

НАКЛОННЫЙ ВХОД ТОНКОГО ТЕЛА В НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

(Чебоксары)

Рассмотрена плоская задача о наклонном проникании тонкого полубесконечного тела в идеальную невесомую и несжимаемую жидкость. Для клина с прямолинейными щеками проведены подробные числовые расчеты.

Полученные формулы применимы также для вычисления гидродинамических реакций при выходе тела из жидкости или поперечном движении полужатоленного тела с малой относительной скоростью. Кроме того, результаты настоящей работы могут быть использованы для вычисления гидродинамических сил, действующих на подводные крылья или лопасти винтов при пересечении со свободной поверхностью.

1. Постановка задачи. Пусть твердое тело (фиг. 1), поверхность которого в подвижной системе координат (x', y') определена функцией $y' = f(x')$, движется относительно неподвижной системы координат (x, y) с угловой скоростью $\omega(t)$ и поступательной скоростью $U(t) + iV(t)$. В начальный момент времени ($t=0$) обе системы координат совпадают, а их действительные оси составляют с невозмущенной свободной поверхностью угол $\lambda\kappa$.

Задача исследуется при обычных ограничениях, налагаемых в линейной теории на геометрические размеры тела и на скорости проникания

$$|f(x')| < \varepsilon l(t), \quad |\beta(x')| < \varepsilon, \quad |\omega t| < \varepsilon, \quad |Vt| < \varepsilon l$$

где ε — некоторое малое положительное число, $l(t)$ — расстояние вершины тела от точки пересечения со свободной поверхностью, $\beta(x') = df(x')/dx'$.

Заметим, что второе неравенство в некоторой малой окрестности вершины тела может не выполняться.

При указанных ограничениях краевая задача для функции скоростей $\partial w(z, t)/\partial z$ может быть сформулирована в полуплоскости $\text{Im}\{z \exp(\pi\kappa i)\} \leq 0$ с выброшенным отрезком $(-l, 0)$ (фиг. 2).

Уравнение движения твердой поверхности в переменных x, y описывается равенством

$$(y - y_0) \cos \Omega - (x - x_0) \sin \Omega - f\{(x - x_0) \cos \Omega + (y - y_0) \sin \Omega\} = 0$$

$$x_0 = \int_0^t U(t) dt, \quad y_0 = \int_0^t V(t) dt, \quad \Omega = \int_0^t \omega(t) dt$$

Поэтому кинематическое условие на твердой поверхности в рамках линеаризованной теории принимает вид

$$(1.1) \quad \text{Im} \frac{\partial w}{\partial z} = U\beta(x - x_0) + U\Omega - (x - x_0)\omega - V, \quad x \in [-l, 0]$$

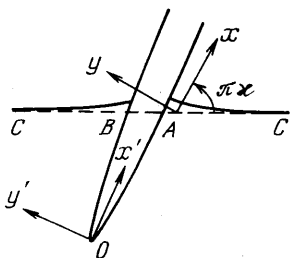
Давление жидкости можно найти из линеаризованного уравнения Коши — Лагранжа [1]

$$(1.2) \quad p = p_0 - \rho \operatorname{Re} \{ \partial w(z, t) / \partial t \}$$

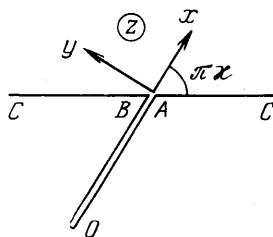
На свободной поверхности давление $p = p_0$, т. е. $\operatorname{Re} \{ \partial w / \partial t \} = 0$. Отсюда с учетом начального условия $w(z, 0) = 0$ следует, что $\operatorname{Re} w(z, t) = 0$ или

$$(1.3) \quad \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} e^{-\pi \kappa i} \right\} = 0, \quad \operatorname{Im} \{ z e^{\pi \kappa i} \} = 0$$

Равенства (1.1) и (1.3) представляют собой граничные условия для аналитической функции $\partial w(z, t) / \partial z$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Решение краевой задачи в общем случае отыскивается в классе функций, имеющих особенность вида $(z+l)^{-1/2}$ в точке O и кратный нуль на бесконечности [2]

$$(1.4) \quad \frac{\partial w}{\partial z} \sim z^{-2}, \quad z \rightarrow \infty$$

