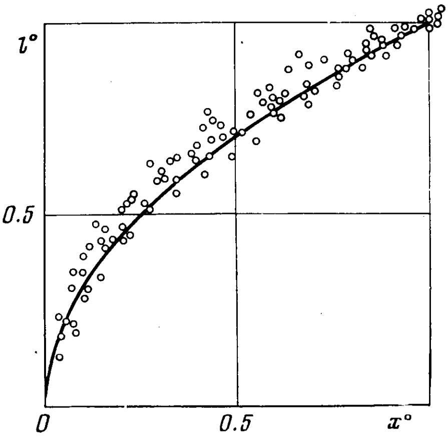
в покоящийся газ или спутный поток. Зависимости характерных размеров от нерасчетности струи приведены на фиг. 4. С увеличением n все характерные размеры возрастают. На участке $n<20$ это возрастание наблюдается более резко.

На фиг. 5 показана форма линии отрыва пограничного слоя в координатах, принятых в [1, 3]. Ось $x^\circ = x_0/l_s$ направлена по потоку вдоль оси симметрии, ось $y^\circ = y/l_m$ перпендикулярна к ней вдоль поверхности пластины. Начало координат помещено в переднюю точку линии отрыва пограничного слоя. Хотя величина l_{2j}°, а поэтому и l_s° вычислены приближенно, экспериментальные точки на фиг. 5 группируются так же, как и в [1, 3], посвященных исследованию отрыва пограничного слоя при обтекании сверхзвуковым потоком твердых и струйных препятствий, около кривой $y^\circ = \sqrt{x^\circ}$ (сплошная линия). Это обстоятельство можно рассматривать как подтверждение аналогии в структуре течения в области отрыва пограничного слоя, вызванного скачком уплотнения, возникающего перед препятствиями различного рода.



Фиг. 5

Поступила 29 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Войтенко Д. М., Зубков А. И., Панов Ю. А.* Обтекание цилиндрического препятствия на пластине сверхзвуковым потоком газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
2. *Войтенко Д. М., Зубков А. И., Панов Ю. А.* О существовании сверхзвуковых зон в пространственных отрывных течениях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
3. *Глаголев А. И., Зубков А. И., Панов Ю. А.* Взаимодействие струи газа, вытекающей из отверстия в пластине, со сверхзвуковым потоком. Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 2.
4. *Уитфилд, Смитсон, Прайс.* Скачкообразное изменение положения линии раздела недорасширенной струи, истекающей навстречу набегающему потоку. Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 9.

УДК 533.6.011.72

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ НА НЕСТАЦИОНАРНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

М. В. ПИСКАРЕВА, Ф. В. ШУГАЕВ

(Москва)

Геометрические и кинематические условия совместности на фронте волны в трехмерном случае впервые получены Адамаром [1]. В предположении, что сами функции непрерывны, а их первые производные разрывны, Адамар получил условия, связывающие разрывы производных на фронте волны до третьего порядка включительно. При этом использовались лагранжевы переменные. Условия совместности обсуждаются в нескольких работах, например, у Н. Е. Кочина [2]. В [3] записаны в эйлеровых переменных условия совместности для случая, когда сами функции на фронте волны разрывны. При этом условия совместности даны в форме, использующей понятия внутренней геометрии поверхности.

В ряде работ [4, 5] условия совместности второго порядка применены для изучения движения ударной волны в одномерном потоке в предположении, что газ перед волной покоится.

Ниже для нестационарного одномерного и трехмерного течений на основе условий совместности получены соотношения, связывающие производные по времени от числа Маха ударной волны и изменение профиля плотности за волной с производными по координатам параметров потока перед волной и одного из параметров за волной. Из полученных соотношений при некотором определенном числе Маха волны, являющемся функцией γ ($\gamma=c_p/c_v=\text{const}$), следует связь между первыми и вторыми производными плотности за волной и производными параметров газа перед волной. Использованы условия совместности второго и третьего порядка на фронте волны.

