

О ВОСПЛАМЕНЕНИИ ГАЗА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ
У НАГРЕТОЙ ПЛАСТИНЫ

В. С. БЕРМАН, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

(Москва)

Задача о воспламенении движущейся гомогенной газобразной горючей смеси в пограничном слое около нагретой плоской полубесконечной пластины является одной из основных задач о поджигании горючей смеси в потоке (например, [1]). Формулировка задачи включает в себя двумерные уравнения движения и записанные с учетом химической реакции уравнения переноса тепла и реагирующего вещества, а также граничные условия и должна приводить к определению стационарных полей концентрации и температуры и тем самым положения зоны горения. Различные приближенные численные решения задачи проанализированы в [1-5]. Одной из важнейших характеристик процесса является длина зажигания — расстояние от края пластины до точки, в которой благодаря собственному химическому тепловыделению в газе поток тепла от пластины к газу становится равным нулю.

В данной работе для случая больших значений энергии активации химической реакции и достаточно большого различия температур стенки и потока получено приближенное выражение для длины зажигания.

1. Уравнения и граничные условия. В приближении пограничного слоя задача о стационарном ламинарном обтекании плоской нагретой пластины вязким теплопроводящим реагирующим газом с одностадийной экзотермической химической реакцией может быть при обычных упрощающих предположениях сформулирована в виде следующей системы уравнений и граничных условий

$$(1.1) \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$(1.2) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$(1.3) \quad \rho u \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{Q}{c_p} \rho^n k (1-Y)^n e^{-E/RT}$$

$$(1.4) \quad \rho u \frac{\partial Y}{\partial x} + \rho v \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D \rho \frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \rho^n k (1-Y)^n e^{-E/RT}$$

$$(1.5) \quad p = R \rho T = \text{const}$$

$$(1.6) \quad y=0, \quad u=v=\frac{\partial Y}{\partial y}=0, \quad T=T_w$$

$$(1.7) \quad y=\infty, \quad v=Y=0, \quad T=T_-, \quad u=u_-$$

$$(1.8) \quad x=0, \quad u=v=Y=0, \quad T=T_w, \quad (T_w - T_-)/T_w = 0 \quad (1)$$

Здесь $\rho(T)$ — плотность; x, y — продольная и поперечная координаты; u, v — продольная и поперечная составляющие скорости, T — температура, T_w — температура стенки, T_- — температура внешнего потока, p — давле-

ние, μ — динамическая вязкость, D — коэффициент диффузии, λ — теплопроводность, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, Q — тепловой эффект реакции, k — предэкспоненциальный множитель, E — энергия активации, n — порядок реакции, R — газовая постоянная.

Переходя от переменных x, y к переменным Дородницына [6] η, η , вместо (1.1) — (1.4) запишем

$$(1.9) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0$$

$$(1.10) \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

$$(1.11) \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda \rho \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + \frac{Q}{c_p} \rho^{n-1} k (1-Y)^n e^{-E/RT}$$

$$(1.12) \quad u \frac{\partial Y}{\partial x} + w \frac{\partial Y}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D^2 \rho \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right) + \rho^{n-1} k (1-Y)^n e^{-E/RT}$$

$$\eta = \int_0^y \rho dy', \quad w = u \int_0^y \frac{\partial \rho}{\partial x} dy' + \rho v, \quad w(x, 0) = 0 = w(0, \eta) = w(x, \infty).$$

Положим далее, что $\rho \mu = \text{const}$, $\lambda \rho = \text{const}$, $D \rho^2 = \text{const}$, $c_p = \text{const}$.

Тогда уравнения (1.9), (1.10) с соответствующими граничными условиями могут быть решены независимо от (1.11), (1.12). Распределение скоростей u, v определяется решением Блазиуса

$$(1.13) \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad z = \frac{1}{2} \eta \sqrt{\frac{u_-}{\mu \rho x}}$$

$$\psi(x, \eta) = \sqrt{x u_- \mu \rho} \varphi(z)$$

$$\varphi'' + \varphi \varphi' = 0, \quad \varphi'(\infty) = 2; \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad ()' = d/dz$$

Здесь $\varphi(z)$ — табулированная функция Блазиуса.