2. Решение задачи. Для решения краевой задачи (1.1), (1.3) с помощью функции

$$(2.1) \quad z = -l(1-\zeta)^{\kappa} \left(1 + \frac{\zeta}{a} \right)^{1-\kappa}, \quad a = \frac{1-\kappa}{\kappa}$$

отобразим полу плоскость $\operatorname{Im} \{ z \exp(\pi \kappa i) \} \leq 0$ с выброшенным отрезком $(-l, 0)$ на верхнюю полу плоскость $\operatorname{Im} \zeta \geq 0$ вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Соответствие точек видно из фиг. 2, 3. В многозначной функции (2.1) рассматривается та ветвь, которая на верхнем берегу отрезка $(-a, 1)$ принимает отрицательные значения.

Вместо функции скоростей $\partial w(z, t) / \partial z$ целесообразно рассмотреть производную комплексного потенциала $\partial w(\zeta, t) / \partial \zeta = (\partial w(z, t) / \partial z) (\partial z(\zeta, t) / \partial \zeta)$, которая всюду в верхней полу плоскости $\operatorname{Im} \zeta > 0$ аналитична и удовлетворяет на действительной оси следующим граничным условиям, вытекающим из (1.1) и (1.3) с учетом функции (2.1):

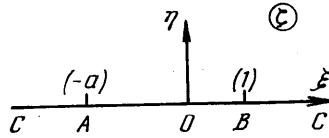
$$(2.2) \quad \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0, \quad -\infty < \xi < -a, \quad 1 < \xi < \infty, \quad \eta = 0$$

$$\operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = g(\xi) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi}, \quad -a \leq \xi \leq 1, \quad \eta = 0$$

$$(2.3) \quad g(\xi) = U\beta(x-x_0) + U\Omega - (x-x_0)\omega - V$$

$$(2.4) \quad x(\xi, t) = -l(1-\xi)^{\kappa} \left(1 + \frac{\xi}{a}\right)^{1-\kappa}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{l\xi}{a(1-\xi)^{1-\kappa}(1+\xi/a)^{\kappa}}$$

В бесконечно удаленной точке она имеет кратный нуль ($\partial w / \partial \xi \sim \xi^{-2}$, $\xi \rightarrow \infty$); в точке $\xi=0$, отвечающей вершине клина, ограничена; на концах интервала имеет интегрируемые особенности.



Фиг. 3

Решение краевой задачи (2.2), удовлетворяющее всем указанным условиям, можно найти с помощью формулы Келдыша — Седова [3]

$$(2.5) \quad \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{l}{\pi a^{1-\kappa} \sqrt{(1-\xi)(a+\xi)}} \int_{-a}^1 g(\tau) \left(\frac{a+\tau}{1-\tau}\right)^{1-\kappa} \frac{\tau d\tau}{\tau-\xi}$$

Отсюда нетрудно определить комплексно-сопряженную скорость $\partial w(z, t) / \partial z = [\partial w(\xi, t) / \partial \xi] / [\partial z(\xi, t) / \partial \xi]$ как функцию переменной ξ , которая совместно с (2.1) представляет параметрическое решение краевой задачи (1.1) и (1.3).

3. Распределение давления на твердой поверхности. На отрезке $(-a, 1)$ действительной оси ξ ($\eta=0$) потенциал

$$(3.1) \quad \varphi(\xi, t) = \int_{-a}^{\xi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\}_{\tau=\xi} d\xi = \frac{l}{\pi a^{1-\kappa}} \int_{-a}^1 g\tau I(\tau, \xi) \left(\frac{a+\tau}{1-\tau}\right)^{1-\kappa} \tau d\tau$$

$$(3.2) \quad I(\tau, \xi) = \int_{-a}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(a+\xi)(1-\xi)}(\tau-\xi)} = -\frac{\ln |G(\tau, \xi)|}{\sqrt{(a+\tau)(1-\tau)}}$$

$$(3.3) \quad G(\tau, \xi) = \frac{\sqrt{(a+\xi)(1-\tau)} - \sqrt{(a+\tau)(1-\xi)}}{\sqrt{(a+\xi)(1-\tau)} + \sqrt{(a+\tau)(1-\xi)}}$$

Распределение давления вдоль действительной оси в соответствии с формулой (1.2) равно

$$(3.4) \quad p = p_0 - \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \varphi(\xi, t), \quad \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = \frac{l(1-\xi)(a+\xi)}{l\xi}$$

С принятой точностью $l = -U(t)$.

