МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1977

УДК 532.5.013.4 : 532.135

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ НА НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

В. Т. МОРОЗОВ

(Куйбышев)

Устойчивость течения слоя жидкости на наклонной плоскости с учетом спина молекул и внутренних моментных напряжений рассматривалась в [1]. Однако в [1] допущен ряд ошибок, что приводит авторов к неверным качественным и количественным результатам. В данной работе устойчивость течения слоя относительно длинноволновых возмущений исследуется методом последовательных приближений [2, 3] при предположении, что коэффициент вращательной вязкости η_r значительно меньше коэффициента ньютоновской вязкости η. Показывается, что в первом приближении внутренние моментные напряжения не влияют на устойчивость движения, а вращение частиц оказывает дестабилизирующее действие на течение слоя относительно трехмерных периодических возмущений.

Воспользуемся уравнениями движения несжимаемой жидкости [4, 5] в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k}=0,\qquad \frac{dv_k}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x_k}+\frac{1+\delta}{\mathrm{Re}}\Delta v+\frac{2\delta}{\mathrm{Re}}[\nabla\times\omega]_k+f_k$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{ED}{\mathrm{Re}}\Delta\omega_k+\frac{ED_1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2\omega_l}{\partial x_k\,\partial x_l}-\frac{2\delta E}{\mathrm{Re}}[2\omega_k-(\nabla\times v)_k]\tag{1}$$

$$\delta=\frac{\eta_r}{\eta},\qquad E=\frac{h^2}{I},\qquad \mathrm{Re}=\frac{Uh\rho}{\eta},\qquad U=\frac{\rho g h^2\sin\gamma}{3\eta}$$

$$D=D_d+D_a$$

$$D_1=D_0+D_d-D_a,\qquad D_0=\frac{c_0}{\eta h^2},\qquad D_d=\frac{c_d}{\eta h^2},\qquad D_a=\frac{c_a}{\eta h^2}$$

$$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right\},\qquad \Delta=\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right\}$$

$$f_1=\frac{3}{\mathrm{Re}},\qquad f_2=\frac{3\,\mathrm{ctg}\,\gamma}{\mathrm{Re}},\qquad f_3=0$$

где f_1, f_2, f_3 — безразмерные проекции силы тяжести на оси безразмерных декартовых координат x_1, x_2, x_3. Проекции вектора угловой скорости отнесены к величине U/h; давление p, время t, координаты x_1, x_2, x_3 — соответственно к величинам ρU^{-1}, hU^{-1}, h; v_k (проекции скорости) отнесены к величине U; ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести; γ — угол наклона плоскости, по которой стекает жидкость, h — толщина слоя, I — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы; c_0, c_d, c_a — коэффициенты моментной вязкости [5]. Безразмерные компоненты тензора силовых напряжений τ_{kj} и компоненты тензора моментных напряжений удовлетворяют соотношениям

$$\tau_{kj}=-p\delta_{kj}+\pi_{kj}{}^d+\pi_{kj}{}^a,\qquad \pi_{kj}{}^d=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right)$$

$$\pi_{kj}{}^a=\frac{\delta}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}-\frac{\partial v_k}{\partial x_j}-2\varepsilon_{kjl}\omega_l\right)$$

$$\mu_{kj}=\frac{D_0}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\omega_k}{\partial x_k}\delta_{kj}+\frac{D_d}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}+\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}\right)+\frac{D_a}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial x_k}-\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}\right)$$

При $v_1^\circ = v^\circ_1(x_2)$, $p^\circ = p^\circ(x_2)$, $\omega_3^\circ = \omega_3(x_2)$, $v_2^\circ = v_3^\circ = \omega_1^\circ = \omega_2^\circ = 0$ уравнения (1) сводятся к

$$(1+\delta)\frac{d^2v_1^\circ}{dx_2^2} + 2\delta\frac{d\omega_3^\circ}{ax_2} + 3 = 0$$

$$\frac{3\operatorname{ctg}\gamma}{\mathrm{Re}} - \frac{dp^\circ}{dx_2} = 0 \tag{2}$$

$$D\frac{d^2\omega_3^\circ}{dx_2^2} - 4\delta\omega_3^\circ - 2\delta\frac{dv_1^\circ}{dx_2} = 0$$

Общим решением уравнений (2) будут функции

$$v_1^\circ = -\frac{3}{2}x_2^2 - \frac{2\delta}{(1+\delta)m}[b_1 \operatorname{ch} mx_2 + b_2 \operatorname{sh} mx_2] - 2b_1x_2 + b_4$$

$$\omega_3^\circ = \frac{3}{2}x_2 + b_2 \operatorname{ch} mx_2 + b_1 \operatorname{ch} mx_2 + b_3 \tag{3}$$

$$p^\circ = b_5 + \frac{x_2}{\mathrm{Re}}\operatorname{ctg}\gamma, \qquad m = 2\left[\frac{\delta}{D(1+\delta)}\right]^{1/2}$$

Формулы (3) отличаются от соответствующих формул (1.3), приведенных в [1]. Непосредственной подстановкой выражений легко убедиться, что решения (1.3) не удовлетворяют уравнениям движения.

