

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ПРОЦЕССА ЗАПУСКА ГАЗОВОГО ПОДШИПНИКА

И. И. ШИДЛОВСКАЯ, В. П. ШИДЛОВСКИЙ

(Москва)

Дается вывод уравнений для неустановившегося режима газовой смазки в неизотермических условиях. Описывается численное решение уравнения Рейнольдса для задачи об импульсивном запуске радиального подшипника с фиксированной геометрией, приводятся результаты этого решения.

Решению плоской задачи о газовой смазке в стационарных условиях посвящен ряд работ, обзор которых можно найти в [1-3]. Учет неизотермичности смазочного слоя можно выполнить, пользуясь методикой [4, 5]. С точки зрения динамических нагрузок более напряженными могут быть нестационарные режимы работы газового подшипника, например разгон до заданной величины относительной скорости граничных поверхностей. Вывод уравнения Рейнольдса для нестационарного движения, данный в [6] применительно к изотермическому газовому слою, обобщается ниже на случай неизотермического слоя. На примере задачи об импульсивном запуске радиального подшипника с фиксированной геометрией описывается численное решение уравнения Рейнольдса с помощью метода циклической прогонки [7]. Анализ результатов численных расчетов показывает, что при достаточно больших характеристических числах  $\Lambda$  установление давления происходит немонотонно и имеет колебательный характер, тогда как при малых  $\Lambda$  немонотонность проявляется лишь в начальный период разгона и установление осуществляется быстрее.

1. Рассмотрим плоское неустановившееся движение вязкого и теплопроводного газа, имеющего постоянные теплоемкости  $c_p$  и  $c_v$  и число Прандтля  $\sigma$ . В декартовых координатах уравнения Навье - Стокса для такого движения, дополненные уравнением состояния и уравнением зависимости вязкости от температуры, имеют вид

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \text{Sh} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \\
 & \text{Re} \rho \left( \text{Sh} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\text{Re}}{\kappa M^2} \frac{\partial p}{\partial x} = \\
 & = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
 & \text{Re} \rho \left( \text{Sh} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\text{Re}}{\kappa M^2} \frac{\partial p}{\partial y} = \\
 & = \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
 & \text{Re} \sigma \rho \left( \text{Sh} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \text{Re} \sigma \left( \text{Sh} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \\
 & = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial h}{\partial y} \right) + (\kappa - 1) \sigma M^2 \left\{ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\}
 \end{aligned}$$

$$p = \rho h, \quad \mu = h^n$$

где  $\text{Re}$  — число Рейнольдса,  $\text{Sh}$  — число Струхала,  $M$  — число Маха,  $\kappa = c_p/c_v$ .

Уравнения (1.1) записаны в безразмерной форме в предположении существования характерного линейного размера  $R$ , характерных скорости  $U$ , энтальпии  $h_0 = c_p T_0$ , давления  $p_0$ , плотности  $\rho_0$ , вязкости  $\mu_0$  и времени  $t_0$ .

В задачах газовой смазки характерный размер по оси  $y$  (средний зазор подшипника), обозначаемый  $\delta_0$ , обычно намного меньше продольного размера  $R$ , и в дополнение ко введенным выше безразмерным параметрам вводятся также

$$(1.2) \quad \varepsilon = \delta_0/R, \quad \Lambda = \kappa M^2/\varepsilon^2 \text{Re} = U \mu_0 R/\delta_0^2 p_0$$

Последняя величина в (1.2), называемая характеристическим числом газового подшипника, играет решающую роль при определении несущей способности подшипника.

