

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА СТОЛКНОВЕНИЙ УРАВНЕНИЯ
БОЛЬЦМАНА И ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ**

И. Н. КОЛЫШКИН, А. Я. ЭНДЕР, И. А. ЭНДЕР

(Ленинград)

Работа посвящена дальнейшему развитию метода решения уравнения Больцмана, основанного на разложении по максвелловским распределениям (максвеллианам). Расчет интеграла столкновений состоит из двух этапов — вычисления интеграла столкновений от двух максвеллианов и его последующего разложения по максвеллианам. Предлагается специальная численная процедура аппроксимации функций одной и двух переменных конечным числом экспонент. При этом минимизируется средне-квадратичное отклонение точной и приближенной функций и достигается совпадение некоторого числа моментов от этих функций.

Для модели твердых шаров интеграл столкновений от двух максвелловских распределений представляется набором из 24 δ -функций во всем рассматриваемом диапазоне параметров. Методом Эйлера решается задача о выравнивании скоростей и температур в газе («квазишок») и задача о резонансной перезарядке ионов на атомах. Проводится оценка точности полученных решений.

1. Одна из основных трудностей при решении уравнения Больцмана — расчет интеграла столкновений. В настоящее время для численного решения кинетического уравнения в основном используются или метод Монте-Карло, или переход к модельным уравнениям. Оба эти направления не обеспечивают необходимой точности, особенно для построения функции распределения по скоростям, и не имеют строгого обоснования.

В работах [1-4] обсуждались основные идеи предлагаемого здесь метода интегрального преобразования уравнения Больцмана. В качестве базисных функций выбирались максвелловские распределения с произвольными средними скоростями и температурами. По ним разлагались как функция распределения, так и интеграл столкновений от двух максвеллианов (максвелловских распределений)

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) &= \int M(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \varphi(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{r}, t) d\alpha d\mathbf{u} \\
 M(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (\alpha / \pi)^{3/2} \exp(-\alpha(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2) \\
 nI^M &= \text{Re } l_+^M - \text{Re } l_-^M \\
 \text{Re } l_{\pm}^M &= \int M(\alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}) A_{\pm}(\alpha, \mathbf{u}, \alpha_1, \mathbf{u}_1, \alpha_2, \mathbf{u}_2) d\alpha d\mathbf{u}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь $\alpha = m / (2kT)$ — обратная температура, а \mathbf{u} — средняя скорость максвелловского распределения. Уравнение Больцмана заменялось эквивалентным ему уравнением

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{r}} &= \\
 = \int A(W, W_1, W_2) \varphi(W_1, \mathbf{r}, t) \varphi(W_2, \mathbf{r}, t) dW_1 dW_2 \\
 W &= (\alpha, u_x, u_y, u_z)
 \end{aligned}$$

Как отмечалось в [3], интеграл столкновений от двух максвеллианов является осесимметричной функцией относительно прямой u_1, u_2 , т. е. $I^M(v, W_1, W_2) = I^M(v_x, v_y, w_1, w_2)$, где w — пара чисел α, u_x . В [4] для модели твердых шаров построено ядро A в виде ряда по производным от δ -функций по u и некоторым обобщенным функциям от α . Такой вид ядра неудобен для численных расчетов. Однако оказалось, что с его помощью аналитически легко вычисляются моменты от интеграла столкновений I^M .