Рассмотрим ударную волну, распространяющуюся в совершенном газе. Введем лагранжевы координаты a^1, a^2, a^3. Исходным состоянием будем считать состояние перед волной в начальный момент времени. В произвольный момент времени система координат, вообще говоря, не будет ортогональной. Найдем тот вид, который примут в этой системе координат геометрические и кинематические условия совместности на фронте волны.

Пусть $f(a^1, a^2, a^3, t)=0$ есть уравнение поверхности волны в момент времени t. Условия совместности в форме Адамара включают в себя производные функции f, геометрический и кинематический смысл которых сразу не очевиден. В данной заметке использованы соображения, развитые в [3], с той разницей, что в рассматриваемом случае учитывается явная зависимость компонент метрического тензора пространства от времени.

Геометрические условия совместности первого порядка имеют вид [3]

$$\left[\frac{\partial z}{\partial a^k}\right]=B\nu_k+g^{\alpha\beta}g_{jk}\frac{\partial[z]}{\partial u^\alpha}\frac{\partial a^j}{\partial u^\beta},\qquad B=\left[\frac{\partial z}{\partial a^i}\right]\nu^i,\quad \alpha=1,2,\quad k=1,2,3 \tag{1}$$

где z — произвольный параметр газа, $[z]=z_2-z_1$ (индексы 1 и 2 означают состояние перед волной и за волной соответственно), $g^{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора на поверхности волны, g_{jk} — компоненты метрического тензора пространства, ν^i — проекции единичной нормали, u^1, u^2 — криволинейные координаты на поверхности волны.

Верхние индексы относятся к контравариантным величинам, нижние — к ковариантным. Здесь и далее греческие буквы используются в качестве индексов метрического тензора поверхности волны, латинские — метрического тензора пространства.

Кинематическое условие совместности первого порядка в лагранжевых координатах записывается так же, как и в [3]

$$\left[\frac{\partial z}{\partial t}\right]+BJ=\frac{d[z]}{dt},\qquad \frac{d}{dt}\equiv\frac{\partial}{\partial t}+J\nu^i\frac{\partial}{\partial a^i} \tag{2}$$

где J — скорость распространения волны относительно газа перед волной. Из (1) и (2) найдем кинематические условия совместности второго порядка в лагранжевых переменных, считая для простоты, что $[z]=0$

$$\begin{gathered}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial a^i\,\partial t}\right]=\left(\frac{dB}{dt}-CJ+BJ\nu^j\nu^p\nu_k\Gamma_{jp}{}^k+B\nu^j\nu^k\frac{\partial^2 x_1{}^p}{\partial a^j\,\partial t}\frac{\partial x_1{}^p}{\partial a^k}\right)\nu_i-\\ -g_{ij}g^{\alpha\beta}\frac{\partial BJ}{\partial u^\alpha}\frac{\partial a^j}{\partial u^\beta},\qquad C=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial a^i\,\partial a^j}\right]\nu^i\nu^j\\ \left[\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right]=CJ^2-2J\frac{dB}{dt}-B\frac{dJ}{dt}-BJ^2\nu^j\nu^p\nu_k\Gamma_{jp}{}^k-BJ\frac{\partial^2 x_1{}^p}{\partial a^i\,\partial t}\frac{\partial x_1{}^p}{\partial a^j}\nu^i\nu^j\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $x^i=x^i(a^1, a^2, a^3, t)$ — эйлеровы координаты частицы, $\Gamma_{jp}{}^k$ — коэффициенты аффинной связности пространства. Первое из уравнений (3) позволяет, в частности, определить скачок величины $\omega=\operatorname{rot}\mathbf{v}$ ($v^i\equiv\partial x^i/\partial t$) на ударной волне. Полагая $z=x^i$, а также используя выражение для производной единичной нормали и для величины $[\partial x^i/\partial a^j]$ (где ρ — плотность газа)

