0832
3.00	0.7914	1.3482	1.4036	1.3935	0.0559
4.00	0.8151	1.4052	1.4457	1.4354	0.0302

В безразмерной форме

$$\frac{G}{G_0}=(8\varkappa)^{1/2}(\delta/2)^{1/2\varkappa\delta}\,\Pi(m,\alpha_*,\xi_1)$$

$$\frac{T}{T_0}=(\delta/2)^{\varkappa}\int_0^{\xi_1}X^{\varkappa}\{X+2\varkappa(\delta-1)\beta^2 I_0^2(m\xi)\}\,\xi\,d\xi$$

$$\frac{I}{I_0}=2\varkappa\delta(\delta/2)^{\varkappa}\int_0^{\xi_1}\beta^2 X^{\varkappa} I_0^2(m\xi)\,\xi\,d\xi$$

(8)

$$\frac{M}{\pi\rho_t v^2_{\max}R_*^3}=2\int_0^{\xi_1}\beta^2 X^{\varkappa} I_0(m\xi)I_1(m\xi)\,\xi^2\,d\xi,\qquad j/j_0=TG_0/(T_0G)$$

Здесь

$$G_0 = \pi R_*^2 \rho_t v_{\max} (\varkappa\delta)^{-1/2} (2/\delta)^{\varkappa}, \qquad T_0 = \pi R_*^2 \rho_t v_{\max}^2 (2/\delta)^{\varkappa} \varkappa^{-1} (\delta-1)^{-1}$$

$$I_0 = \pi R_*^2 \rho_t v_{\max}^2 (\varkappa\delta)^{-1} (2/\delta)^{\varkappa}, \qquad j_0 = v_{\max} (\varkappa/\delta)^{-1/2} (\delta-1)^{-1}$$

значения расхода, тяги, импульса и удельной тяги незакрученного потока в критическом сечении (сопло без диффузора $\xi_1=1.0$). При малых интенсивностях вращения α_* параметры сопла без расширяющейся части (в критическом сечении) отличаются от таковых для одномерного потока согласно выражениям

$$\frac{G_*}{G_0} \simeq 1 - \frac{\gamma+1}{4(\gamma-1)} \alpha_*^2,$$

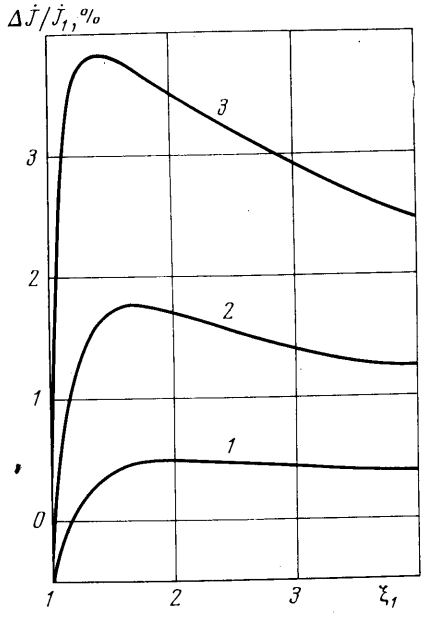
$$\frac{T_*}{T_0} \simeq 1 - \frac{\gamma}{2(\gamma-1)} \alpha_*^2,$$

$$\frac{j_*}{j_0} \simeq 1 - \frac{\alpha_*^2}{4}$$

$$\frac{I_*}{I_0} \simeq 1 - \frac{3(\gamma+1)}{4(\gamma-1)} \alpha_*^2,$$

$$\frac{M_*}{\pi \rho_t v^2_{\max} R_*^3} \simeq \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)} \times$$

$$\times \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2} \frac{\alpha_*}{2} \left(1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \alpha_*^2\right)$$



Фиг. 1

Расход, тяга, импульс и удельная тяга такого сопла падают (в линейном приближении) с увеличением α_*.

В табл. 1 приведены значения безразмерных величин тяги, импульса и относительной удельной тяги для незакрученного потока при различных степенях расширения диффузора ξ_1 для $\gamma=1.25$. Там же даны соответствующие величины для завихренного течения при $\alpha_*=0.18$, 0.275 и 0.35. Кроме этого в табл. 1 приведены значения коэффициента реактивности $K=T/T_*$, характеризующего эффективность сверхзвуковой части сопла (для одномерного потока коэффициент реактивности совпадает с величиной относительной тяги) и корней $f=m/m_*$ уравнения (6) для разных ξ_1.