Вид I^M для модели твердых шаров известен. Интеграл прямых столкновений $\text{Re } l_-^M$ считается легко [4, 5], а интеграл обратных столкновений $\text{Re } l_+^M$ вычислен в [6]. Если перейти в систему отсчета с началом в точке $u_* = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) / (\alpha_1 + \alpha_2)$, то

$$(1.2) \quad \text{Re } l_{\pm}^M = \frac{\lambda^{3/2}}{\tau_0} \left[\frac{(1-\Delta)^2}{8\pi} (e^{R-Q} \sqrt{Q+R} \text{erf}(\sqrt{Q+R}) - e^{-R-Q} \sqrt{Q-R} \text{erf}(\sqrt{Q-R})) \right]$$

$$(1.3) \quad Q = \frac{1}{2}(V^2 + U_0^2), \quad R^2 = Q^2 - \frac{1-\Delta^2}{4} \left(V^2 - U_0^2 + \frac{2\Delta U_0 V_x}{\sqrt{1-\Delta^2}} \right)^2$$

$$(1.4) \quad \lambda = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \Delta = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\lambda}, \quad U_0 = \sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\lambda}} (u_1 - u_2)$$

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{\pi \alpha_1 \alpha_2}}{2n\sigma\sqrt{\lambda}} \quad V = \sqrt{\lambda} v, \quad V^2 = V_x^2 + V_y^2$$

В системе отсчета с началом в точке u_2 ($u_1 = 2U_0 / \sqrt{1-\Delta^2}$)

$$(1.5) \quad \text{Re } l_-^M = \frac{\lambda^{3/2}}{\tau_0} \left[\frac{(1+\Delta)^2}{8\pi} e^{-1/2(1+\Delta)(V-u_1)^2} \left(\frac{e^{-1/2(1-\Delta)V^2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1+(1-\Delta)V^2}{V\sqrt{2(1-\Delta)}} \text{erf} \left(V \sqrt{\frac{1-\Delta}{2}} \right) \right) \right]$$

Выберем за единицу температуры $1/\lambda$, а за единицу скорости $1/\sqrt{\lambda}$. Тогда

$$(1.6) \quad \text{Re } l_{\pm}^M = \frac{\lambda^{3/2}}{\tau_0} R_{\pm}(V_x, V_y, \Delta, U_0)$$

где R_{\pm} — выражения, стоящие в квадратных скобках (1.2), (1.5). Параметры Δ и U_0 меняются в области $-1 \leq \Delta \leq 1$, $-\infty < U_0 < \infty$. Будем рассматривать U_0 в диапазоне $|U_0| \leq 1.4$. Если рассмотреть два максвеллиана — один до, а другой после ударной волны, то их скорости и температуры связаны так, что $|U_0| \leq \sqrt{1.5}$, причем $|U_0| \rightarrow \sqrt{1.5}$ только при $M_{\infty} \rightarrow \infty$.

В работе [3] было показано, что разложение интеграла столкновений I^M сводится к обращению двукратного преобразования Лапласа. Однако получить численное обращение преобразования Лапласа с достаточной точностью затруднительно. С другой стороны, для расчетов удобно иметь дискретное представление I^M в виде конечного набора максвеллианов (δ -функций в α - u -пространстве).

2. Аппроксимация функции набором экспонент с произвольными весами и показателями представляет собой самостоятельную проблему.

Для ее решения был разработан специальный «дипольно-квадрупольный» метод. Основная его идея — последовательное подключение таких наборов δ -функций, которые не нарушают справедливости моментных соотношений, удовлетворенных на предыдущем шаге. При этом часть параметров этих δ -функций удовлетворяется из моментных соотношений, а часть — из минимизации среднего квадратичного отклонения приближенной функции от точной.

Напомним [4], что моменты от f в v -пространстве можно представить в виде линейной комбинации $A_{r,s}$, где

$$A_{r,s} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} u^r T^s \varphi(u, T) du dT$$

В дальнейшем будем называть моменты $A_{0,s}$ температурными, а $A_{r,0}$ скоростными. Если f сферически-симметрична, то ее моменты выражаются только через температурные моменты $A_{0,s}$.