Зависимость (3.4) совместно с (2.1) позволяет найти распределение давления вдоль смачиваемой поверхности твердого тела и вычислить результирующую сил давления и ее момент.

4. Поперечная сила. Поперечной силой будем называть проекцию результирующей на ось y . Она определяется из интеграла

$$(4.1) \quad Y = \int_{-l}^0 (p^- - p^+) dx = - \int_{-a}^1 (p - p_0) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi$$

Путем интегрирования по частям с учетом равенства

$$(\partial \xi(x, t) / \partial t) \partial x(\xi, t) / \partial \xi = Ux(\xi, t) / l$$

можно преобразовать к виду

$$Y = \rho \int_{-a}^1 \left(\frac{\partial \varphi(\xi, t)}{\partial t} - \frac{U}{l} \varphi(\xi, t) \right) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi$$

Подставляя сюда функцию (3.1), получаем

$$(4.2) \quad Y = \frac{\rho}{\pi a^{1-\kappa}} \int_{-a}^1 \int_{-a}^1 (2Ug(\tau) - l\dot{g}(\tau)) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\ln |G(\tau; \xi)| \tau d\tau d\xi}{(1-\tau)^{1-\kappa} (a+\tau)^\kappa}$$

Здесь $\dot{g}(\tau)$ — производная функции (2.3) по времени.

Интегрирование по переменной ξ можно выполнить в замкнутом виде. Нетрудно установить, что функция $F(\zeta, \tau) = e^{-\pi \kappa i} (\partial z(\zeta, t) / \partial \zeta) \ln G(\tau, \zeta)$ на действительной оси ξ вне отрезка $(-a, 1)$ принимает чисто мнимые значения. Поэтому

$$\operatorname{Re} \int_{-a}^1 F(\zeta, \tau) d\zeta = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta, \tau) d\zeta = -\pi \operatorname{Im} \{ \operatorname{res} F(\infty, \tau) \}$$

В окрестности бесконечно удаленной точки ($\zeta = \infty$)

$$\begin{aligned} \ln G(\tau, \zeta) &= \ln \frac{\sqrt{1-\tau} + i\sqrt{a+\tau}}{\sqrt{1-\tau} - i\sqrt{a+\tau}} - \frac{i}{\zeta} \sqrt{(a+\tau)(1-\tau)} - \\ &- \frac{i}{\zeta^2} \sqrt{(a+\tau)(1-\tau)} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{1-a}{4} \right) + O(\zeta^{-3}) \\ z(\zeta, t) &= -\frac{le^{-\pi \kappa i}}{a^{1-\kappa}} \left\{ \zeta + \frac{1-2\kappa}{\kappa} - \frac{1-\kappa}{2\kappa} \zeta^{-1} + O(\zeta^{-2}) \right\} \\ \frac{\partial z(\zeta, t)}{\partial \zeta} &= -\frac{le^{-\pi \kappa i}}{a^{1-\kappa}} \left\{ 1 + \frac{1-\kappa}{2\kappa} \zeta^{-2} + O(\zeta^{-3}) \right\} \end{aligned}$$

Следовательно

$$(4.3) \quad -\pi \operatorname{Im} \{ \operatorname{res} F(\infty, \tau) \} = \frac{\pi l}{a^{1-\kappa}} \sqrt{(a+\tau)(1-\tau)}$$

Поскольку на верхнем берегу отрезка $(-a, 1)$, $\operatorname{Im} \{ \ln G(\tau, \xi) \} = \pi$, если $\xi \leq \tau$, $\operatorname{Im} \{ \ln G(\tau, \xi) \} = 0$, если $\xi > \tau$, то нетрудно показать, что

$$(4.4) \quad \operatorname{Re} \int_{-a}^1 F(\zeta, \tau) d\zeta = \cos \pi \kappa \int_{-a}^1 \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \ln |G(\tau, \xi)| d\xi - \pi x(\tau, t) \sin \pi \kappa$$

