

Из выражения (5) видно, что в координатной плоскости  $\alpha$ Re кривая нейтральных возмущений состоит из оси  $\alpha=0$  и кривой, соответствующей обращению в нуль фигурной скобки. В точке разветвления нейтральной кривой имеем

$$(6) \quad R_m^* = R_m^* \frac{1-\delta}{1+2\delta}, \quad R_m^* = 5/6 \operatorname{ctg} \gamma \quad (\delta \geq 0)$$

где  $R_m^*$  — минимальное критическое число Рейнольдса течения ньютоновской жидкости.

Из (6) видно, что вращение частиц оказывает дестабилизирующее влияние на течение слоя, а внутренние моментные напряжения в первом приближении по  $\delta$  на критерии устойчивости не влияют.

Поступила 13 IV 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т. Об устойчивости течения слоя вязкой жидкости с моментными напряжениями на наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
2. Иванилова Ю. П. Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
3. Chia Shun Yih. Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3. (Рус. перев.: Устойчивость течения жидкости, стекающей по наклонной плоскости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1963, № 5).
4. Grad H. Statistical mechanics, thermodynamics and fluid dynamics of systems with arbitrary number of integrals. Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 4.
5. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметрическая гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.

УДК 532.51

### УДАР КАПЛИ ПО ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Л. ГОНОР, В. Я. ЯКОВЛЕВ

(Москва)

Получено численное решение нестационарной задачи о прямом соударении жидкой капли цилиндрической формы с жесткой поверхностью. Показано, что нестационарное взаимодействие ударных волн и волн разрежения внутри капли приводит к возникновению обширных зон кавитации, способствующей разлету капли.

Удар жидкости о твердую стенку изучался экспериментально и теоретически [1-6]. Экспериментальные результаты [1, 2] носят в основном качественный характер и не дают представления о количественных характеристиках процесса соударения. Теория получила наибольшее продвижение в [3], в которой проведено численное исследование прямого столкновения капли с жесткой стенкой. Задача решалась методом маркеров, что позволяло следить за движением свободной поверхности и учитывать значительные деформации среды. Однако результаты этой работы были подвергнуты резкой критике (см. дополнение к [3]), так как противоречили физической картине явления. В частности, давление, вычисленное для цилиндрической капли, нигде и ни в какой момент времени не совпадало с давлением в одномерном случае, тогда как в действительности вблизи центра удара имеют место в течение некоторого времени одномерные условия. Более точное решение было получено для начального этапа прямого столкновения неограниченной струи с жесткой стенкой в [4]. При решении этой задачи методом [7] авторы ограничились рассмотрением движения до момента прихода волны разрежения в центр контактной поверхности.

Предварительный анализ соударения с большой скоростью жидкостей типа воды показывает, что необходимо учитывать сжимаемость жидкости и можно пренебречь влиянием объемных сил, вязкостью и поверхностным натяжением по сравнению с давлением и силами инерции, т. е. использовать модель идеальной сжимаемой жидкости.

Систему уравнений движения, энергии и уравнение состояния жидкости запишем в общепринятой форме

$$\rho + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} \right) = 0$$

$$(1) \quad \rho \dot{u} = - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \rho \dot{v} = - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\dot{E} = - \frac{P}{\rho} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} \right)$$

$$(2) \quad P = a(w-1) + b(w-1)^2 + c\rho E$$

Здесь  $x, y$  — пространственные координаты ( $x$  — ось симметрии);  $u$  и  $v$  — компоненты скорости;  $P$  — гидростатическое давление;  $\rho$  — плотность;  $E$  — внутренняя энергия, приходящаяся на единицу массы;  $w = \rho/\rho_0$  — относительный объем. Точка над переменными означает полную производную по времени.

Постоянные  $a, b, c$  подбираются из условия наилучшей аппроксимации ударной адиабаты жидкости выражением (2) и равны соответственно следующим значениям:  $2.23 \cdot 10^9$ ,  $3.94 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup> и 2.85. Это выражение справедливо в области положительных давлений.