Рассмотрим сначала сферически-симметричную функцию $f(|v|)$. Ее можно разложить по максвеллианам с различными температурами и нулевыми средними скоростями [1]

$$(2.1) \quad f(|v|) = \int M(T, |v|) \varphi(T) dT \quad \left(M(T, |v|) = \frac{e^{-v^2/T}}{(\pi T)^{3/2}} \right)$$

Будем искать $\varphi(T)$ в виде

$$\varphi(T) = \sum_{k=1}^N a_k \delta(T - T_k)$$

В качестве простейшего представления можно выбрать одну δ -функцию (монополь) с весом, равным норме функции, и с температурой, определяемой из моментного уравнения для энергии: $T_0 = A_{01} / A_{00}$. Таким образом, в этом приближении $\varphi_M = A_{00} \delta(T - T_0) = M_1(T_0)$.

В следующем, дипольном приближении монополь сохраняется с тем же весом, но его температура становится варьируемым параметром. При изменении T_0 меняется вклад от монополя в энергию A_{01} и другие моменты.

Рассмотрим функцию $\varphi_g = \varphi - \varphi_M$ с моментами $A_{0,s}^g = A_{0,s} - T_0^s A_{00}$. Очевидно, что функция φ_g не дает вклада в число частиц, т. е. $A_{00} = 0$. Предлагается φ_g представлять парой δ -функций с равными по величине и противоположными по знаку весами

$$\varphi_g(T) = a(\delta(T - T_* - h) - \delta(T - T_* + h)) = D(a, T_*, h)$$

Такую функцию назовем диполем. Величины a , T_* , h — соответственно амплитуда, центр и плечо диполя. Величину $d = ah$ назовем дипольным моментом. Диполь не дает вклада в число частиц и позволяет легко найти a и T_* из моментных уравнений для A_{01}^g и A_{02}^g :

$$a = 1/2 A_{01}^g / h, \quad T_* = 1/2 A_{02}^g / A_{01}^g.$$

В результате в этом приближении функция φ имеет вид $\varphi = \varphi_M + \varphi_g$. Три ее первых момента A_{00} , A_{01} , A_{02} совпадают с соответствующими моментами точной функции φ , и, кроме того, два параметра T_0 и h варьируются так, чтобы минимизировать среднее квадратичное отклонение $f - f_1$, где

$$f_1 = \int (\varphi_M + \varphi_g) M dT$$

На параметры T_0 и h накладываются следующие условия: $T_0 > 0$, $h > 0$. Такое приближение тремя δ -функциями с тремя точными моментами назовем дипольным.

Для построения следующего приближения нужно найти такую комбинацию δ -функций, которая не давала бы вклада в первые три момента и, кроме того, позволяла бы легко разрешить систему последующих моментных уравнений. Этим условиям удовлетворяют два диполя с противоположными по знаку и равными по величине дипольными моментами и общим центром T_{**} , т. е.

$$(2.2) \quad \varphi_k = \varphi - \varphi_m - \varphi_g = D(a_1, T_{**}, h_1) - D(a_2, T_{**}, h_2) = K(a_1, T_{**}, h_1, h_2)$$

$$(2.3) \quad a_1 h_1 = -a_2 h_2 = d$$

Назовем такой набор δ -функций квадруполем.

Квадруполь (2.2), (2.3) зависит от четырех переменных, три из которых T_{**} , a_1 , h_2 , как функции от h_1 , легко находятся из следующих трех моментных уравнений:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} A_{03}^k &= 2d(h_1^2 - h_2^2), & A_{04}^k &= 8dT_{**}(h_1^2 - h_2^2) = 4T_{**}A_{03}^k \\ A_{05}^k &= A_{03}^k(10T_{**}^2 + 2(h_1^2 + h_2^2)) \end{aligned}$$

Таким образом, в квадрупольном приближении функцию φ можно представить в виде $\varphi = \varphi_m + \varphi_g + \varphi_k$, причем она имеет шесть точных моментов и три параметра (T_0 , h и h_1), которые варьируются с целью минимизации функции $f - f_2$, где $f_2 = \int (\varphi_m + \varphi_g + \varphi_k) M dT$. Параметры T_0 и h изменяются в области $T_0 > 0$, $h > 0$, а h_1 — в области, которая не противоречит третьему из уравнений (2.4). (Как правило, $h_2^2 > 0$. Если оказывается, что $h_2^2 < 0$, то в программе предусмотрен автоматический переход на другие значения варьируемых параметров.) Кроме того, из условия положительности температуры имеем $h_1 < T_{**}$. Возможно и дальнейшее обобщение этого метода с использованием мультипольных приближений более высокого порядка.