Наиболее интересный вывод, следующий из сравнения полученных в квазиодномерном приближении расчетов, состоит в том, что использование закрученных потоков позволяет получить выигрыш в удельной тяге на коротких соплах. На фиг. 1

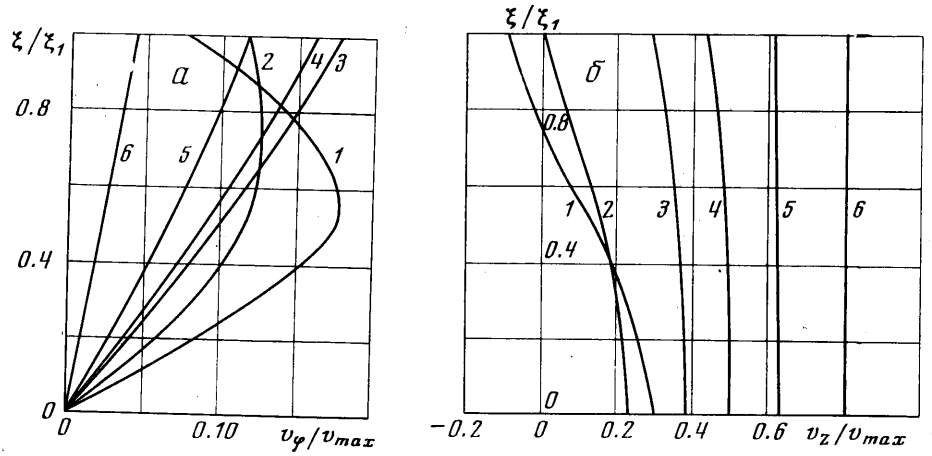
Таблица 2

ξ_{1k}	$\alpha_* = 0.18$		$\alpha_* = 0.35$	
	f	$m_* f \xi_{1k}$	f	$m_* f \xi_{1k}$
1.00	1.0000	1.0730	1.0000	1.7460
1.08	1.3291	1.5402	1.1982	2.2594
1.50	1.5156	2.4394	1.0847	2.8408
2.00	1.3998	3.0040	0.8840	3.0869
2.50	1.2124	3.2523	0.7370	3.2170
3.00	1.0485	3.3756	0.6300	3.2999
4.00	0.8148	3.4970	0.4872	3.4026

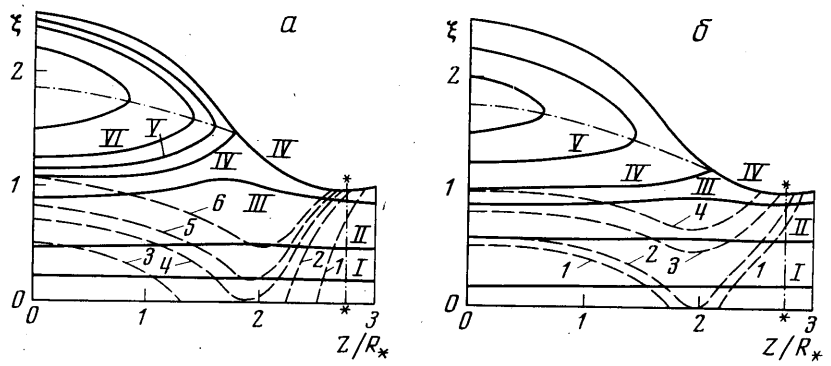
представлены графики относительного изменения удельной тяги $\Delta j/j_1=(j-j_1)/j_1$ в процентах (j_1 – удельная тяга при одномерном истечении газа из сопла с тем же расширением) для различных расширений диффузора (кривые *1–3* соответствуют $\alpha_*=0.18$, 0.275, 0.35).

Наибольший прирост удельной тяги имеет место при интенсивном вращении потока на соплах с небольшим ($\xi_1<2.0$) расширением диффузора.

Физически факт увеличения удельной тяги отчасти объясняется повышением эффективности применения сверхзвуковой части сопла (рост величины коэффициента реактивности) в закрученном потоке. На это обращалось внимание и в [7, 9].



Фиг. 2



Фиг. 3

Вероятно, учет влияния кривизны стенки сопла в критическом сечении приведет к некоторому уменьшению влияния закрутки на отмеченное изменение удельной тяги.