Проведем в (1.1) преобразование переменных

$$(1.3) \quad y = \varepsilon Y, \quad v = \varepsilon V$$

Введем далее следующие допущения о величине безразмерных параметров задачи:

$$\text{Re} = O(1), \quad \text{Sh} = O(1), \quad \sigma = O(1), \quad \Lambda = O(1), \quad \kappa = O(1)$$

и найдем предельную форму уравнений (1.1) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , заметив предварительно, что в силу (1.2)  $M = O(\varepsilon)$ . Получим

$$(1.4) \quad \text{Sh} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V)}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( h^n \frac{\partial u}{\partial Y} \right) = \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial Y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( h^n \frac{\partial h}{\partial Y} \right) = 0, \quad p = \rho h$$

Уравнения (1.4) существенно проще уравнений (1.1), что облегчает их численное исследование.

Если рассматривается задача о запуске подшипника, то уравнениям (1.4) соответствуют начальные и граничные условия

$$(1.5) \quad \begin{aligned} p &= 1; & t &= 0 \\ u &= 1, & h &= 1, & V &= 0; & t > 0, & Y = 0 \\ u &= 0, & h &= \chi, & V &= \text{Sh} \delta \delta / \delta t; & t > 0, & Y = \delta \end{aligned}$$

где  $\chi$  — температурный фактор,  $\chi = T_{Y=\delta} / T_{Y=0}$ .

Отметим, что форма уравнений (1.4) и условий (1.5) не изменяется в зависимости от того, является ли характерная скорость  $U$  постоянной или заданной функцией времени, если только при любом  $t$  производная  $U'(t)$  остается конечной.

Пользуясь условиями (1.5), из (1.4) можно получить аналитические выражения для  $h$  и  $u$  в виде

$$(1.6) \quad h = \left[ (\chi^{n+1} - 1) \frac{Y}{\delta} + 1 \right]^{1/(n+1)}$$

$$u = \frac{(n+1)\delta^2}{(n+2)(\chi^{n+1}-1)^2 \Lambda} \frac{\partial p}{\partial x} \left[ h^{n+2} - \frac{\chi^{n+2}-1}{\chi-1} h + \frac{\chi(\chi^{n+1}-1)}{\chi-1} \right] + \frac{\chi-h}{\chi-1}$$

Выражения (1.6) подставляются в первое из уравнений (1.4), где вводится замена  $\rho = p/h$ , а затем все члены уравнения интегрируются по  $Y$  в пределах от 0 до  $\delta$ . В результате получается уравнение для определения давления, называемое обычно по имени Рейнольдса и в рассматриваемом случае принимающее форму

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta^3 p \frac{\partial p}{\partial x} \right) - A(\chi) \Lambda \frac{\partial}{\partial x} (\delta p) = D(\chi) \Lambda \text{Sh} \frac{\partial}{\partial t} (\delta p)$$

$$A(\chi) = \frac{2(n+2)(\chi^{n+1}-1)[\chi^{n+1}-1-(n+1)(\chi-1)]}{(n+1)[n(\chi^{n+2}-1)-(n+2)\chi(\chi^n-1)]}$$

$$D(\chi) = \frac{2(n+2)(\chi-1)(\chi^n-1)(\chi^{n+1}-1)}{n(\chi^{n+2}-1)-(n+2)\chi(\chi^n-1)}$$

Как уже указывалось выше, уравнение (1.7) решается с единственным начальным условием ( $p=1$  при  $t=0$ ), а граничные условия для давления, не приведенные в (1.5), могут быть различными в зависимости от формы и других особенностей подшипника. Для радиального подшипника, соответствующего схеме на фиг. 1, должно выполняться условие периодичности решения

$$(1.8) \quad p(x, t) = p(x + 2\pi, t)$$

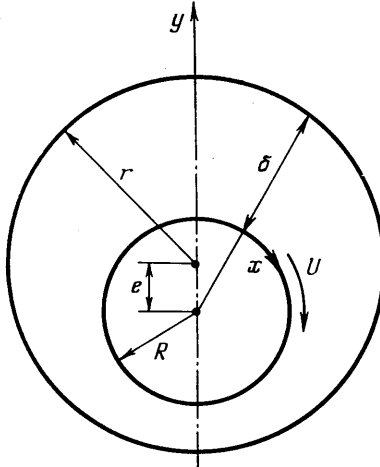
Кроме того, полная масса газа в зазоре не должна зависеть от времени, т. е.