При определении b_i в (3) использовались условия равенства нулю моментных и касательных напряжений на поверхности слоя и условия полного прилипания на твердой плоскости $x_2=1$ [2]

$$\tau_{21}(0) = \mu_{23}(0) = 0, \quad \tau_{22} = -p_a, \quad v_1^\circ(1) = \omega_3^\circ(1) = 0.$$

В статье [1] вместо правильного условия на свободной поверхности $\tau_{21}(0)=0$ используется условие $\tau_{12}(0)=0$, что неэквивалентно из-за несимметричности тензора напряжений τ_{kj}.

В соответствии с вышеизложенным значения постоянных интегрирования в формулах (3) запишутся в виде

$$b_1 = -\frac{3}{2m}, \qquad b_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} m}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} m}{m} - 1\right)\right], \qquad b_3 = 0$$

$$b_4 = \frac{3}{2} + \frac{2\delta}{m(1+\delta)}(b_1 \operatorname{ch} m + b_2 \operatorname{sh} m), \qquad b_5 = p_a$$

Существенным является различие в разложении по малому δ поступательной скорости движения частиц $v_1^\circ(x_2)$, для которой, сохраняя линейные члены по δ, имеем

$$v_1^\circ = \frac{3}{2}(1-x_2^2) - \frac{3}{2}(1-x_2)\delta \tag{4}$$

Выражение (4) не зависит от D, в то время как в соответствующее разложение (3.4) [1] входят члены, зависящие от D. Именно это обстоятельство и изменяет как качественный, так и количественный вид критериев устойчивости. Следует отметить тот факт, что, хотя формулы для вращательного поля скоростей имеют разный вид в данной работе и в статье [1], разложения этих функций в ряды по малому δ с сохранением только линейных по δ членам совпадают

$$\omega_3^\circ = \frac{\delta}{D}(1-x_2^3)$$

Проделывая выкладки, аналогичные выкладкам, сделанным в п. 3 статьи [1], получим, что в области малых значений волнового числа α величина c_i имеет вид

$$c_i = \alpha\left\{\frac{6}{5}\mathrm{Re}(1+2\delta) - \frac{1}{3}(3\operatorname{ctg}\gamma + S'\alpha^2)(1-\delta)\right\} \tag{5}$$

Из выражения (5) видно, что в координатной плоскости $\alpha\mathrm{Re}$ кривая нейтральных возмущений состоит из оси $\alpha=0$ и кривой, соответствующей обращению в нуль фигурной скобки. В точке разветвления нейтральной кривой имеем

$$R^* = R_m^* \frac{1-\delta}{1+2\delta}, \qquad R_m^* = {}^5/_6 \operatorname{ctg}\gamma \qquad (\delta \geqslant 0) \tag{6}$$

где R_m^* — минимальное критическое число Рейнольдса течения ньютоновской жидкости.

Из (6) видно, что вращение частиц оказывает дестабилизирующее влияние на течение слоя, а внутренние моментные напряжения в первом приближении по δ на критерии устойчивости не влияют.

Поступила 13 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нгуен Ван Дьеп, Листров А. Т.* Об устойчивости течения слоя вязкой жидкости с моментными напряжениями на наклонной плоскости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
2. *Иванилов Ю. П.* Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
3. *Chia Shun Yih.* Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 3. (Рус. перев.: Устойчивость течения жидкости, стекающей по наклонной плоскости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1963, № 5).
4. *Grad H.* Statistical mechanics, thermodynamics and fluid dynamics of systems with arbitrary number of integrals. Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 4.
5. *Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Асимметрическая гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.

УДК 532.51

УДАР КАПЛИ ПО ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А. Л. ГОНОР, В. Я. ЯКОВЛЕВ

(Москва)

Получено численное решение нестационарной задачи о прямом соударении жидкой капли цилиндрической формы с жесткой поверхностью. Показано, что нестационарное взаимодействие ударных волн и волн разрежения внутри капли приводит к возникновению обширных зон кавитации, способствующей разлету капли.

Удар жидкости о твердую стенку изучался экспериментально и теоретически [1–6]. Экспериментальные результаты [1, 2] носят в основном качественный характер и не дают представления о количественных характеристиках процесса соударения. Теория получила наибольшее продвижение в [3], в которой проведено численное исследование прямого столкновения капли с жесткой стенкой. Задача решалась методом маркеров, что позволяло следить за движением свободной поверхности и учитывать значительные деформации среды. Однако результаты этой работы были подвергнуты резкой критике (см. дополнение к [3]), так как противоречили физической картине явления. В частности, давление, вычисленное для цилиндрической капли, нигде и ни в какой момент времени не совпадало с давлением в одномерном случае, тогда как в действительности вблизи центра удара имеют место в течение некоторого времени одномерные условия. Более точное решение было получено для начального этапа прямого столкновения неограниченной струи с жесткой стенкой в [4]. При решении этой задачи методом [7] авторы ограничились рассмотрением движения до момента прихода волны разрежения в центр контактной поверхности.

Предварительный анализ соударения с большой скоростью жидкостей типа воды показывает, что необходимо учитывать сжимаемость жидкости и можно пренебречь влиянием объемных сил, вязкостью и поверхностным натяжением по сравнению с давлением и силами инерции, т. е. использовать модель идеальной сжимаемой жидкости.