

УДК 532.517.4

РАСЧЕТ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

С. В. КОНСТАНТИНОВ

(Москва)

Расчету характеристик стационарного турбулентного течения несжимаемой жидкости в прямой круглой трубе с использованием модели А. Н. Колмогорова посвящены работы [1-5]. В этих работах введены дополнительные допущения, например не учитывается диффузия энергии, молекулярная вязкость, область течения делится на условные слои и т. п. В данной работе задача решается в более общей постановке.

Рассмотрим стационарное и полностью турбулентное течение несжимаемой жидкости в прямой круглой трубе. Используем систему уравнений, предложенную в [6]. В безразмерных переменных $r^\circ = r/R$, $L^\circ = L/R$, $E^\circ = E/u_*^2$, $\nu_T^\circ = \nu_T/\nu$, $u^\circ = u/u_*$. В случае стационарного течения она имеет вид

$$(1) \quad \frac{1}{r^\circ} \frac{d}{dr^\circ} \left[r^\circ (1 + \nu_T^\circ) \frac{du^\circ}{dr^\circ} \right] = -2R_*$$

$$(2) \quad \frac{d}{dr^\circ} \left[r^\circ (1 + 0.4\nu_T^\circ) \frac{dE^\circ}{dr^\circ} \right] - 3.93 \frac{r^\circ}{L^{\circ 2}} (1 + 0.4\nu_T^\circ) E^\circ = -\nu_T^\circ r^\circ \left(\frac{du^\circ}{dr^\circ} \right)^2$$

$$(3) \quad \nu_T^\circ = 0.2R_E [1 - \exp(-2.1 \cdot 10^{-4} R_E^2) + 2 \cdot 10^{-2} R_E^{1/4} \exp(-4 \cdot 10^{-4} R_E^2)]$$

$$(4) \quad R_E = R_* L^\circ \sqrt{E^\circ}$$

$$(5) \quad L^\circ = 0.37 - 0.24r^{\circ 2} - 0.13r^{\circ 4} \quad (0 \leq r^\circ \leq 1)$$

Граничные условия

$$(6) \quad \frac{du^\circ}{dr^\circ} = 0 \quad (r^\circ = 0), \quad u^\circ = 0 \quad (r^\circ = 1)$$

$$(7) \quad \frac{dE^\circ}{dr^\circ} = 0 \quad (r^\circ = 0), \quad E^\circ = 0 \quad (r^\circ = 1)$$

Здесь r — расстояние от оси трубы, R — радиус трубы, L — масштаб турбулентности, E — энергия турбулентности, u_* — динамическая скорость, ν_T — турбулентная вязкость, ν — молекулярная вязкость, u — проекция вектора осредненной скорости на ось, совпадающую с осью трубы, $R_* = u_* R / \nu$ — число Рейнольдса, вычисленное по динамической скорости.

Проинтегрируем по r° уравнение (1) с учетом граничных условий (6) и подставим полученный результат в (2). Получим

$$(8) \quad \frac{du^\circ}{dr^\circ} = -R_* \frac{r^\circ}{1 + \nu_T^\circ}$$

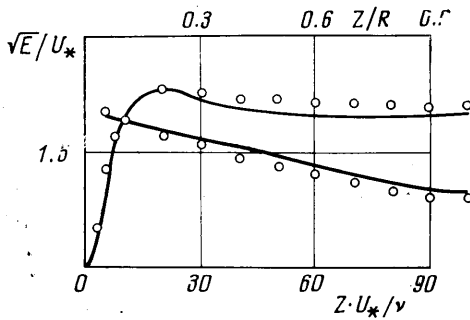
$$(9) \quad \frac{d}{dr^\circ} \left[r^\circ (1 + 0.4\nu_T^\circ) \frac{dE^\circ}{dr^\circ} \right] - 3.93 \frac{r^\circ}{L^{\circ 2}} (1 + 0.4\nu_T^\circ) E^\circ = -R_*^2 r^{\circ 3} \frac{\nu_T^\circ}{(1 + \nu_T^\circ)^2}$$

Для численного решения задачи перейдем к конечно-разностной аппроксимации уравнений (3) — (5), (8), (9) и граничных условий (6), (7). В области $0 \leq r^\circ \leq 1$ введем равномерную разностную сетку $\omega_{h_r} = \{r_i^\circ = ih_r, i = 0, 1, \dots, N\}$ с шагом $h_r = 1/N$. Производные аппроксимируем конечно-разностными выражениями [7] с точностью $O(h_r^2)$ в уравнении (9) и $O(h_r)$ в (8).

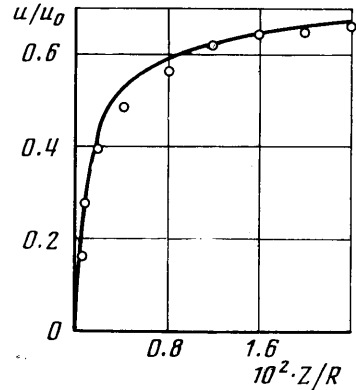
Решение разностной краевой задачи для энергии турбулентности находится методом прогонки [8]. Для осуществления вычислительного процесса необходимо задать начальное приближение ν_T° . В качестве такового используем известную эмпирическую формулу Рейхардта [9] для распределения турбулентной вязкости по радиусу трубы

$$(10) \quad \nu_T^\circ = 0.133R_* (1 - r^{\circ 2}) (0.5 + r^{\circ 2})$$

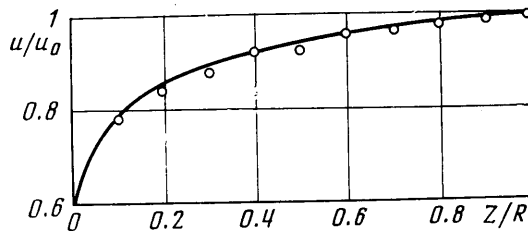
В результате решения уравнения (9) рассчитываются значения энергии E_i° , по которым уточняется величина турбулентной вязкости ν_{Ti}° ; после чего находятся



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

новые значения E_i° . Процесс итераций прекращается при достижении заданной точности вычисления.