$$\left[\frac{\partial x^i}{\partial a^j}\right]=(\varepsilon-1)\nu_j\nu^m\frac{\partial x_1{}^i}{\partial a^m},\qquad \varepsilon=\frac{\rho_1}{\rho_2}$$

$$\begin{gathered}\frac{d\nu^k}{dt}=-g^{\alpha\beta}\frac{\partial a^k}{\partial u^\alpha}\frac{\partial J}{\partial u^\beta}-J\nu^j\nu^p\Gamma_{jp}{}^k+\nu^k\nu^i\nu^j\frac{\partial^2 x_1{}^p}{\partial a^i\,\partial t}\frac{\partial x_1{}^p}{\partial a^j}-\\ -g^{ik}\nu^j\left(\frac{\partial^2 x_1{}^p}{\partial a^i\,\partial t}\frac{\partial x_1{}^p}{\partial a^j}+\frac{\partial^2 x_1{}^p}{\partial a^j\,\partial t}\frac{\partial x_1{}^p}{\partial a^i}\right)\end{gathered}$$

получим

(4)
$$[\omega^1]=\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)^2\frac{\partial J}{\partial l_2}+\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 x_1{}^3}{\partial a^2\,\partial t}+\frac{\partial^2 x_1{}^2}{\partial a^3\,\partial t}\right)+$$
$$+\frac{1}{J\rho_1}(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_1}{\partial a^2}-J^2\frac{\partial\rho_1}{\partial a^2}\right)$$
$$[\omega^2]=-\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)^2\frac{\partial J}{\partial l_1}-\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon)\left(\frac{\partial^2 x_1{}^3}{\partial a^1\,\partial t}+\frac{\partial^2 x_1{}^1}{\partial a^3\,\partial t}\right)-$$
$$-\frac{1}{J\rho_1}(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_1}{\partial a^1}-J^2\frac{\partial\rho_1}{\partial a^1}\right)$$
$$[\omega^3]=0$$

Здесь p – давление, ось x^3 направлена по нормали к ударной волне в рассматриваемый момент времени, l_1, l_2 – дуги сечений поверхности волны плоскостями x^1x^3, x^2x^3 соответственно. Формулы (4) справедливы для любого термодинамически равновесного газа. Они являются обобщением аналогичных соотношений работы [6] на случай, когда ударная волна нестационарна, а поток газа перед ней неоднороден.

Из второго уравнения (3) и уравнения движения следует, что изменение числа Маха ударной волны равно

(5)
$$\frac{dM}{dt}=k_1\left(\frac{\partial^2 x_1{}^1}{\partial a^1\,\partial t}+\frac{\partial^2 x_1{}^2}{\partial a^2\,\partial t}\right)+k_2\frac{\partial^2 x_1{}^3}{\partial a^3\,\partial t}+$$
$$+k_3\frac{\partial\rho_1}{\partial a^3}+k_4\frac{\partial s_1}{\partial a^3}+k_5\frac{\partial e}{\partial a^3}+k_6H$$
$$k_i=-M^2(M^2-1)bn_i,\qquad n_1=-(\gamma-1)M^{-1}$$
$$e=p_2:\ b=\frac{2\gamma M^2-\gamma+1}{2[2(2\gamma-1)M^4+(\gamma+5)M^2-\gamma+1]},\qquad n_2=(3-\gamma)M^{-1}$$
$$n_3=\frac{2(\gamma-1)c_1}{\rho_1},\qquad n_4=\frac{(\gamma-1)(2\gamma-1)c_1}{\gamma R}$$
$$n_5=\frac{(\gamma+1)^2}{(2\gamma M^2-\gamma+1)\rho_1c_1},\qquad n_6=-\frac{4hc_1}{(\gamma+1)M^2}$$
$$e=\frac{\partial x_2{}^3}{\partial t}:\ b=\frac{1}{2(3M^2+1)},\qquad n_2=-\frac{2(\gamma-1)}{M},\qquad n_3=\frac{(3\gamma-1)c_1}{\rho_1}$$
$$n_4=\frac{3(\gamma-1)c_1}{R},\qquad n_5=\frac{(\gamma+1)^2M}{h},\qquad n_6=-\frac{4(2\gamma M^2-\gamma+1)c_1}{(\gamma+1)M^2}$$