Изменение параметров течения вдоль сопла. Уравнения (3)–(7) при заданной интенсивности вращения позволяют в квазиодномерном приближении рассчитать изменение локальных характеристик потока вдоль сопла. В табл. 2 для примера приведены значения корней $f=m/m_*$ и $m_*f\xi_{1k}$ для конфузорной части при разных ξ_{1k} и $\alpha_*=0.18$, 0.35 (соответствующие величины f для диффузора даны в табл. 1). На фиг. 2, *а*, *б* построены безразмерные профили тангенциальной и продольной скоростей газа в различных сечениях по длине сопла при $\alpha_*=0.18$ (кривые *1–6* соответствуют $\xi_{1k}=2.25$, 1.46, 1.0 – конфузор, $\xi_{1k}=1.08$, 1.46, 4.0 – диффузор). В сужающейся части сопла при $\xi_{1k}\geqslant1.46$, где величина $m\xi_{1k}=N\geqslant2.405$ (N – первый корень функции Бесселя $I_0(N)=0$), вблизи стенки имеет место обратное осевое течение газа. По мере продвижения потока к критическому сечению и дальше в диффузор профиль осевой скорости выравнивается и стремится к таковому в незакрученном потоке. Вращение газа при этом становится квазитвердым ($\overset{\circ}{v}_\varphi\sim\xi$) и его интенсивность падает обратно пропорционально расширению ξ_1 диффузора.

Картина распределения функций тока для $\alpha_*=0.18$ по длине гипотетического сопла, околозвуковая часть которого образована дугой окружности $R_w=1{,}2R_*$ с центром в $\xi=2.2$, $z/R_*=2.75$, а конфузор – ее сопряжением с дугой $R_2=2R_*$, проведенной из $\xi=0.5$, $z/R_*=0$, приведена на фиг. 3, *а* (цифры I–VI соответствуют $G(\xi)/G_0=$ $=0.038$, 0.227, 0.754, 0.915, 1.045, 1.15). Штрихпунктирной линией отмечена граница зоны обратного тока ($v_z=0$), штриховые линии – кривые постоянных значений осевой составляющей числа Маха $M_z=v_z/a$ (*1–6* соответствуют $M_z=1.0$, 0.85, 0.79, 0.69, 0.64, 0.52) Рассчитанная в квазиодномерном приближении форма линии параболичности ($M_z=1$) и конфигурация пристеночного тороидального вихря в конфузоре качественно совпадают с полученными из численного счета трехмерной задачи [5]. Из фиг. 3, *а* следует, что число Маха на оси сопла начиная с некоторого сечения ξ_{1k} увеличивается по мере удаления в конфузор. Это связано с уменьшением сечения эффективной трубки тока за счет образования зоны обратного вихря.

Расчет показывает, что для $\alpha_*=0.18$ второго пересечения линии $M_z=1$ с осью симметрии сопла в конфузоре не происходит ни при каких ξ_{1k}. Однако уже начиная с $\alpha_*=0.185$ в конфузоре имеют место две области сверхзвукового течения вблизи оси. Пример такого течения для $\alpha_*=0.22$ представлен на фиг. 3, *б*, где линии *1–4* соответствуют значениям числа Маха $M_z=1.0$, 0.96, 0.765 и 0.60, а I–V – $G/G_0=0.033$, 0.298, 0.628, 0.784, 1.115. С увеличением α_* правая и левая точки пересечения линии параболичности $M_z=1.0$ с осью сопла сближаются. После их слияния (при $\alpha_*=0.245$) дальнейший рост α_* приводит к тому, что по всей длине сопла в приосевой зоне устанавливается сверхзвуковое течение.

Таким образом, из формального решения следует, что при $\alpha_*>0.185$ в некоторой области течения внутри конфузора имеет место двойное пересечение линий тока со звуковой линией – поток переходит из сверхзвуковой в дозвуковую область (первое пересечение) и снова разгоняется до $M>1$.

Известно, однако, что переход течения от $M>1$ к $M<1$ должен сопровождаться возникновением ударных волн и ростом энтропии. Но это противоречит принятому выше допущению об изэнтропичности течения. Поэтому однородный винтовой закрученный поток с $\alpha_*>0.185$ в конфузорах с большим сужением $\xi_{1k}>\xi_0$ (для $\alpha_*=0.22$ $\xi_0=1.55$, для $\alpha_*=0.35$ $\xi_0=1.14$) не может быть изэнтропичным.

Поступила 2 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черный Г. Г.* Закрученные течения сжимаемого газа в каналах. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
2. *Mager A.* Approximate solution of isentropic swirling flow through a nozzle. A. R. S. Journal, 1961, vol. 31, No. 8.
3. *Гостинцев Ю. А.* Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
4. *Lewellen W. S., Burns W. J., Strickland H. J.* Transonic swirling flow. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7.
5. *Славянов Н. Н.* Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лаваля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
6. *Гостинцев Ю. А., Успенский О. А.* О течении газа по соплу при ячеистой структуре вихревого потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
7. *Гостинцев Ю. А., Зайцев В. М., Новиков С. С.* Тяга сопла при циркуляционном истечении вихревого потока газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
8. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. *Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д.* Увеличение тяги сопла вращением потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.