Известно, что в большинстве жидкостей отсутствуют большие отрицательные напряжения, что обусловлено наличием в них так называемых слабых мест или зародышей кавитации. Многие экспериментаторы измеряли предельные растягивающие напряжения в жидкостях, используя как статические, так и динамические методы. Наибольшие значения предельного давления для воды, равные 250—280 атм, получены в [8]. В [9] делается попытка объяснить результаты [8] на основе теории градиентов давлений в микрополостях. С помощью этой теории получено значение предельного давления 23 атм для воды. Согласно [10] для водопроводной и морской воды критическое постоянное давление, ниже которого размеры каверны в жидкости неограниченно увеличиваются, отличается от давления водяного пара на малую величину, которой обычно пренебрегают.

С другой стороны, заметный рост пузырьков в жидкости происходит за интервал времени, который может оказаться много большим, чем характерное время процесса соударения, тогда ослабление напряжения в жидкости за счет роста каверны происходит медленнее падения давления. Существование этого явления подтверждается в [11], где отмечается, что критическая величина давления, при котором в жидкости возникают каверны, существенно зависит от скорости создания метастабильного состояния и наличия в жидкости твердых частиц, активизирующих процессы кавитации. Эти же результаты следуют из анализа, проведенного в [12], где рассматривается динамика роста газового пузыря в жидкости, вызванного кратковременным импульсом. Используя методы [12], можно показать, что время роста каверны в воде от размера  $D_0$  до размера  $D_1$  можно оценить, воспользовавшись соотношением

$$(3) \quad t_p = \left\{ \frac{4D_1\sigma}{\rho D_0^4} \left( \frac{8P_0}{3\rho D_0^2} \right)^{-1.25} \right\}^{2/3}$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $P_0$  — абсолютная величина отрицательного давления в среде. Отсюда видно, что в быстрых процессах могут достигаться низкие критические значения  $P_1$ , близкие к максимальным экспериментальным значениям ( $P_1 = 280$  атм).

Соотношение для отрицательных значений давления с учетом сказанного можно записать в виде

$$(4) \quad P = a(w-1) (P > -P_1), \quad P = -P_1 (P \leq -P_1)$$

Система (1), (2), (4) дополняется начальными и граничными условиями.

Определяющими параметрами соударения являются скорость удара  $u_0$ , диаметр капли  $D_0$  (в расчетах высота цилиндра принималась равной диаметру) и механические характеристики жидкости  $\rho_0, a, b, c, P_1$ . Все переменные преобразуются к безразмерному виду с помощью следующих характерных величин:  $\rho_0, u_0, D_0/u_0, \rho_0 u_0^2$ .

Численное интегрирование системы (1), (2), (4) проводится по явной разностной схеме, предложенной в [13].

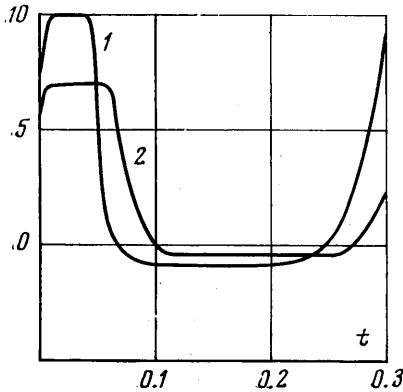
Разностная сетка, покрывающая каплю, задается последовательностью координат ее узлов:  $(x, y)_{kl}$ ;  $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $l = 0, 1, \dots, m$ . После соединения отрезки прямых соседних узлов сетки образуются два семейства ломаных, из которых одно получается путем

соединения точек с фиксированным индексом  $k$ , а другое — с фиксированным индексом  $l$ . Они разрезают расчетную область на  $n \times m$  ячеек. Таким образом, геометрически ячейка представляет собой четырехугольник с прямолинейными границами и характеризуется своими гидродинамическими величинами  $\rho, P, E$ , а также геометрическими величинами — площадью  $s$  и относительным объемом  $w$ . Каждому узлу соответствуют координаты  $x_{kl}, y_{kl}$  и скорости  $u_{kl}, v_{kl}$ .