$$Q = \int_0^{\delta} \int_0^{\delta} \rho dY dx = \int_0^{\delta} p(x, t) \left[ \int_0^{\delta} h^{-1} dY \right] dx = \text{const}$$

Интеграл в квадратных скобках вычисляется с помощью подстановки первой из формул (1.6), в результате чего условие сохранения массы принимает форму

$$(1.9) \quad \int_0^{2\pi} p(x, t) \delta(x, t) dx = \text{const}$$

Следует отметить, что условие (1.9) автоматически удовлетворяется в силу уравнения (1.7), если только выполнено условие периодичности (1.8). Действительно, зазор радиального подшипника  $\delta(x, t)$  должен обладать свойством периодичности согласно определению. Интегрируя обе части (1.7) по  $x$  в пределах от 0 до  $2\pi$ , получим эквивалент условия (1.9) в форме  $dQ/dt=0$ .



Фиг. 1

2. Итак, задача о неустановившемся движении газа в смазочном слое сводится к решению уравнения Рейнольдса (1.7), так как при известном давлении  $p$  все остальные гидродинамические параметры выражаются аналитически через функцию  $p(x, t)$  и ее производные. Вид уравнения (1.7) и начальное условие для давления не зависят от геометрии подшипника, а также от вида функции  $U(t)$ . Температурный фактор  $\chi$  в общем случае должен быть постоянным.

Рассмотрим подробнее задачу о запуске радиального подшипника с неизменной геометрией, когда  $\partial\delta/\partial t=0$  и

$$(2.1) \quad \delta = 1 + \eta \cos x$$

Здесь  $\eta$  — относительный эксцентриситет ( $\eta = \text{const}$ ).

Рассмотрим также наиболее напряженный режим запуска, а именно — импульсивный запуск, когда в момент времени  $t=0$  скорость подвижной поверхности скачкообразно возрастает от нуля до фиксированного значения  $U$ . В этом случае значение  $\Lambda$  в уравнении (1.7) постоянно,  $Sh = \text{const} = 1$ .

При заданных параметрах  $\Lambda$ ,  $\chi$  и  $\eta$  уравнение (1.7) решается при условиях

$$(2.2) \quad p(x, 0) = 1, \quad p(x, t) = p(x + 2\pi, t)$$

Задача свелась к нелинейной периодической задаче теории теплопроводности, аналитическое решение которой в общем случае невозможно. В качестве основной разностной схемы для численного расчета примем чисто явную схему, а учет нелинейности, обусловленной «коэффициентом теплопроводности», проведем с помощью итераций, предложенных в [8]. Тогда, если обозначить индексом  $i$  значения, соответствующие  $i$ -му узлу пространственной сетки, в рамках одной итерации на каждом временном слое уравнение (1.7) аппроксимируется системой разностных уравнений

$$(2.3) \quad a_i p_{i-1} - c_i p_i + b_i p_{i+1} = -f_i \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

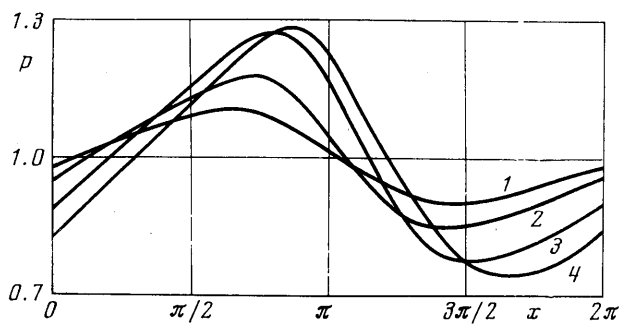
Наличие условий (2.2) позволяет применить к решению системы (2.3) метод циклической прогонки [7]. Как показано в [8], принятая разностная схема абсолютно устойчива независимо от выбора шагов по пространству и времени, однако для обеспечения устойчивого счета методом прогонки необходимо выполнить некоторые дополнительные требования. В данном случае эти требования сводятся к удовлетворению неравенств

$$(2.4) \quad l < [A(\chi)\Lambda]^{-1}, \quad \tau < D(\chi)A^{-1}(\chi)\eta^{-1}$$

