

## О ТЕЧЕНИЯХ В ПЛОСКОМ ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ДИЛАТАНТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Г. В. ЖИЖИН, А. А. УФИМЦЕВ

(Ленинград)

Уравнение автомодельного пограничного слоя для жидкостей со степенным реологическим законом сводится к уравнению первого порядка и двум квадратурам. Множество решений уравнения исследуется на двухлистной фазовой плоскости. Результаты исследования и расчета уравнения пограничного слоя дилатантных жидкостей сопоставляются один с другим.

1. В работах [1-3] исследованы все возможные автомодельные решения уравнений ламинарного пограничного слоя ньютоновской жидкости. Численные решения уравнения автомодельного пограничного слоя неньютоновских жидкостей со степенным реологическим законом

$$(1.1) \quad |f''|^{n-1} f''' + ff'' = 0$$

для некоторых краевых задач приведены в работах [4-7].

Используя групповые свойства уравнения (1.1) и методы качественного исследования дифференциальных уравнений, можно классифицировать все решения уравнения (1.1). Оно допускает, в частности, группу  $L$  преобразований  $(\eta, f) \rightarrow (a\eta, a^{(2n-1)/(n-2)} f)$ , т. е. каждому решению  $f=f(\eta)$  соответствует класс связанных с группой  $L$  решений  $f=a^{(2n-1)/(n-2)} f(a\eta)$ . Это свойство позволяет, во-первых, свести краевую задачу к начальной [6], во-вторых, преобразовать уравнение (1.1) к уравнению первого порядка и двум квадратурам.

Найдем инфинитезимальный оператор [8] дважды расширенной группы инвариантных преобразований  $L''$  уравнения (1.1)

$$X = \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \left( \frac{2n-1}{n-2} \right) f \frac{\partial}{\partial f} + \left( \frac{n+1}{n-2} \right) f' \frac{\partial}{\partial f'} + \left( \frac{3}{n-2} \right) f'' \frac{\partial}{\partial f''}$$

Оператор  $X$  позволяет получить инварианты этой группы  $p$  и  $q$  (для частного случая  $n=1$ , комбинируя инварианты  $p$  и  $q$ , можно составить переменные, применяемые в [1])

$$(1.2) \quad p = f'' |f|^3 / (1-2n), \quad q = f' |f|^{(n+1)/(1-2n)} \quad (n \neq 1/2)$$

При значении  $n=1/2$  система инвариантов отличается от (1.2) и функционально не зависит от  $p$  и  $q$ .

Дифференцируя  $p$  и  $q$  по  $\eta$ , с учетом (1.1), (1.2) находим

$$(1.3) \quad \frac{dp}{d\eta} = -|f|^{(2-n)/(2n-1)} p \left( |p|^{1-n} + \frac{3q}{2n-1} \right) \text{sign } f$$

$$(1.4) \quad \frac{dq}{d\eta} = |f|^{(2-n)/(2n-1)} \left( p - \frac{(n+1)q^2 \text{sign } f}{2n-1} \right)$$

Разделив (1.3) на (1.4), имеем

$$(1.5) \quad \frac{dp}{dq} = \frac{p[(2n-1)|p|^{1-n} + 3q] \text{sign } f}{(n+1)q^2 \text{sign } f - (2n-1)}$$

Каждому решению уравнения (1.5) соответствует класс связанных с группой  $L$  решений уравнения (1.1), которые получаются двумя квадратурами

$$(1.6) \quad f = \exp \int \frac{\text{sign } f (2n-1) q dq}{(2n-1)p - (n+1)q^2 \text{sign } f}$$

$$(1.7) \quad \eta = \int \frac{df}{q |f|^{(n+1)/(2n-1)}}$$

2. Рассмотрим решения уравнения (1.1) для течений «упрочняющихся» дилатантных жидкостей ( $1 < n < 2$ ). Решения уравнения (1.5), связывающего инварианты уравнения (1.1), могут быть качественно представлены траекториями из двухлистной фазовой плоскости  $(p, q)$ , один из листов которой отвечает положительным