Теперь рассмотрим значительно более сложную задачу о разложении функции двух переменных $F(v_x, v_p)$. Пусть она представлена конечным числом экспонент. Соответственно в α - u -пространстве имеем

$$(2.5) \quad \{F(v_x, v_p)\} = \sum_{k,l}^{n,m} a_{k,l} \delta(T - T_k) \delta(u - u_l)$$

Фигурными скобками будем обозначать представление функции в α - u -пространстве. Рассмотрим проекцию функции F на плоскость, перпендикулярную оси v_x , и ее образ в пространстве α - u

$$(2.6) \quad F_1(v_p) = \int F(v_x, v_p) dv_x$$

$$(2.7) \quad \{F_1(v_p)\} = \sum_{k=1}^n b_k \delta(T - T_k) \quad \left(b_k = \frac{a_k}{\pi T}, \quad a_k = \sum_{l=1}^m a_{kl} \right)$$

Функция $F_1(v_p)$ — функция одной переменной, причем температурные моменты $\{F_1(v_p)\}$ совпадают с соответствующими моментами $\{F(v_x, v_p)\}$. Применяя изложенный выше метод, представим $\{F_1(v_p)\}$ в виде семи δ -функций с шестью точными моментами и тремя варьируемыми параметрами.

Для построения (2.5) введем добавочные δ -функции так, что в результате функция третьего приближения в пространстве α - u имеет вид

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varphi = & M_1^T(T_0)\delta(u-u_0) + D_T\delta(u-u_{Tg}) + K_T\delta(u-u_{Th}) + \\ & + D_u\delta(T-T_{ug}) + K_u\delta(T-T_{uk}) + D_{uT} \\ & D_{uT} = a_3[\delta(u-u_5) - \delta(u-u_6)] [\delta(T-T_5) - \delta(T-T_6)] \end{aligned}$$

Здесь функции M_1^T , D_T и K_T — температурные монополю, диполь и квадруполь, параметры которых определяются описанным выше способом. Функции D_u и K_u назовем скоростным диполем и скоростным квадруполем. Они отличаются от температурных заменой T на u . Функцию D_{uT} будем называть температурно-скоростным диполем.

Интересно отметить, что в температурные моменты дают вклад только первые три слагаемых в формуле (2.8), а в скоростные — только следующие два слагаемых. Поэтому, во-первых, подключение новых δ -функций не нарушает уже определенных ранее параметров функций M_1 , D_T и K_T , а, во-вторых, при определении параметров скоростных мультиполей D_u и K_u можно действовать аналогично тому, как вычислялись параметры температурных D_T и K_T . При этом удовлетворяются первые пять скоростных моментов A_{10}, \dots, A_{50} и оставшиеся два параметра определяются путем минимизации функции $F_T(v_x, 0) - F_P(v_x, 0)$, где F_T и F_P — точное и приближенное значения. Для определения неизвестных $u_0, u_{Tg}, u_{Th}, T_{ug}, T_{uk}, u_5, u_6, T_5, T_6$ и a_3 привлекались еще четыре моментных уравнения, а шесть параметров варьировались с целью минимизации $F_T(v_x, 0) - F_P(v_x, 0)$. Таким образом, функция двух переменных представляется 17 δ -функциями, имеет 16 точных моментов и, кроме того, семь параметров, которые определяются из условия минимизации среднего квадратичного отклонения между точной и приближенной функциями.