Переходя к безразмерным переменным, с учетом (1.13) уравнения (1.11), (1.12) и граничные условия (1.6) — (1.8) для температуры и концентрации реагирующего компонента представим в форме

$$(1.14) \quad U \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + W \frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial s^2} + \beta (1-Y)^n \Gamma(\vartheta) \exp \left[\frac{\beta(\vartheta-1)}{\vartheta+\sigma} \right]$$

$$(1.15) \quad U \frac{\partial Y}{\partial t} + W \frac{\partial Y}{\partial s} = \frac{1}{\text{Sc}} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \beta \gamma (1-Y)^n \Gamma(\vartheta) \exp \left[\frac{\beta(\vartheta-1)}{\vartheta+\sigma} \right]$$

$$(1.16) \quad t=0, \vartheta=Y=0$$

$$(1.17) \quad s=0, \vartheta=1, \partial Y/\partial s=0$$

$$(1.18) \quad s=\infty, \vartheta=Y=0$$

$$\vartheta = \frac{T-T_-}{T_w-T_-}, \quad U = \frac{u}{u_-}, \quad t = \frac{x}{A}, \quad A = \frac{u_- c_p (T_w-T_-)}{\beta Q \rho^{n-2} k} e^\beta$$

$$\beta = \frac{E}{RT_w}, \quad \Gamma(\vartheta) = \left(\frac{\rho}{\rho_w} \right)^{n-1}, \quad \sigma = \frac{T_-}{T_w-T_-}, \quad \gamma = \frac{(T_w-T_-) c_p}{Q}$$

$$\text{Le} = \text{Sc Pr}^{-1}$$

$$s = \eta \left(\frac{u_-}{A \rho \mu} \right)^{1/2}, \quad W = w \left(\frac{A}{\mu \rho u_-} \right)^{1/2}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \text{Sc} = \frac{\mu}{\rho D}$$

$$\Psi = \psi (A \rho \mu u_-)^{-1/2} = \sqrt{t} \varphi(z), \quad z = s/2\sqrt{t}$$

Соотношения (1.14) – (1.18) определяют распределения температуры и концентрации в пограничном слое. Газ с температурой T_0 , двигаясь вдоль пластины с температурой T_w , нагревается за счет кондуктивного теплообмена с пластиной и вследствие химического тепловыделения, которое с ростом температуры увеличивается. В некоторой точке – точке зажигания – интенсивность этих источников тепла выравнивается. При этом самая близкая к кромке пластины точка зажигания находится у поверхности пластины и ей соответствует нулевое значение градиента температуры по нормали к пластине.

Найдем приближенное выражение для длины зажигания – расстояния от кромки пластины до точки зажигания, – построив асимптотическое решение задачи (1.14) – (1.18) в области, предшествующей установлению баланса между теплопередачей от пластины и химическим тепловыделением. При анализе будем считать, что $\beta \gg 1$, а Pe , Sc , Γ , $d\Gamma/d\theta$, γ и σ по порядку величины равны единице.