Здесь s – энтропия, H – средняя кривизна поверхности ударной волны, c – скорость звука, R – газовая постоянная, $h=2+(\gamma-1)M^2$. Вид уравнения (5) при $e=\rho_2$ приведен в [7]. В одномерном случае, если ввести инвариант Римана $r=\partial x/\partial t+$ $+2c/(\gamma-1)$, аналогичное уравнение примет вид

(6)
$$\frac{dM}{dt}=\frac{m_1}{c_1}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)_2-\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right)_1\right)-\frac{m_2c_1}{R}\frac{ds_1}{da}$$
$$m_1=\frac{(\gamma+1)hM^2}{4(M^2-1)^2},\qquad m_2=\frac{hM^2}{2(M^2-1)},\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\rho c}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial a},\qquad \rho_0=\rho_1(a,0)$$

Все коэффициенты уравнений (5), (6) сохраняют свой знак при изменении числа Маха. В частном случае, когда перед волной параметры газа постоянны, соотношения (5) совпадают с формулами, приведенными в [8] и выведенными для одномерного течения.

Найдем выражения для второй производной числа Маха по времени и для производной по времени величины $\partial\rho/\partial a^3$ за волной. Для этого понадобятся условия совместности третьего порядка. Будем считать, что газ перед волной покоится. Кинематические условия совместности третьего порядка выводятся из условий совместности второго порядка при помощи замены $z\to\partial z/\partial a^i$ (или $z\to\partial z/\partial t$) и имеют вид ($[z]=0$)

$$
\left[\frac{\partial^3 z}{\partial t^2\,\partial a^3}\right]=DJ^2+\frac{d^2B}{dt^2}-2J\frac{dC}{dt}-3Jg^{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial u^\alpha}\frac{\partial J}{\partial u^\beta}-C\frac{dJ}{dt}-Bg^{\alpha\beta}\frac{\partial J}{\partial u^\alpha}\frac{\partial J}{\partial u^\beta}
\tag{7}$$

$$
\left[\frac{\partial^3 z}{dt^3}\right]=-DJ^3+3J^2\frac{dC}{dt}+3JC\frac{dJ}{dt}-3J\frac{d^2B}{dt^2}-3\frac{dB}{dt}\frac{dJ}{dt}-
$$

$$
-B\frac{d^2J}{dt^2}+3J^2g^{\alpha\beta}\frac{\partial B}{\partial u^\alpha}\frac{\partial J}{\partial u^\beta}+BJg^{\alpha\beta}\frac{\partial J}{\partial u^\alpha}\frac{\partial J}{\partial u^\beta}
$$

$$
D=\left[\frac{\partial^3 z}{\partial a^i\,\partial a^j\,\partial a^k}\right]\nu^i\nu^j\nu^k
$$

Заменяя в формулах (7) величину z координатой x^3 и определяя члены в левой части из уравнения движения, получим систему двух уравнений относительно d^2M/dt^2 и $d/dt(\partial\rho_2/\partial a^3)$. Эта система содержит также производные по координатам параметров потока перед волной и первую и вторую нормальные производные плотности за волной.

В общем случае рассматриваемая система имеет довольно громоздкий вид. Поэтому выпишем формулы для двух частных случаев: одномерного течения, когда газ перед волной неоднороден, и пространственного течения, когда газ перед волной однороден.