Приравнивая правые части (4.3) и (4.4), находим

$$\int_{-a}^1 \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \ln |G(\tau, \xi)| d\xi = \frac{\pi}{\cos \pi \kappa} \left[x(\tau, t) \sin \pi \kappa + \frac{V(a+\tau)(1-\tau)}{a^{1-\kappa}} \right]$$

С помощью последнего равенства и функции (2.4) выражение (4.2) для поперечной силы можно привести к виду

$$(4.5) \quad Y = \frac{\rho l}{2} \int_{-a}^1 \left(l \frac{\dot{g}(\tau)}{2} - U g(\tau) \right) L(\tau) d\tau$$

$$(4.6) \quad L(\tau) = \frac{4\tau}{a^{2(1-\kappa)} \cos \pi \kappa} \left[\left(\frac{a+\tau}{1-\tau} \right)^{1-2\kappa} \sin \pi \kappa - \left(\frac{a+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2-\kappa} \right]$$

При $\kappa=1/2$ функция (4.6) содержит неопределенность, раскрывая которую получаем

$$L(\tau)|_{\kappa=1/2} = \frac{4\tau}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}$$

5. Подсасывающая и продольная сила. На проникающее тело у его вершины в общем случае будет действовать концентрированная подсасывающая сила, которая может быть найдена по формуле Л. И. Седова [3]

$$X_{\Pi} + iY_{\Pi} = -\frac{i\rho}{2} \oint_{z=-l} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz = -\frac{i\rho}{4} \oint_{\zeta=0} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial \zeta(z, t)}{\partial z} d\zeta$$

Воспользовавшись функциями (2.1) и (2.5), находим

$$(5.1) \quad X_{\Pi} = -\frac{\rho l}{2\pi a^{2(1-\kappa)}} \left[\int_{-a}^1 g(\tau) \left(\frac{a+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2-\kappa} d\tau \right]^2, \quad Y_{\Pi} = 0$$

Введем продольную силу X' как проекцию результирующей силы на ось x'

$$(5.2) \quad X' = X_{\Pi} + \int_{AOB} (p-p_0) dy' = X_{\Pi} + \int_{-a}^1 (p-p_0) \beta(x-x_0) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi$$

С помощью функций (3.4) и (2.3) интеграл (5.2) можно представить в виде суммы трех интегралов

$$X' = X_{\Pi} + X_1 + X_2 + X_3$$

$$(5.3) \quad X_1 = -\frac{\rho}{U} \int_{-a}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} g(\xi) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} d\xi$$

$$(5.4) \quad X_2 = -\rho \int_{-a}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \beta(x-x_0) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi$$

$$(5.5) \quad X_3 = \frac{\rho}{U} \int_{-a}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} q(\xi) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} d\xi$$

$$(5.6) \quad q(\xi) = g(\xi) - U\beta(x-x_0) = U\Omega - (x(\xi) - x_0)\omega - V$$

Нетрудно убедиться, что на интервале $(-a, 1)$ действительной оси ξ мнимая часть функции $-1/2(\partial w(\zeta, t)/\partial \zeta)^2 \partial \zeta(z, t)/\partial t$ совпадает с подынтегральной функцией (5.3) и вне интеграла равна нулю. Кроме того, на бесконечности эта функция обращается в нуль третьего порядка и имеет простой полюс в начале координат. Поэтому

$$X_1 = -\frac{\rho}{4U} \operatorname{Im} \oint_{\zeta=0} \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\zeta = \frac{\rho l}{2\pi a^{2(1-\kappa)}} \left[\int_{-a}^1 g(\tau) \left(\frac{a+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2-\kappa} d\tau \right]^2$$

Следовательно, $X_{\Pi} + X_1 = 0$.