2. Метод решения. Будем искать распределения температуры $\theta(t, s)$ в виде суммы

$$(2.1) \quad \theta(t, s) = \theta_i(t, s) + \Theta(t, s),$$

$$\theta_i(t, 1) = \theta_i(z) = \int_z^\infty (\varphi'')^{\text{Pr}} dz \left[\int_0^\infty (\varphi'')^{\text{Pr}} dz \right]^{-1}$$

где функция $\theta_i(t, s)$ есть решение задачи

$$(2.2) \quad U \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + W \frac{\partial \theta_i}{\partial s} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial s^2}$$

$$\theta_i(0, s) = \theta_i(t, \infty) = 0, \quad \theta_i(t, 0) = 1$$

Подставляя (2.1) в (1.14) – (1.18) для функции $\Theta(t, s)$, получим

$$(2.3) \quad U \frac{\partial \Theta}{\partial t} + W \frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial s^2} + \beta(1-Y)^n \Gamma(\theta) \exp \left[\frac{\beta(\theta-1)}{\theta+\sigma} \right]$$

$$(2.4) \quad U \frac{\partial Y}{\partial t} + W \frac{\partial Y}{\partial s} = \frac{1}{\text{Sc}} \frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \beta \gamma (1-Y)^n \Gamma(\theta) \exp \left[\frac{\beta(\theta-1)}{\theta+\sigma} \right]$$

$$(2.5) \quad \Theta(0, s) = Y(0, s) = \Theta(t, 0) = \partial Y(t, 0) / \partial s = Y(t, \infty) = \Theta(t, \infty) = 0$$

Приняв во внимание наличие в задаче малого параметра $\beta^{-1} \ll 1$, разобьем всю область $0 \leq s < \infty$ на прилегающую к пластине внутреннюю область, в которой введем переменную $\xi = s/\beta$ и внешнюю область. Будем искать асимптотическое решение задачи (2.3) – (2.5) в каждой из областей соответственно в виде внутренних и внешних разложений

$$(2.6) \quad \Theta(t, s) = \beta^{-1} \Theta_1^*(t, \xi) + \dots, \quad Y(t, s) = Y_0^*(t, \xi) + \beta^{-1} Y_1^*(t, \xi) + \dots$$

$$(2.7) \quad \Theta(t, s) = \beta^{-1} \Theta_1(t, s) + \dots, \quad Y(t, s) = Y_0(t, s) + \dots$$

Внутренние разложения должны удовлетворять условиям на поверхности пластины $t=0$ и $\xi=0$ ($s=0$), а внешние – условиям вне пограничного

слоя при $t=0$ и $s=\infty$. Кроме того, внешние и внутренние разложения должны удовлетворять условиям срачивания [7, 8].

Рассмотрим сначала задачу во внутренней области.

Во внутренних переменных t, ξ имеем

$$(2.8) \quad \vartheta_i(t, \xi/\beta) = 1 - \xi/\beta \sqrt{t} a + o(\beta^{-1})$$

$$(2.9) \quad a(\text{Pr}) = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty (\varphi'')^{\text{Pr}} dz \right]^{-1} / \varphi''(0) \Big]^{\text{Pr}} \simeq 0.332 \sqrt[3]{\text{Pr}}$$

Последнее равенство получено с учетом численных расчетов [9].

Подставляя разложения (2.6), (2.8) в (2.3), (2.4) и приравнявая члены при одинаковых степенях β , с учетом (2.5) получим

$$(2.10) \quad \frac{\partial^2 \Theta_1^*}{\partial \xi^2} + \text{Pr}(1 - Y_0^*)^n \exp\left(\frac{\Theta_1^* - \xi a/\sqrt{t}}{1 + \sigma}\right) = 0$$

$$\Theta_1^*(0, \xi) = \Theta_1^*(t, 0) = 0$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 Y_0^*}{\partial \xi^2} = 0, \quad Y_0^*(0, \xi) = \frac{\partial Y_0^*}{\partial \xi}(t, 0) = 0$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial^2 Y_1^*}{\partial \xi^2} + \text{Sc} \gamma (1 - Y_0^*) \exp\left(\frac{\Theta_1^* - \xi a/\sqrt{t}}{1 + \sigma}\right) = 0$$

$$Y_1^*(0, \xi) = \frac{\partial Y_1^*}{\partial \xi}(t, 0) = 0$$

Решение задачи (2.10) – (2.12), удовлетворяющее условию срачивания с решением во внешней области, имеет вид