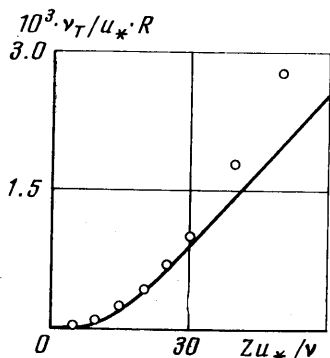
Перейдем к анализу полученных результатов. Для проверки расчетов используем данные классического эксперимента Лауфера (на приведенных ниже фигурах обозначены точками) [10, 11]. Значения констант, необходимых для счета, взяты из работы [10]: $R=1.234 \cdot 10^{-1}$ м, $\rho=1.205$ кг/м³, $\nu=1.5 \cdot 10^{-5}$ м²/сек, $dp/dx = -2,183 \cdot 10$ кг/м²·сек². Шаг по радиусу был выбран равным $h_r=0.01$.

При указанных значениях констант было найдено распределение энергии по радиусу трубы. Результаты счета хорошо согласуются с экспериментальными данными (Фиг. 1). Расчетные же значения скорости существенно отличались от экспериментальных. Причина расхождения — большая погрешность, вносимая при расчете с относительно крупным шагом $h_r=0.01$ в пристенной области, в которой градиенты имеют большие значения. Уменьшение шага привело к расхождению итерационного процесса при расчете энергии. Это объясняется наличием в выражении для диссипации энергии — второе слагаемое в уравнении (2) — делителя L^{02} . Так как $L^0 \rightarrow 0$ при $r^0 \rightarrow 1$, то при уменьшении шага, т. е. при приближении к стенке, сильно возрастал коэффициент C_i при E_i [7], в который входит делителем L_i^{02} .

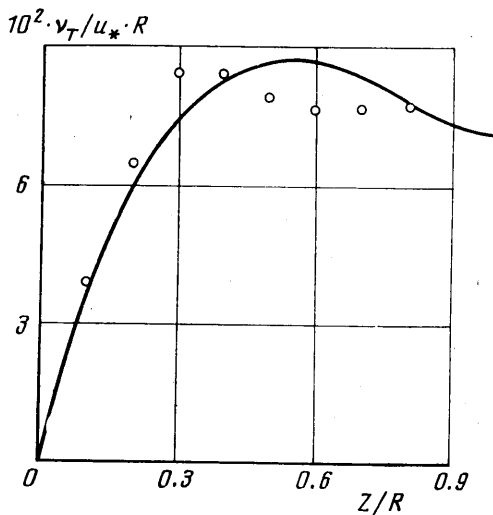
Для более детального исследования была выделена пристенная область. Введение новых безразмерных линейных переменных [12]: $z' = zu_* / \nu$, $L' = Lu_* / \nu$, где $z = R - r$ — расстояние от стенки; дало возможность рассчитывать масштаб турбулентности вблизи стенки, получая приемлемые для данной схемы значения. Расчет пристенной области проводился с переменным шагом [13, 14]. Граничными условиями при этом были следующие:

$$(11) \quad \begin{aligned} u^\circ &= 0 & \text{при } z' &= 0 \\ E^\circ &= 0 & \text{при } z' &= 0 \quad (0 \leq z' \leq z'_{\max}) \\ E^\circ &= E_r^\circ & \text{при } z' &= z'_{\max} \end{aligned}$$

где E_r° — значение энергии у стенки, рассчитанное при шаге h_r . Распределение энергии рассчитывалось в вышеуказанной последовательности. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными (Фиг. 1). Следует подчеркнуть, что расчетная кривая имеет характерный максимум у стенки, наблюдаемый



Фиг. 4



Фиг. 5

и в эксперименте. Расчет скорости проводился в два этапа. Сначала рассчитывалось распределение скорости u_i ($i=0, 1, \dots, n$) в пристенной области. Далее счет осуществлялся в области $z_{\max} \leq z \leq R$, причем в качестве граничного условия использовалось значение скорости u_n . Найденное таким образом распределение скорости хорошо согласуется с экспериментальными данными (фиг. 2, 3).

Следует отметить, что для турбулентной вязкости расчетные кривые хуже согласуются с экспериментом (фиг. 4, 5), чем для энергии турбулентности и осредненной скорости.

Поступила 10 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин В. Б. К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 4.
2. Вагер В. Г., Лайхтман Д. Л. Структура турбулентного потока в трубе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4.
3. Вулис Л. А., Джаугаштин К. Е. О распределении пульсационной энергии вблизи стенки. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, № 1.
4. Акагнов Н. И., Тульверт В. Ф. Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории пристеночных турбулентных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
5. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows. Comput. Methods Appl. Mech. and Engng, 1974, vol. 3, No. 2.
6. Васильев О. Ф., Квон В. И. Неустановившееся турбулентное течение в трубе. ПМТФ, 1971, № 6.
7. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
8. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. М., «Наука», 1973.
9. Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. Z. angew. Math. Mech., 1951, Bd 31, Nr 7.
10. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. Nat. Advis. Com. Aeronaut., Rept., 1954, No. 1174.
11. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
13. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 1. М., Изд-во МГУ, 1962.
14. Иевлев В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М., «Наука», 1975.