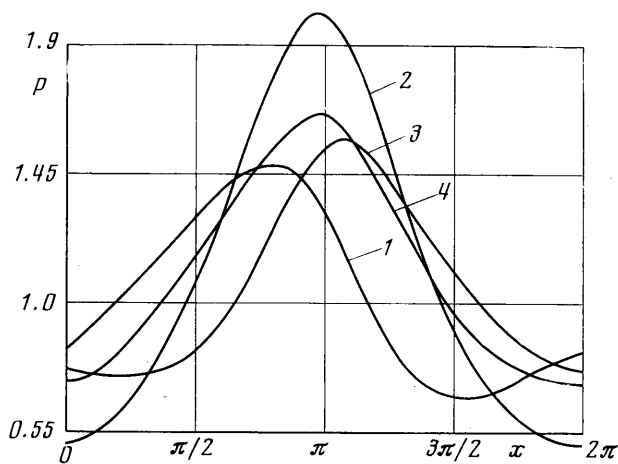
где  $l$  — шаг по пространственной координате,  $\tau$  — шаг по времени.

Создается впечатление, что первое из условий (2.4) является очень сильным и иногда трудно выполнимым. Однако рассматривать случаи  $\Lambda l > 100$  не имеет смысла по двум причинам: 1) эта область значений  $\chi$  и  $\Lambda$  лежит за пределами интересов практики, 2) примерно при  $\Lambda l = 100$  достигается критический режим, и дальнейшее повышение  $\Lambda l$  уже не влияет на динамические характеристики подшипника.

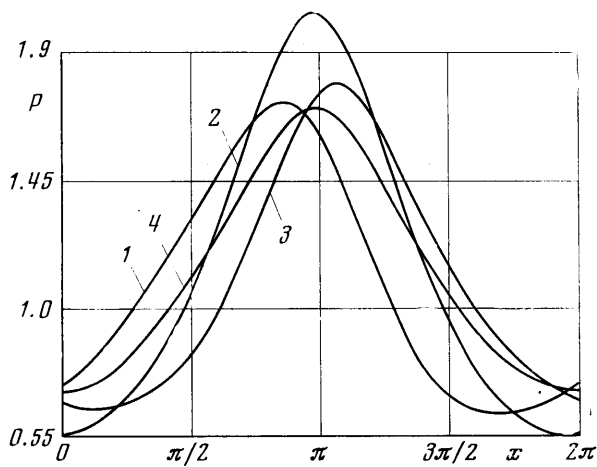
Расчеты проводились для радиального подшипника с фиксированной геометрией при  $\eta = 0.4$ . Значения  $n$  и  $\chi$  также были фиксированными,  $n = 0.75$ ,  $\chi = 2$ , а характе-