$$(2.13) \quad \Theta_1^*(t, \xi) = \frac{ax}{\sqrt{t}} + (1 + \sigma) \left[\ln C_2 - 2 \ln \text{ch} \left(C_1 + x \sqrt{\frac{C_2}{2(1 + \sigma)}} \right) - n \ln(1 - Y_0^*) \right]$$

$$Y_0^*(t, \xi) = Y_0^*(t), \quad Y_0^*(0) = 0$$

$$Y_1^*(t, \xi) = \gamma \text{Le} \left[\Theta_1^*(t, \xi) - \left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \xi \right] + Y_1^*(t)$$

$$Y_1^*(0) = 0, \quad C_1 = C_1(t) = \ln \left[\sqrt{\frac{C_2}{(1 - Y_0^*)^n}} + \sqrt{\frac{C_2}{(1 - Y_0^*)^n} - 1} \right]$$

$$C_2 = C_2(t) = \frac{a^2}{2(1 + \sigma)t}$$

Подставляя (2.7) в (2.3) – (2.5), с учетом условия асимптотического срачивания с (2.13) получим уравнения и граничные условия для распределения температуры и концентрации во внешней области

$$(2.14) \quad U \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} + W \frac{\partial \Theta_1}{\partial s} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial s^2}$$

$$\Theta_1(t, 0) = (1 + \sigma) [\ln C_2 - 2C_1 + \ln 4 - n \ln(1 - Y_0^*)] \equiv F(t)$$

$$\Theta_1(t, \infty) = \Theta_2(0, s) = 0$$

$$(2.15) \quad U \frac{\partial Y_0}{\partial t} + W \frac{\partial Y_0}{\partial s} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial^2 Y_0}{\partial s^2}$$

$$Y_0(t, 0) = Y_0^*(t), Y_0(0, s) = 0, Y_0(t, \infty) = 0$$

$$\frac{\partial Y_0(t, 0)}{\partial s} =$$

$$= -\frac{\gamma Le a}{\sqrt{t}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2t(1+\sigma)}{a^2} [1 - Y_0^*(t)]^n} \right] \equiv \Phi(t, Y_0^*(t))$$

Уравнения и условия (2.14), (2.15), в которых зависимости $C_1(t)$, $C_2(t)$ определяются формулами (2.13), позволяют найти функции $\Theta(s, t)$, $Y_0(s, t)$ и $Y_0^*(t)$ и построить асимптотическое решение во внутренней и внешней областях.

Условие равенства нулю потока тепла от пластины к газу, которое определяет длину зажигания, может быть записано в виде

$$(2.16) \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)_{s=0} = -\sqrt{2(1+\sigma)} C_2 \operatorname{th} C_1 = 0$$

Здесь C_2 и C_1 выражаются через Y_0^* по формулам (2.13).

В частном случае, когда выгоранием реагента можно пренебречь ($Y(s, t) = 0$), задача сводится только к анализу распределения температуры, и решение во внутренней области $\Theta_1^*(t, \xi)$ полностью определяется формулами (2.13). При этом условии отсутствия потока тепла от пластины к газу принимает вид

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right)_{s=0} = -\sqrt{2(1+\sigma)} (C_2 - 1) = 0$$

В точке $t_* = a^2/2(1+\sigma)$ поток тепла обращается в нуль. С учетом (2.9) для длины зажигания можно записать

$$(2.17) \quad t_* = 0.055 \operatorname{Pr}^{2/3} / (1+\sigma)$$

Можно убедиться, что в этом частном случае решение $\Theta_1^*(t, \xi)$ существует лишь при $1 < C_2 \leq \infty$, или $0 < t \leq t_*$.