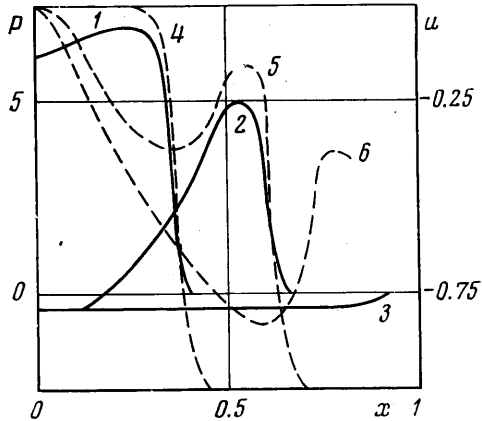
Вводится также некоторый механизм сглаживания разрывов, которые имеют место при возникновении ударных волн. Следуя [14], используется квадратичная искусственная вязкость, что приводит к замене величины  $P$  в системе (1), (2), (4) на  $P+q$ , где

$$q=4\rho(\dot{\rho}/\rho)^2s(\dot{\rho}>0), \quad q=0 \quad (\dot{\rho}\leq 0)$$

Принимается следующий порядок расчета на данном шаге по времени. По состоянию гидродинамических величин рассчитываются ускорения в каждой вершине четырехугольной ячейки. Эти ускорения используются для вычисления узловых скоростей. Узлы передвигаются в новое положение, отвечающее моменту времени  $t+\tau$



Фиг. 1



Фиг. 2

Определяется поле давлений и вычисляются внутренняя энергия ячеек. Одновременно выбирается значение нового шага по времени  $\tau$ , обеспечивающее устойчивость счета. Необходимо, чтобы  $\tau$  удовлетворяло следующим неравенствам:

$$\tau < \frac{\rho l^2}{16\rho s}, \quad \tau < \sqrt{\left(\frac{4\rho s}{f}\right)^2 + \frac{\rho l^2}{f} - \frac{4\rho s}{f}} \quad (\rho > 0)$$

$$\tau < \sqrt{\frac{\rho l^2}{a}} \quad (\dot{\rho} \leq 0), \quad f = a + 2b(w-1) + cP$$

где  $l$  — характерный размер ячейки.

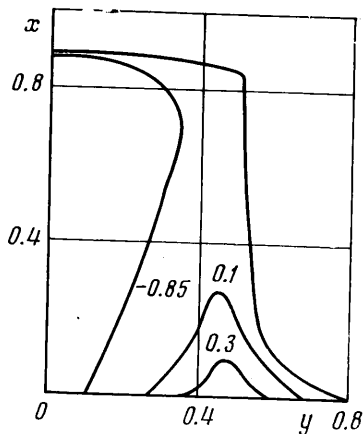
Результаты численного счета, представленные на фигурах, показывают, что процесс удара имеет ярко выраженный волновой характер со сложным взаимодействием осевых и радиальных волн сжатия и разрежения. На начальных стадиях удара вследствие внезапного замедления жидкости возникает большой градиент давления (фронт ударной волны). При этом ударный фронт, как и ожидалось, «размыт» на три ячейки. Такое явление, когда фронт волны имеет конечную ширину, характерно для схем с квадратичной искусственной вязкостью [14, 15].

На фиг. 1 линиями 1, 2 даны зависимости давления в центре зоны контакта от времени для значений числа Маха  $M$ , равных соответственно 0.12 и 0.2. Скорость звука считается равной 1500 м/сек. Давление возрастает практически мгновенно и равномерно распределяется по всей зоне контакта, за исключением внешней границы, где давление равно нулю. В центре зоны контакта до момента прихода волны разрежения выполняются одномерные условия. Давление в центре оказалось равным давлению, вычисленному по гидравлической теории: 10 для  $M=0.12$  и 7 для  $M=0.2$ .