Фиг. 2



Фиг. 3

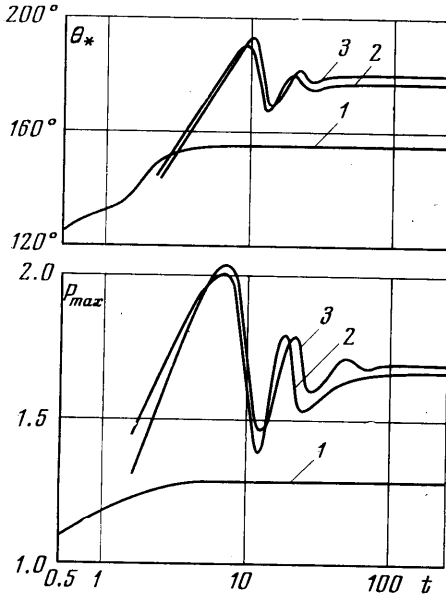


Фиг. 4

ристическое число подшипника варьировалось в пределах  $0.1 \leq \Lambda \leq 10$ . Как упоминалось выше, на каждом временном шаге приходится выполнять несколько итераций. Число итераций зависит от величины обоих шагов, а также от числа  $\Lambda$ . В ходе расчетов выяснилось, что для большинства рассмотренных случаев было вполне достаточно двух итераций, третья итерация требовалась только при принятии большого шага по времени (порядка единицы).

На фиг. 2–4 показаны кривые распределения давления в зависимости от пространственной координаты для различных моментов времени. Фиг. 2 соответствует значению  $\Lambda=0.1$ , цифрами обозначены кривые для следующих значений безразмерного времени: 1— $t=0.5$ , 2— $t=1.0$ , 3— $t=2.0$ , 4— $t \geq 3.6$ . На фиг. 3 показаны кривые для  $\Lambda=1.0$ , для времен: 1— $t=2$ , 2— $t=6$ , 3— $t=10$ , 4— $t \geq 190$ . На фиг. 4— $\Lambda=10.0$ , значения времени: 1— $t=3$ , 2— $t=6$ , 3— $t=9$ , 4— $t \geq 225$ .

Для любого из трех выбранных значений  $\Lambda$  кривая распределения давления с течением времени асимптотически приближается к предельной форме, соответствующей стационарному режиму. Однако сам процесс приближения имеет довольно сложный характер и при разных значениях  $\Lambda$  идет по-разному. Во всех случаях существует сравнительно короткий начальный период разгона, за время которого эпюра давления, представленная в начале прямой линией  $p=1$ , приобретает характерную форму, причем максимальное значение  $p_{\max}$  становится несколько больше, чем в предельном стационарном режиме, и реализуется при другом значении угловой координаты  $\theta_*$ . При малых  $\Lambda$  эти «колебания» давления затухают сравнительно быстро и выход на стационарный режим происходит уже монотонно, тогда как при  $\Lambda=0(10)$  колебания продолжают выльоть до приближения к предельной эпюре.



Фиг. 5

На фиг. 5 показаны графики изменения со временем значений  $p_{\max}=p(\theta_*)$  и  $\theta_*$ , иллюстрирующие вышеупомянутые тенденции к колебаниям давления. Цифрами обозначены кривые для разных значений параметра  $\Lambda$ : 1— $\Lambda=0.1$ , 2— $\Lambda=1$ , 3— $\Lambda=10$ . Отметим, что уменьшение шагов по координате и времени не приводит к сглаживанию колебаний, и поэтому можно полагать, что природа их чисто гидродинамическая. Весьма возможно, что при достаточно большом (хотя и конечном)  $\Lambda$  установление вообще не будет иметь места и колебательный режим движения сохранится неограниченно долго.

Поступила 20 XII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Constantinescu V. N. Lubrificatia cu gaze. Buc., Ed. Acad. RPR, 1963.
2. Gross W. A. Gas film lubrication. New York — London, Wiley, 1962.
3. Шейнберг С. А., Жедь В. П., Шишеев М. Д. Опоры скольжения с газовой смазкой. М., «Машиностроение», 1969.
4. Шидловская И. И. Некоторые задачи теории газовой смазки с учетом температурных изменений. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5.
5. Шидловская И. И. Постановка и решение задач о газовой смазке подшипников скольжения при больших поперечных перепадах температуры. Rev. Roumaine Sci. Techn. Ser. Mecanique Appl., 1966, t. 11, No. 1.
6. Langlois W. E. Isothermal squeeze films. Quart. Appl. Math., 1962, vol. 20, No. 2.
7. Абрамов А. А., Андреев В. Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 2.
8. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.