Продолжая рассмотрение с учетом выгорания, перейдем в (2.14), (2.15) от переменных s, t к переменным Мизеса t, Ψ

$$(2.18) \quad \frac{\partial \Theta_1}{\partial t} = \frac{1}{\operatorname{Pr}} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial \Theta_1}{\partial \Psi} \right), \quad \Theta_1(t, 0) = F(t)$$

$$\Theta_1(t, \infty) = \Theta_1(0, \Psi) = 0$$

$$(2.19) \quad \frac{\partial Y_0}{\partial t} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \frac{\partial Y_0}{\partial \Psi} \right), \quad Y_0(t, 0) = Y_0^*(t)$$

$$Y_0(0, \Psi) = Y_0(t, \infty) = 0$$

$$\frac{\partial \Psi(t, 0)}{\partial s} \frac{\partial Y_0(t, 0)}{\partial \Psi} = \Phi(t, Y_0^*(t))$$

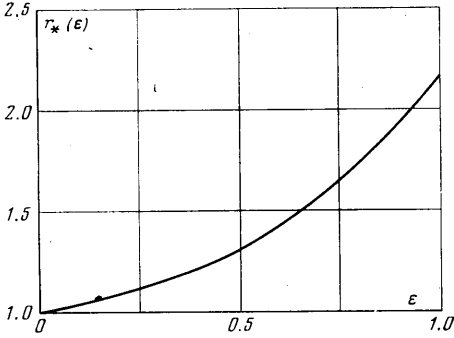
Построим приближенное аналитическое решение задачи (2.18), (2.19), заменив функции Ψ и $\partial \Psi / \partial s$ первыми членами разложений этих функций по s . Из теории диффузионного пограничного слоя известно, что такая замена приводит к асимптотически точным результатам при больших значениях параметров Pr и Sc . Численная проверка метода в сходных задачах показала его пригодность и при $\operatorname{Pr} \sim O(1)$, $Sc \sim O(1)$ [⁹⁻¹¹].

Примем, что

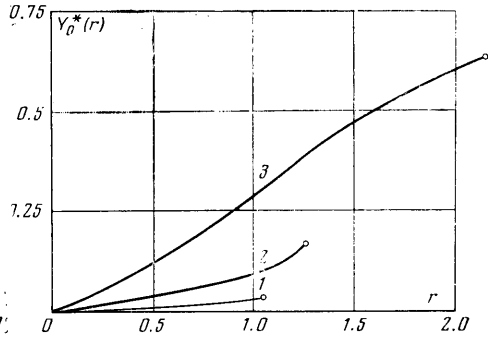
$$(2.20) \quad \Psi(t, s \rightarrow 0) \cong \frac{\varphi''(0)}{8} \frac{s^2}{\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s}(t, s \rightarrow 0) \cong \frac{\varphi''(0)}{4} \frac{s}{\sqrt{t}}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \sqrt{\Psi} \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{2}} t^{-1/4}$$

Так как функция $Y_0^*(t)$, знание которой необходимо для определения длины зажигания из (2.16), может быть найдена из решения задачи (2.19), далее ограничимся анализом (2.19).



Фиг. 1



Фиг. 2

Подставив (2.20) в (2.19) и введя новую переменную, можно записать

$$(2.21) \quad \frac{\partial Y_0}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\sqrt{\Psi} \frac{\partial Y_0}{\partial \Psi} \right), \quad \tau = \frac{4}{3} Sc^{-1} \sqrt{\frac{\varphi''(0)}{2}} t^{3/4}, \quad t = D\tau^{4/3}$$

$$(2.22) \quad Y_0(\tau, 0) = Y_0^*(\tau), \quad Y_0(\tau, \infty) = 0, \quad Y_0(0, \Psi) = 0$$

$$(2.23) \quad \sqrt{\varphi''(0)/2} D^{-1/4} \tau^{-1/4} \lim_{\Psi \rightarrow 0} (\sqrt{\Psi} \partial Y_0 / \partial \Psi) = \Phi(\tau, Y_0^*(t))$$