Поскольку функция $q(\xi)$ на всем интервале непрерывна, то можно проинтегрировать (5.5) по частям

$$X_3 = -\frac{\rho}{l} \int_{-a}^1 \varphi(\xi, t) [q(\xi) - \omega x(\xi)] \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi$$

Объединяя теперь с интегралом (5.4), получаем для продольной силы следующую расчетную формулу:

$$X' = X_2 + X_3 = \frac{\rho l}{2} \int_{-a}^1 \int_{-a}^1 Q(\tau, \xi) R(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

$$Q(\tau, \xi) = l\dot{g}(\tau)\beta(\xi) - g(\tau)[U\beta(\xi) - q(\xi) + \omega x(\xi)]$$

$$R(\tau, \xi) = \frac{2\tau\xi \ln|G(\tau, \xi)|}{\pi a^{2(1-\kappa)}(a+\tau)^\kappa(1-\tau)^{1-\kappa}(a+\xi)^\kappa(1-\xi)^{1-\kappa}}$$

Чтобы найти составляющую результирующей на действительную ось неподвижной системы координат, достаточно в подынтегральную функцию (5.2) вместо β подставить $\beta + \Omega$. Следовательно, $X = X' - \Omega Y$. Аналогично можно найти сопротивление тела как составляющую результирующей на направление вектора скорости: $D = X' - (\Omega - V/U)Y$.

6. Момент результирующей силы. Момент гидродинамических сил относительно начала неподвижной системы координат

$$M = - \int_{AOB} (p - p_0) x(\xi, t) \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi$$

После интегрирования по частям получаем

$$(6.1) \quad M = \frac{\rho}{2\pi a^{1-\kappa}} \int_{-a}^1 \int_{-a}^1 (3Ug(\tau) - l\dot{g}(\tau)) \frac{\partial x^2(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\ln|G(\tau, \xi)| \tau d\tau d\xi}{(a+\tau)^\kappa(1-\tau)^{1-\kappa}}$$

Пользуясь методикой, изложенной в п. 4, можно интегрирование по переменной ξ выполнить в замкнутом виде. Вместо рассмотренной в п. 4 функции $F(\zeta, t)$ здесь необходимо использовать функцию $e^{2\pi\kappa i} \ln G(\tau, \xi) \cdot \partial z^2(\zeta, t)/\partial \zeta$. Опуская промежуточные преобразования, приведем окончательную формулу для момента

$$(6.2) \quad M = \frac{\rho l^2}{2} \int_{-a}^1 \left[Ug(\tau) - \frac{l}{3} \dot{g}(\tau) \right] K(\tau) d\tau$$

$$(6.3) \quad K(\tau) = \frac{3\tau}{a^{3(1-\kappa)} \cos 2\pi\kappa} \left[(a+\tau)^{2-3\kappa} (1-\tau)^{3\kappa-1} \sin 2\pi\kappa - \left(\tau + \frac{3(1-2\kappa)}{2\kappa} \right) \left(\frac{a+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2-\kappa} \right]$$

При $\kappa=1/4$ формула (6.3) после освобождения от неопределенности принимает вид

$$K(\tau) |_{\kappa=1/4} = \frac{\tau}{\pi 3^{3/4}} \left[(3+\tau) \ln \frac{3+\tau}{1-\tau} - 4 \right] \left(\frac{3+\tau}{1-\tau} \right)^{1/4}$$

7. Клин с прямолинейными щеками. Для клина с прямолинейными щеками

$$(7.1) \quad \beta(x-x_0) = \alpha_1, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad \beta(x-x_0) = \alpha_2, \quad -a \leq \xi \leq 0$$

где α_1 и α_2 — углы наклона к оси x щек клина OB и OA соответственно (фиг. 4). При поступательном движении (параллельно оси x ($\omega = \Omega = V = 0$)) все расчетные формулы (4.5), (5.1), (5.6) и (6.2) могут быть представлены в виде

$$(7.2) \quad Y = \frac{\rho l}{2} \left(\frac{W}{2} - U^2 \right) (I_1 \alpha_1 + I_2 \alpha_2)$$

$$X = \frac{\rho l}{2} (U^2 - W) \left(\frac{I_1 \alpha_1^2 + I_2 \alpha_2^2}{2} + I_3 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \right)$$

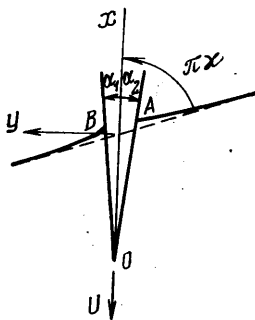
$$X_{\Pi} = -\frac{\rho U^2 l}{2} (I_4 \alpha_1 + I_5 \alpha_2)^2, \quad M = \frac{\rho l^2}{2} \left(U^2 - \frac{W}{3} \right) (I_6 \alpha_1 + I_7 \alpha_2)$$

$$I_1 = \int_0^1 L(\tau) d\tau, \quad I_3 = \int_{-a}^0 \int_0^1 R(\tau, \xi) d\tau d\xi$$