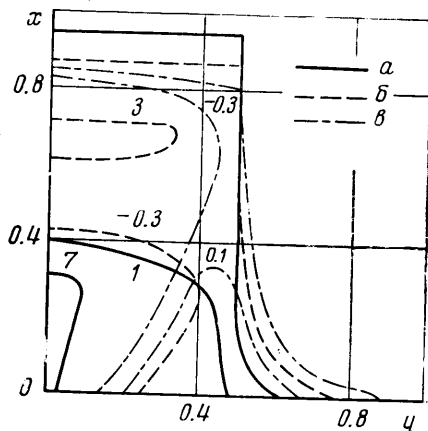
На фиг. 2 линиями 1—3 дана зависимость давления при  $M=0.2$  на оси симметрии от продольной координаты  $x$  для моментов времени, равных соответственно 0.054, 0.091, 0.191. Линиями 4—6 представлена зависимость продольной скорости на оси от координаты  $x$  для тех же моментов времени. Из этих зависимостей видно, что значе-

ние скорости распространения ударного фронта также совпадает с одномерными результатами до тех пор, пока волна разрежения не приходит к оси симметрии капли. В последующие моменты времени давление начинает убывать и становится отрицательным.

Наличие областей отрицательного давления приводит к возникновению кавитации и образованию каверн внутри капли. В работе [1] с помощью киносъемки в действительности обнаружены такие области. По-видимому, образование каверн препятствует понижению давления ниже критического значения. Для зародыша кавитации, который находится в 5-мм капле, соударяющейся с жесткой поверхностью при  $M=0.2$ , имеющего диаметр  $10^{-4}$  мм и вырастающего до размера 1 мм (такая каверна



Фиг. 3



Фиг. 4

видна невооруженным глазом), время роста под действием давления  $-P_1$ , как следует из соотношения (3), равно  $\sim 10^{-6}$  сек, что более чем в 2 раза меньше характерного времени процесса  $D_0/C_0$ , где  $C_0$  — скорость звука. Поскольку в каплях такого размера имеется несколько десятков зародышей кавитации [1], то за волной разрежения находится значительное число растущих каверн, рост которых препятствует понижению давления ниже величины  $-P_1$ .

На фиг. 1—4 линиями *a*, *б*, *в* представлены изобары и деформации первоначально цилиндрической капли ( $M=0.2$ ) в моменты времени 0.054, 0.126, 0.179 соответственно. После отрыва области сжатия от контактной поверхности фронт ударной волны продолжает двигаться в направлении верхнего торца капли. При этом интенсивность ударной волны падает вместе со скоростью ее распространения. Следом за ударным фронтом от поверхности контакта движется волна разрежения, ограничивающая снизу область сжатия. При движении области сжатия частицы жидкости тормозятся, причем это замедление движения тем сильнее, чем больше давление в области сжатия. Наиболее сильно жидкость тормозится у контактной поверхности, вблизи оси цилиндра, и менее — на периферии. В волне разрежения жидкость частично восстанавливает свою скорость (фиг. 2).

Область сжатия доходит до свободной поверхности в момент  $t=0.1$  для  $M=0.12$  и  $t=0.18$  для  $M=0.2$ , отражается, и от свободной поверхности начинает распространяться волна разрежения, которая смыкается с волной разрежения, идущей от контактной поверхности. В этот момент почти весь объем капли (за исключением периферийной области у контактной поверхности) находится под воздействием предельного давления. При этом во всем объеме капли находится значительное число сильно развитых каверн. Капля по существу представляет собой тонкую оболочку, наполненную паром (фиг. 3, 4). Как показывают экспериментальные данные [2], примерно к этому моменту времени происходит разбрызгивание капли на мелкие части.

На периферии контактной поверхности давление положительное. Это давление с течением времени растет. На фиг. 5 кривыми 1—3 даны зависимости радиальной скорости вдоль контактной поверхности ( $M=0.12$ ) от радиальной координаты соответственно в моменты времени 0.049, 0.096, 0.24. Вследствие роста давления возникает возвратное радиальное течение, в результате чего происходит схлопывание «кавитационной области» с резким (до трех раз по сравнению с одномерным) повышением давления (фиг. 1).

Расчеты проводились для сеток с  $n \times m = 15 \times 30$  и  $20 \times 40$ . Увеличение числа ячеек не привело к существенному изменению результатов. При увеличении числа ячеек возросла скорость достижения значения давления, соответствующего одномерным.