Методом преобразования Лапласа из (2.21), (2.22) найдем

$$(2.24) \quad Y_{0L}(p, \Psi) = Y_{0L}^*(p) \Psi^{1/4} [I_{-1/2}({}^4/3 p^{1/2} \Psi^{3/4}) - I_{1/2}({}^4/3 p^{1/2} \Psi^{3/4})] \Gamma(2/3) (2/3 p^{1/2})^{1/3}$$

Здесь $f_L(p, \Psi) = p \int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau, \Psi) d\tau$, I_ν — модифицированные функции

Бесселя, Γ — гамма-функция.

С учетом (2.24) имеем

$$(2.25) \quad \lim_{\Psi \rightarrow 0} \sqrt{\Psi} \frac{\partial Y_{0L}}{\partial \Psi} = -\frac{Y_{0L}^* \Gamma(2/3)}{2 \Gamma(4/3)} \left(\frac{2}{3} p^{1/2} \right)^{2/3}$$

Обращая преобразование (2.25) и используя результат в (2.23), приходим к следующему уравнению для функции $Y_0^*(t)$:

$$(2.26) \quad \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r-r'}} \frac{d}{dr'} Y_0^*(r') dr' = \frac{\varepsilon}{r^{1/3}} \left\{ 1 - \sqrt{1 - r^{4/3} [1 - Y_0^*(r)]^2} \right\}$$

$$Y_0^*(0) = 0, \quad r = [2(1+\sigma)]^{3/4} a^{-3/2} t^{3/4}, \quad \varepsilon = 0.39\gamma Le^{2/3}$$

Здесь при записи числового коэффициента в выражении для ε использованы значения гамма-функции и значение $\varphi''(0) = 1.332$.

Анализ показывает, что решение задачи (2.26) существует на интервале $0 < r < r_*$ ($0 < t < t_*$). При этом в точке $r = r_*$, где $Y_0^*(r_*) = 1 - r_*^{-4/3n}$, выполняется условие (2.16), поэтому величина t^* является безразмерной длиной зажигания. Значения r_* как функций параметров ε и n , найденные путем численного интегрирования задачи (2.26) по методу [11], показаны на фиг. 1 для $n=1$. На фиг. 2 приведены результаты расчета функции $Y_0^*(r, \varepsilon, n)$ для значений $n=1$, $\varepsilon=0.1, 0.5, 1.0$ (кривые 1-3 соответственно). В размерных переменных выражение для длины зажигания имеет вид

$$(2.27) \quad x_* = 0.055 \frac{c_p (T_w - T_-)^2 R}{Q \rho^{n-1}} \frac{R}{kE} \exp \frac{E}{RT_w} u_- \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^{2/3} f^{1/3}(\varepsilon, n)$$

$$\varepsilon = 0.39 Q^{-1} (T_w - T_-) c_p Le^{2/3}$$

Авторы благодарят В. М. Шевцову за помощь при проведении расчетов.

Поступила 9 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Щетинков Е. С. Физика горения газов. М., «Наука», 1965.
2. Вильямс Ф. А. Теория горения. М., «Наука», 1971.
3. Sharma O. P., Sirignano W. A. On the ignition of a premixed fuel by a hot projectile. *Combust. Sci. and Technol.*, 1970, vol. 1, p. 481.
4. Зельдович Я. Б. К теории зажигания. Докл. АН СССР, 1973, т. 150, № 6.
5. Берман В. С., Рязанцев Ю. С. К анализу задачи о тепловом распространении пламени методом сращиваемых асимптотических разложений. ПММ, 1972, т. 36, № 4.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., Гостехиздат, 1957.
7. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
8. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
9. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
10. Stewartson K. The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. Oxford, Clarendon Press, 1964.
11. Акривос, Шамбре. Ламинарный пограничный слой с реакциями на поверхности. В сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций». Изд-во иностр. лит., 1962.