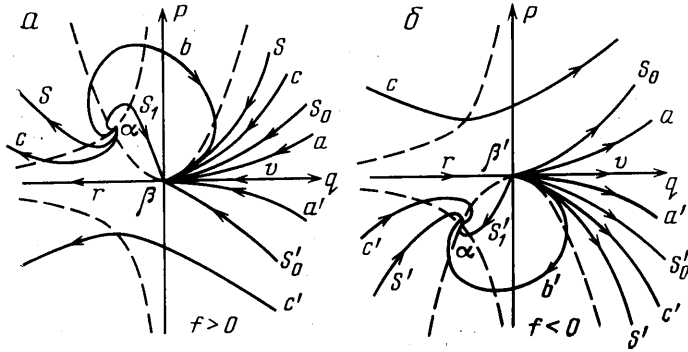
значениям функции тока  $f$ , другой — отрицательным (фиг. 1). В области значений  $n < 1$  и  $n > 2$  совокупности траекторий на фазовой плоскости отличаются от рассмотренных и исследовались отдельно. На каждом листе фазовой плоскости имеются две особые точки с конечными значениями координат [9]

$$\alpha: p = p_0 = \left( \frac{2n^2 + n - 1}{9} \right)^{1/(2n-1)}$$

$$q = q_0 = \frac{1-2n}{3} \left( \frac{9}{2n^2 + n - 1} \right)^{(n-1)/(2n-1)}; \quad \beta: p = q = 0 \quad (f > 0)$$

$$\alpha': p = -p_0, q = q_0; \quad \beta': p = q = 0 \quad (f < 0)$$

Эти точки являются положениями равновесия системы (1.3), (1.4): точки  $\alpha, \alpha'$  типа неустойчивого и устойчивого фокусов соответственно, точки  $\beta, \beta'$  типа седло — узел. Оба листа фазовой плоскости соединены бесконечно удаленной точкой  $\delta$  типа



Фиг. 1

седло — узел, являющейся проходной. Через эту точку (в ней  $f=0$ ) траектории с одного листа фазовой плоскости переходят на другой, соединяя положения равновесия. Заметим, что уравнение (1.1) инвариантно также относительно преобразования зеркального отражения  $(f, \eta) \rightarrow (-f, -\eta)$ , поэтому интегральным кривым уравнения (1.5) на двухлистной фазовой плоскости  $(p, q)$  соответствуют такие же кривые на плоскости  $(-p, q)$  с изменением направления движения вдоль кривой. Будем их в дальнейшем обозначать штрихом над соответствующей буквой.

Множеству всех траекторий принадлежат и сепаратрисы-траектории, отделяющие различные типы траекторий. Сепаратрисами являются 12 траекторий.

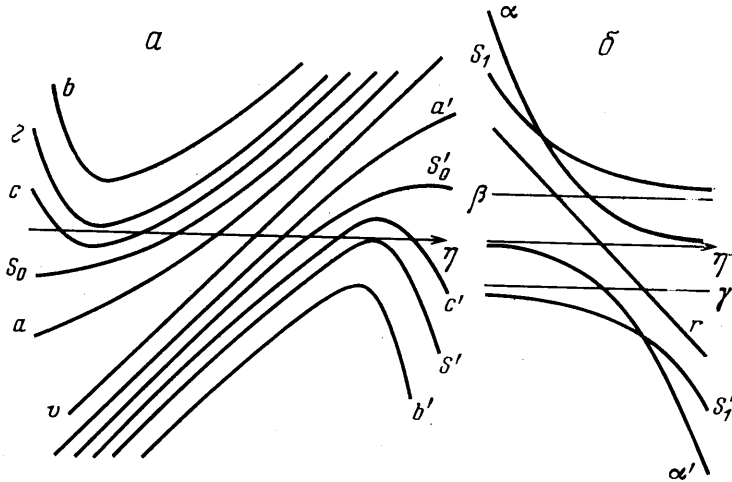
Траектория  $v$ , выходящая из точки  $\beta'$ , проходит через  $\delta$  и заканчивается в точке  $\beta$ . Ей отвечает решение  $f = c\eta + b$ , при  $c=1$  описывающее течение вдоль пластины с отсосом или вдувом, когда скорость на поверхности равна скорости набегающего потока. Траектория  $r$ , выходящая из точки  $\beta$ , проходит через  $\delta$  и заканчивается в точке  $\beta'$ . Ей отвечает решение  $f = -c\eta + b$ , при  $c=1$  описывающее течение типа  $v$ , но с противоположным знаком продольной скорости. Точке  $\alpha$  соответствует решение

$$f = \left[ c \left( \frac{2-n}{2n-1} \right) + \eta \left( \frac{2-n}{3} \right) \left( \frac{9}{2n^2+n-1} \right)^{(n-1)/(2n-1)} \right]^{(1-2n)/(2-n)} \quad (\eta \geq 0)$$