условиям, уменьшилась ширина ударного фронта, но всегда ударный фронт был «размыт» на три ячейки. Для оценки точности расчетов вычислялось значение полной энергии капли. Результаты расчета показали, что полная энергия капли в течение всего процесса соударения отличается на величину не более чем 0.5% от значения начальной энергии. Этот результат близок к результату, полученному в [16], где применялась подобная схема первого порядка точности. В [16] было получено, что полная энергия отличается не более чем на 0.1% от точного значения.

Представленные результаты частично согласуются качественно с результатами работы [4]. И здесь, и там давление за фронтом ударной волны совпадает со значением давления, полученного по одномерной гидравлической теории. Однако имеются и существенные различия. Скорость распространения ударной волны по результатам [4] совпадает со скоростью звука, хотя в начальный момент времени эта скорость должна быть равна  $C_0(1+2M)$  [3, 5]. Ширина ударного фронта в [4] составляет 5—8 расчетных ячеек, что, по-видимому, сказывается на точности расчетов.

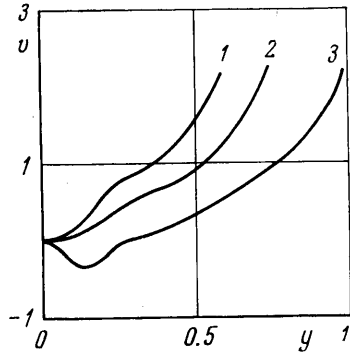
Таким образом, расчет соударения капли с жесткой поверхностью в рамках модели сплошной среды приводит к новому качественному выводу о возникновении кумулятивного эффекта, связанного со схлопыванием каверны при возвратно-радиальном движении жидкости и с повышением давления в зоне контакта в несколько раз по сравнению с одномерным ударом. Открытым остался вопрос: до какого момента времени справедливо гидродинамическое описание этого явления?

Авторы благодарны Л. Ф. Шайхатаровой за проведение расчетов.

Поступила 21 II 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Brunton T. H., Camus T. T. The flow of a liquid drop during impact. Proc. 3-rd Intern. Congr. on Rain Erosion, Aug. 1970.
2. Назаров О. И., Поваров О. А., Ятчени И. А. Удар капли о плоскую движущуюся пластину. Теплоэнергетика, 1975, № 4.
3. Хуанг, Хэммит, Янг. Гидродинамические явления при высокоскоростном соударении капли жидкости с жесткой плоскостью. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Теорет. основы инж. расчетов, 1973, т. 95, № 2.
4. Атанов Г. А., Уланов Н. Г., Уланова Т. Д. Численное решение задачи об ударе струи о преграду. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
5. Neumann F. J. High-speed impact between a liquid drop and a solid surface. J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, No. 13.
6. Перельман Р. Г., Плинер Л. А. Определение давления на пятне контакта и его диаметра при каплеударном воздействии. Изв. вузов, Энергетика, 1975, № 5.
7. Годунов С. К., Прокопов Г. П. Об использовании подвижных сеток в газодинамических расчетах. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2.
8. Briggs L. J. Limiting negative pressure of water. J. Appl. Phys., 1950, vol. 21, No. 7.
9. Finch R. D. Hole theory of cavitation nucleation. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 9.
10. Бэгчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
11. Trevena D. H. The stretching and superheating of liquids. Contemp. Phys., 1976, vol. 17, No. 2.
12. Се дин-ю. Рост пузырька в вязкой жидкости, вызванный кратковременным импульсом. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Теорет. основы инж. расчетов, 1970, т. 92, № 4.
13. Уилкинс М. Л. Расчет упругопластических течений. В сб. «Вычислительные методы в гидродинамике». М., «Мир», 1967.
14. Рихтмайер Р., Моргон К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1967.
15. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М., «Наука», 1975.
16. Wilkins M. L. Finite difference scheme for calculating problems in two dimensions and time. J. Comp. Phys., 1970, No. 5.



Фиг. 5