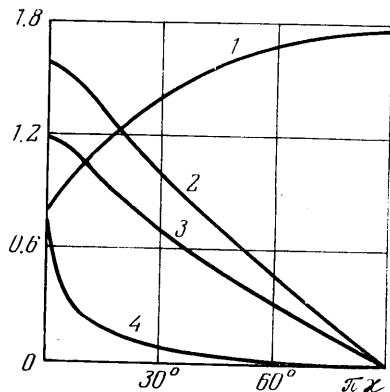
(7.3)

$$I_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi} a^{1-\kappa}} \int_0^1 \left(\frac{a+\tau}{1-\tau} \right)^{1/2-\kappa} d\tau, \quad I_6 = \int_0^1 K(\tau) d\tau$$

Коэффициенты I_2 , I_5 и I_7 вычисляются соответственно по формулам для I_1 , I_4 и I_6 с той лишь разницей, что пределы интегрирования $-a \leq \tau \leq 0$. Путем сведения



Фиг. 4



Фиг. 5

к бета-функциям нетрудно показать, что

$$I_1 + I_2 = 2(I_4 + I_5)^2 = \frac{2\pi}{a^{2(1-\kappa)} \cos^2 \pi\kappa} \left(\frac{1-2\kappa}{2\kappa} \right)^2$$

$$I_6 + I_7 = \frac{\pi(1-2\kappa)(16\kappa^2 - 16\kappa + 3)}{8a^{3(1-\kappa)} \kappa^3 \cos \pi\kappa \cos 2\pi\kappa}$$

Интегралы в (7.3) с помощью замены $\tau = 1 - (1+a)u$ могут быть выражены через гипергеометрические функции

$$I_1 = \frac{4}{(1-\kappa)^{2(1-\kappa)} \cos \pi\kappa} \left\{ \frac{2\kappa^{1/2-\kappa}}{1+2\kappa} ((1-\kappa)F_1 - F_2) + \frac{\sin \pi\kappa}{2\kappa} (F_4 - (1-\kappa)F_3) \right\}$$

$$I_4 = \frac{2\sqrt{\kappa}}{\sqrt{\pi}(1+2\kappa)(1-\kappa)^{1-\kappa}} F_1$$

$$I_6 = \frac{3}{(1-\kappa)^{3(1-\kappa)} \cos 2\pi\kappa} \left\{ \frac{F_6 - (1-\kappa)F_5}{3\kappa} \sin 2\pi\kappa + \right.$$

$$\left. + \kappa^{1/2-2\kappa} \left[\frac{(1-4\kappa)(1-\kappa)}{1+2\kappa} F_1 + F_2 - \frac{2F_7}{1+2\kappa} \right] \right\}$$

$$F_1 = F(\kappa + 1/2, \kappa - 1/2; \kappa + 3/2; \kappa), \quad F_2 = F(\kappa + 1/2, \kappa - 3/2; \kappa + 3/2; \kappa)$$

$$F_3 = F(2\kappa, 2\kappa - 1; 2\kappa + 1; \kappa), \quad F_4 = F(2\kappa, 2\kappa - 2; 2\kappa + 1; \kappa)$$

$$F_5 = F(3\kappa, 3\kappa - 2; 3\kappa + 1; \kappa), \quad F_6 = F(3\kappa, 3\kappa - 3; 3\kappa + 1; \kappa)$$

$$F_7 = F(\kappa + 1/2, \kappa - 5/2; \kappa + 3/2; \kappa)$$

В пределе при $\kappa \rightarrow 0$ имеем $I_1 = I_3 = I_4 = I_6 = 0$, $I_2 = \pi/2$, $I_5 = \sqrt{\pi}/2$, $I_7 = 3\pi/8$. Этот предельный случай соответствует гидродинамической задаче глассирования пластины на поверхности воды, причем изменяется лишь положение передней кромки, а задняя кромка остается неподвижной.

Ниже для некоторых значений угла входа $\pi\kappa$ в градусах представлены числовые значения коэффициентов I_n .