В одномерном случае величина $d/dt(\partial\rho_2/\partial a)$ равна ($a^3=a$)

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial\rho_2}{\partial a}=A_1\frac{d^2\rho_1}{da^2}+A_2\frac{\partial^2\rho_2}{\partial a^2}+A_3\frac{d^2s_1}{da^2}+A_4\left(\frac{d\rho_1}{da}\right)^2+A_5\frac{d\rho_1}{da}\frac{\partial\rho_2}{\partial a}+
\tag{8}$$

$$
+A_6\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial a}\right)^2+A_7\frac{d\rho_1}{da}\frac{ds_1}{da}+A_8\frac{\partial\rho_2}{\partial a}\frac{ds_1}{da}+A_9\left(\frac{ds_1}{da}\right)^2
$$

$A_i=(\gamma+1)c_1MF_iE^{-1}$, $\quad E=2(\gamma-1)(2-\gamma)M^6-(\gamma-1)(3\gamma+13)M^4+$
$+2(\gamma^2-\gamma-4)M^2-\gamma^2-2\gamma-5$

$F_1=-{}^1/_2M^2[7(\gamma-1)^2M^6+14(\gamma-1)(2-\gamma)M^4+(17\gamma^2-38\gamma+29)M^2-2\gamma(\gamma-13)]h^{-1}$

$F_2={}^1/_2(M^2-1)[3(\gamma-1)M^4+(3-\gamma)M^2+2(\gamma+2)]$

$F_3=(\gamma-1)\rho_1M^2(M^2-1)[2(4\gamma-3)M^2+13-\gamma]R^{-1}h^{-1}$

Выражение для d^2M/dt^2 в одномерном случае имеется в [7].

Для пространственного течения, если газ перед волной однороден и, кроме того, первая производная $dM/dt=0$ в данный момент, величина d^2M/dt^2 записывается следующим образом:

$$
\frac{d^2M}{dt^2}=N_1\left[\frac{\partial^2M}{\partial l_1\,\partial l_1}+\frac{\partial^2M}{\partial l_2\,\partial l_2}\right]+N_2\left[\left(\frac{\partial M}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial M}{\partial l_2}\right)^2\right]+N_3K+
\tag{9}$$

$$
+N_4H^2+N_5H\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial\rho_2}{\partial a^3}+N_6\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial a^3\,\partial a^3}+N_7\frac{1}{\rho_1{}^2}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial a^3}\right)^2
$$

$$
N_i=\frac{(M^2-1)c_1{}^2\lambda_i}{4(\gamma+1)E},\qquad \lambda_1=-8h^3
$$

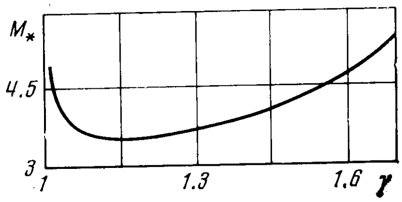
$\lambda_2=4h[3(5-\gamma)M^4+(\gamma^2-10\gamma-19)M^2-2(\gamma+3)]M^{-1}$, $\quad\lambda_3=8h^2(\gamma M^4+1)M^{-1}$

$\lambda_4=-8h^2[(\gamma+3)M^4-(7-\gamma)M^2+6]M^{-1}$,

$\lambda_5=2h^2[(\gamma^2-10\gamma+5)M^4+2(7\gamma-9)M^2+2(7-\gamma)]M^{-1}$

Коэффициенты N_6, N_7 такие же, как и в одномерном случае [7]. Величина K есть гауссова кривизна поверхности волны. Если в рассматриваемой точке фронта волны число Маха $M=1$, то коэффициенты A_2, A_3, A_9 и все коэффициенты N_i равны нулю.