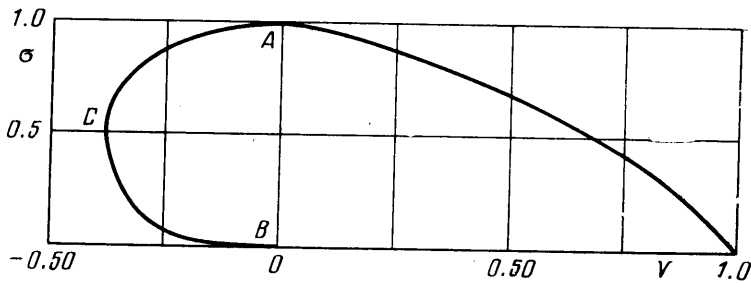
описывающее течение покоящейся на бесконечности жидкости в пограничном слое с отсосом при движении поверхности пластины против направления координаты  $x$ . Точке  $\alpha'$  соответствует решение

$$f = - \left[ c \left( \frac{2-n}{2n-1} \right) - \eta \left( \frac{2-n}{3} \right) \left( \frac{9}{2n^2+n-1} \right)^{(n-1)/(2n-1)} \right]^{(1-2n)/(2-n)} \quad (\eta \leq 0)$$

Точке  $\beta$  соответствует решение  $f = \text{const}$ ,  $f > 0$ . Точке  $\beta'$  соответствует решение  $f = \text{const}$ ,  $f < 0$ . Траектория  $s$ , выходящая из точки  $\alpha$ , проходит через  $\delta$  и заканчивается в точке  $\beta$ . Ей отвечает решение, описывающее течение в пограничном слое с отсосом или без него, когда скорость на поверхности произвольна, а скорость набегающего потока конечна. (Сюда входит и решение Блазиуса.) Траектория  $s'$ , выходящая из точки  $\beta'$ , проходит через  $\delta$  и заканчивается в точке  $\alpha'$ . Траектория  $s_0$



Фиг. 2



Фиг. 3

выходит из точки  $\alpha$  и заканчивается в  $\beta$ . Ей соответствует решение, описывающее течение с отсосом при отрицательной скорости поверхности пластины (на бесконечности жидкость покоится). Траектория  $s_1'$  выходит из точки  $\beta'$  и заканчивается в  $\alpha'$ . Траектория  $s_0$ , выходящая из точки  $\beta'$ , проходит через  $\delta$  и заканчивается в  $\beta$ . Ей отвечает решение, описывающее слой смешения, когда один из потоков покоится. Траектория  $s_0'$ , выходящая из точки  $\beta'$ , проходит через  $\delta$  и заканчивается в  $\beta$ .

Между сепаратрисами расположены траектории шести типов.

Траектории  $c$ , выходящие из точки  $\alpha$ , проходят через  $\delta$ , плоскость  $f < 0$ , опять через  $\delta$  и заканчиваются в точке  $\beta$ .

Решения, соответствующие этим траекториям, описывают довольно широкий класс краевых задач

$$f(0) = \text{var}, \quad f'(0) = \text{var}, \quad f'(\infty) = \text{const}$$

причем  $f(0)$  и  $f'(0)$  одновременно не обращаются в нуль. Траектории  $c'$ , выходящие из  $\beta'$ , проходят через  $\delta$ , плоскость  $f > 0$ , опять через  $\delta$  и заканчиваются в точке  $\alpha'$ .

Траектории  $b$  выходят из точки  $\alpha$  и заканчиваются в  $\beta$ . Им соответствуют решения, описывающие пограничный слой на пластине с отсосом с двигающейся поверхностью пластины ( $f(0) > 0$ ,  $f'(0) = \text{var}$ ,  $f'(\infty) = \text{const}$ ). Траектории  $b'$  выходят из точки  $\beta'$  и заканчиваются в  $\alpha'$ . Траектории  $a$ , выходящие из точки  $\beta'$ , проходят через  $\delta$  и заканчиваются в точке  $\beta$ , во всех точках траектории  $p > 0$ . Им соответствуют решения, описывающие слой смешения с конечной спутностью. Траектории  $a'$ , выходящие из точки  $\beta'$ , проходят через  $\delta$  и заканчиваются в точке  $\beta$  во всех точках

траектории  $p < 0$ . Графики изменения функции тока для каждого из решений представлены на фиг. 2.