$\pi\kappa$	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
0	0.0000	1.5708	0.0000	0.0000	0.8862	0.0000	1.1781
5	0.1482	1.6717	0.0084	0.1823	0.7716	0.1431	1.2776
10	0.2726	1.6929	0.0200	0.2504	0.7410	0.2565	1.2946
20	0.4785	1.6835	0.0437	0.3360	0.7037	0.4319	1.2836
30	0.6454	1.6467	0.0651	0.3929	0.6776	0.5636	1.2534
40	0.7855	1.5977	0.0831	0.4355	0.6561	0.6680	1.2169
50	0.9062	1.5419	0.0977	0.4695	0.6368	0.7540	1.1775
60	1.0124	1.4811	0.1089	0.4979	0.6187	0.8272	1.1363
70	1.1074	1.4162	0.1167	0.5224	0.6009	0.8910	1.0933
80	1.1938	1.3471	0.1214	0.5442	0.5829	0.9481	1.0481
90	1.2732	1.2732	0.1230	0.5642	0.5642	1.0000	1.0000

В случае перпендикулярного входа ($\kappa = 1/2$) все интегралы в (7.2) вычисляются в замкнутом виде

$$(7.4) \quad Y = \rho l (U^2 - 2U^2) (\alpha_1 + \alpha_2) / \pi$$

$$(7.5) \quad X = \rho l (U^2 - U^2) [1/2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \ln 2] / \pi$$

$$(7.6) \quad X_{II} = -\rho l U^2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 / 2\pi, \quad M = 1/6 \rho l^2 (3U^2 - U^2) (\alpha_1 + \alpha_2)$$

Отметим некоторое несоответствие выражения (7.5) с соответствующими формулами из работ [1, 2], которое объясняется тем, что в [2] сопротивление клина вычислено без учета подсосывающей силы X_{II} , а в работе [1] в формулу для сопротивления симметричного клина вкралась ошибка.

На фиг. 5 представлены кривые зависимости коэффициентов поперечной силы $C_y=2Y/\rho U^2 l$, сопротивления $C_x=2X/\rho U^2 l$, подсосывающей силы $C_{\Pi}=2X_{\Pi}/\rho U^2 l$ и момента $C_M=2M/\rho U^2 l^2$ от угла входа α при проникании симметричного клина ($\alpha_1=-\alpha_2=\alpha$) с постоянной поступательной скоростью ($U=\text{const}$). Кривые 1-4 соответствуют C_x/α^2 , C_y/α , $-C_M/\alpha$ и $-C_{\Pi}/\alpha^2$.

Пусть частично погруженное в жидкость тонкое тело совершает поступательное движение параллельно оси y ($U=\omega=0$, $V(t)\neq 0$, $l=\text{const}\neq 0$). В этом случае $g(\tau)=-q(\tau)=-V$ и формулы (4.5), (5.1), (5.6) и (6.2) для гидродинамических реакций принимают вид

$$Y=-1/4\rho l^2\dot{V}(I_1+I_2), \quad X_{\Pi}=-1/4\rho l V^2(I_1+I_2)$$

$$(7.7) \quad X = X' = X_{\Pi} + \frac{\rho l^2 \dot{V}}{4} \int_{-a}^1 \beta(x(\tau)L(\tau) d\tau, \quad M=1/6\rho l^3 \dot{V}(I_6+I_7)$$

Нетрудно заметить, что форма тела влияет лишь на продольную силу (7.7). В частности, для клина (7.1) из (7.7) следует:

$$X=X_{\Pi}+1/4\rho l^2\dot{V}(I_1\alpha_1+I_2\alpha_2)$$

Приведем также асимптотические формулы для клина при $\kappa\rightarrow 0$

$$Y=-\pi\rho l^2\dot{V}/8, \quad X_{\Pi}=-\pi\rho l^2 V^2/8, \quad X=X_{\Pi}-Y\alpha_2, \quad M=\pi\rho l^3\dot{V}/16$$

Этот случай отвечает медленному погружению пластины, расположенной на поверхности под углом α_2 к свободной поверхности.

Поступила 10 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагомонян А. Я. Проникание. М., Изд-во МГУ, 1974.
2. Yim B. Investigation of gravity and ventilation effects in water entry of thin foils. В кн. «Неустановившиеся течения воды с большими скоростями». М., «Наука», 1973.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.