Интересно отметить, что определитель системы, из которой получены выражения (8), (9), обращается в нуль при $M=M_*(\gamma)$, где $M_*(\gamma)$ есть корень уравнения $E=0$. Если же характеризовать состояние газа за волной не распределением плотности, а распределением давления или скорости, то определители соответствующих систем при $1\leqslant M<\infty$ в нуль не обращаются. Подобным же образом всюду отличен от нуля определитель аналогичной системы уравнений, которая используется для нахождения величин d^3M/dt^3 и $d/dt(\partial^2\rho_2/\partial a^3\partial a^3)$.



Обращение в нуль величины E приводит к тому, что все коэффициенты в правой части выражений (8), (9) меняют знак при переходе через $M=M_*$. Кроме того, коэффициенты N_2, N_5 претерпевают еще одно изменение знака. Таким образом, знак производных d^2M/dt^2, $d/dt(\partial\rho_2/\partial a^3)$ зависит не только от формы волны, не только от распределения плотности за волной и производных числа Маха вдоль поверхности волны, но также и от самого числа Маха.

График функции $M=M_*(\gamma)$ приведен на фигуре. При $\gamma=1.1598$ величина M_* имеет минимальное значение, равное 3.5106.

Из условия ограниченности производной d^2M/dt^2 при $M=M_*$ получается соотношение между первой и второй производными плотности по нормали за волной и производными параметров газа перед волной. Для одномерного течения выполняется

$$\frac{\partial^2\rho_2}{\partial x^2}=Q_1\frac{d^2\rho_1}{dx^2}+Q_2\frac{1}{R}\frac{d^2s_1}{dx^2}+Q_3\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{d\rho_1}{dx}\right)^2+Q_4\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+$$
$$+Q_5\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x}\right)^2+Q_6\frac{1}{R}\frac{d\rho_1}{dx}\frac{ds_1}{dx}+Q_7\frac{1}{R}\frac{\partial\rho_2}{\partial x}\frac{ds_1}{dx}+Q_8\frac{1}{R^2}\left(\frac{ds_1}{dx}\right)^2$$

Для пространственного течения (при $\rho_1=\text{const}$, $s_1=\text{const}$) имеем

$$\frac{\partial^2\rho_2}{\partial x^3\,\partial x^3}=L_1\rho_1\left(\frac{\partial^2M}{\partial l_1\,\partial l_1}+\frac{\partial^2M}{\partial l_2\,\partial l_2}\right)+L_2\rho_1\left(\left(\frac{\partial M}{\partial l_1}\right)^2+\left(\frac{\partial M}{\partial l_2}\right)^2\right)+$$
$$+L_3\rho_1K+L_4\rho_1H^2+L_5H\frac{\partial\rho_2}{\partial x^3}+Q_5\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{\partial\rho_2}{\partial x^3}\right)^2$$

Значения L_i, Q_i зависят только от γ.

Таким образом, если задано распределение параметров перед волной, то при $M=M_*$ значение производной плотности по нормали $\partial^2\rho_2/\partial x^3\partial x^3$ не зависит от того, равна нулю величина d^2M/dt^2 или нет.

Формулы (8), (9) могут оказаться полезными при исследовании распространения и взаимодействия волн, при изучении устойчивости ударных волн, при построении приближенных методов для расчета движения нестационарных волн в неоднородной среде.

Поступила 2 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hadamard J.* Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris, Hermann, 1903.
2. *Кочин Н. Е.* К теории разрывов в жидкости. Собр. соч. т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1949.
3. *Thomas T.* Plastic flow and fracture in solids. New York – London Acad. Press. 1961 (Рус. перев.: Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964).
4. *Nunziato J. W., Walsh E. K.* Propagation and growth of shock waves in inhomogeneous fluids. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 8.
5. *Chen P. J., Gurtin M. E.* Growth and decay of one-dimensional shock waves in fluids with internal state variables. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 6.
6. *Русанов В. В.* Производные газодинамических функций за искривленной ударной волной. М., 1973. (ИПМ АН СССР. Препринт № 18).
7. *Шугаев Ф. В.* О движении ударных волн в газе с переменными параметрами. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 3.
8. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.