3. Из рассмотрения множества интегральных кривых фиг. 2, а следует, что при переходе от сепаратрисы  $s$  к  $s_0$  угол наклона при  $f=0$  левых ветвей решений  $s$  сначала уменьшается от нуля, а затем растет, стремясь снова к нулю. Это означает, что граничному условию  $f'(0) < 0$  отвечают два решения  $s$ . Качественный вывод о двузначности решений при движении поверхности пластины против потока можно подтвердить расчетом.

Численным интегрированием уравнения (1.1) методом Рунге — Кутты определялись профиль скорости  $f'(\eta)$  и коэффициент трения

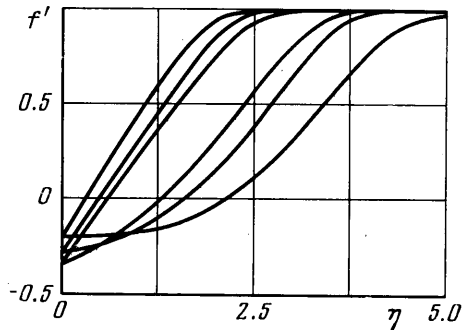
$$(3.1) \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_0^2} = \frac{2[f''(0)]^n}{[n(n+1)]^{n/(n+1)} Re_x^{1/(n+1)}}$$

где  $\tau_w$  — касательное напряжение на поверхности пластины,  $U_0$  — скорость потока на бесконечности,  $\rho$  — плотность жидкости,  $Re_x$  — число Рейнольдса. Краевая задача с условиями  $f'(\infty)=1$ ,  $f'(0)=c$ ,  $f(0)=0$  сводилась к начальной [8]. На фиг. 3 представлены данные расчета относительного коэффициента трения  $\sigma = c_f / c_{f0}$  (где  $c_{f0} = c_f(n, Re_x)$  — коэффициент трения в задаче Блазиуса, например  $c_{f0}(1.9, Re_x) = 0.337 Re_x^{-0.345}$ ,  $c_{f0}(1.5, Re_x) = 0.439 Re_x^{-0.4}$ ) в зависимости от относительной скорости поверхности пластины  $V = f'(0)$ . При достаточно больших числах  $Re_x$  ( $\geq 100$ ) коэффициент трения с уменьшением  $n$  падает.

Видно также, что коэффициент трения растет с уменьшением скорости движения поверхности пластины, если поверхность пластины движется по потоку. Если же поверхность пластины движется против потока, существует два значения коэффициента трения, соответствующих двум решениям уравнения (1.1), причем течениям с большим коэффициентом трения отвечает более наполненный профиль скорости (фиг. 4).

Как показал расчет, стационарные течения вдоль пластины, поверхность которой движется против набегающего потока, существуют только тогда, когда скорость движения поверхности лежит в диапазоне  $V > -0.38$ .

Вопросы ветвления и устойчивости решений уравнений некоторых стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости изучены в [1-3, 10-12]. Следуя полученным в [10-12] результатам, можно предположить, что ветвь AC кривой  $\sigma(V)$  (фиг. 3) неустойчивая, а устойчиво новое решение, возникшее в точке ветвления при  $V=0$  (характеризуемое малым коэффициентом сопротивления). Это означает, что из двух возможных решений реализуется решение с меньшим коэффициентом сопротивления, т. е. ветвь CB. Отметим, что для анализа течений около пластины конечной длины необходимо учитывать, что автомодельные решения могут быть неприменимы [2, 3].



Фиг. 4

Поступила 9 VIII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Casal P. Sur l'ensemble des solutions de l'equation de la couche limite. J. Mécanique, 1972, т. 11, No. 3. (Рус. перев.: О совокупности решений уравнения пограничного слоя. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1974, № 4.)
2. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности. В сб. «Избранные проблемы прикладной механики». М., «Наука», 1974.
3. Черный Г. Г. Пограничный слой на движущейся поверхности. В сб. «Аэромеханика». М., «Наука», 1976.
4. Acrivos A., Shah M. J. Petersen E. E. Momentum and heat transfer in laminar boundary-layer flows of non-newtonian fluids past external surfaces. A.I.Ch.E. Journal, 1960, vol. 6, No. 2.
5. Lemieux P. F., Dubey R. N., Unny T. E. Variational method for a pseudoplastic fluid in a laminar boundary layer over a flat plate. Trans. ASME J. Appl. Mech., 1971, vol. 38, No. 2. (Рус. перев.: Вариационный метод решения задачи о ламинарном пограничном слое псевдопластической жидкости на плоской пластине. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механ., 1971, т. 38, № 2).
6. Nath G. Initial-value method for a pseudoplastic fluid in a laminar boundary layer over a porous flat plate with suction. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1973, vol. 40,

- № 4. (Рус. перев.: Начальная задача для ламинарного пограничного слоя псевдопластической жидкости на пористой плоской пластине при наличии отсоса. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механ., 1973, т. 40, № 4.)
7. Шульман З. П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. М., «Энергия», 1975.
  8. Овсянников Л. В. Групповые свойства уравнений газовой динамики. Новосибирск, 1968.
  9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.
  10. Сорокин В. С. О стационарных движениях в жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
  11. Юдович В. И. Пример рождения вторичного стационарного или периодического течения при потере устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
  12. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.

УДК 532.538

### ОБ ЭФФЕКТЕ ПОВЫШЕНИЯ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ ПОСТОЯННОЙ МАССЫ И ОБЪЕМА ПРИ БАРОТРОПНЫХ ПРОЦЕССАХ

Ю. Л. ЯКИМОВ

(Москва)

Рассмотрим баротропный процесс  $p=p(\rho)$  в жидкости, занимающей некоторый объем  $\Omega$ . Пусть жидкость в одном состоянии  $p_0=p(\rho_0)$  покоится и занимает объем  $\Omega$ , в другом состоянии та же масса жидкости занимает объем, равный по величине  $\Omega$ , и движется.

Если ограничимся малым изменением давления и плотности, то во втором состоянии для каждой точки объема с точностью до малых высшего порядка по  $\Delta\rho$  имеем

$$(1) \quad p(x_i, t) = p_0 + \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_0 \Delta\rho(x_i, t) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2p}{d\rho^2} \right)_0 [\Delta\rho(x_i, t)]^2$$

Здесь и далее индексом 0 обозначены производные, взятые при постоянном  $\rho_0$ . Рассмотрим среднее по объему  $\Omega$  давление

$$(2) \quad \langle p_\Omega \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} p(x_i, t) d\Omega = p_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2p}{d\rho^2} \right)_0 \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} (\Delta\rho)^2 d\Omega \geq p_0$$

Интеграл от  $\Delta\rho(x_i, t)$  равен нулю, так как в объеме  $\Omega$  по условию масса жидкости не изменилась. Далее, так как в (2)  $(d^2p/d\rho^2)_0 \geq 0$  и интеграл от  $\Delta\rho^2$  больше нуля, получаем, что имеет место повышение среднего по объему давления при баротропном процессе.

Рассмотрим теперь вопрос о давлении, среднем по времени. В некоторых случаях, например при турбулентном движении, из повышения среднего давления по объему  $\langle p_\Omega \rangle$  следует аналогичное утверждение для среднего давления по времени. В то же время существует много случаев, например, вращательное движение в круглом сосуде, когда в некоторых точках пространства давление будет ниже начального. Однако для случая одномерного периодического движения [1-5] можно доказать, что среднее по времени давление в любой частице среды в возмущенном состоянии больше давления покоящейся среды, занимающей тот же объем.

Действительно, при периодическом одномерном движении среднее по времени давление для фиксированной частицы  $\langle p_i \rangle$  одинаково для всех частиц среды, так как в противном случае изменялся бы средний импульс части среды, находящейся между частицами, имеющими разное  $\langle p_i \rangle$ , что противоречит периодичности движения.

Введем в качестве лагранжевой координаты массу среды  $m$ , отсчитываемую от одного из концов объема, и вычислим среднее давление в частицах за период  $T$

$$(3) \quad \langle p_i \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p(m, t) dt = \frac{1}{M} \int_0^M \langle p_i \rangle dm =$$