3. Описанный выше метод был использован для аппроксимации I^M . Разложения проводились отдельно для $\text{Re} L_+^M$ (1.2) и $\text{Re} L_-^M$ (1.5). Из (1.6) следует, что достаточно рассмотреть функции R_{\pm} . Эти функции полностью описывают взаимодействие двух максвеллианов и характеризуются не четырьмя параметрами ($\alpha_1, \alpha_2, u_1, u_2$), а двумя безразмерными параметрами (Δ, U_0). Используя выражения (1.4) и (1.6), получим выражение для моментов от R_{\pm} : $B_{rs}^{\pm} = \lambda^{r/2+s} \tau_0 A_{rs}^{\pm}$, где A_{rs}^{\pm} — моменты от $\text{Re} L_{\pm}$, вычисленные в [4].

До сих пор квадраты скоростей и температуры измерялись в $1/\lambda$. Теперь введем новый масштаб v и T по формулам

$$v' = \frac{v}{\sqrt{e_{\pm}}}, \quad T' = \frac{T}{e_{\pm}} \quad \left(e = \frac{A_{01}^{\pm}}{A_{00}} \right)$$

Далее перенормируем R_{\pm} и B_{rs} так:

$$\begin{aligned} R_{\pm}' &= L_0^{\pm} R_{\pm}, \quad M_{rs}^{\pm} = B_{rs}^{\pm} L_{rs}^{\pm} \\ L_0^{\pm} &= (e_{\pm} \lambda)^{3/2} / A_{00}, \quad L_{rs}^{\pm} = (A_{00} \tau_0 (e_{\pm} \lambda)^{s+r/2})^{-1} \end{aligned}$$

В результате функции R_{\pm}' оказываются нормированными на единицу и имеют единичный первый температурный момент, $M_{00} = M_{01} = 1$. Кроме того, из вида $\text{Re} L_{\pm}^M$ (1.2) — (1.5) следует, что R_{\pm}' обладают следующими свойствами четности:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} R_+'(V_x', V_p', -U_0, \Delta) &= R_+'(-V_x', V_p', U_0, \Delta) \\ R_+'(V_x', V_p', U_0, -\Delta) &= R_+'(-V_x', V_p', U_0, \Delta) \\ R_-'(V_x', V_p', -U_0, \Delta) &= R_-'(-V_x', V_p', U_0, \Delta) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при одновременной замене знака у Δ и U_0 функция R_+ не меняется. Если же $\Delta U_0 < 0$, то нужно построить a_k, T_k, u_k при соответствующих положительных Δ и U_0 , а затем все скоростные u_k заменить на $-u_k$. При разложении R_-' всегда можно воспользоваться условием четности по U_0 (3.1). Поэтому расчеты велись для R_+ в области $0 \leq \Delta \leq 1, 0 \leq U_0 \leq 1.4$, а для R_-' в области $|\Delta| \leq 1, 0 \leq U_0 \leq 1.4$. При разложении R_+ области изменения Δ и U_0 делились на части шагом 0.1 и при всех значениях Δ и U_0 в узлах указанным выше дипольно-квадрупольным методом вычислялись a_k, T_k и u_k .

Существенной особенностью функции $\{R_-'\}$ является то, что ее можно представить в виде произведения функции только от α на δ -функцию

$$\begin{aligned} \{R_-'\} &= F(\Delta, u_1, \alpha) \delta\left(u - \frac{\alpha_1 u_1}{\alpha}\right) \\ (3.2) \quad F(\Delta, u_1, \alpha) &= \frac{A_-^*}{L} \exp\left(-\frac{(\alpha - \alpha_1) \alpha_1 u_1^2}{\alpha}\right) \\ A_-^* &= \{\operatorname{Re} L^{-M}\} |_{u_1=u_2=0}, \quad L = \frac{\lambda^{3/2}}{\tau_0} \end{aligned}$$

Поэтому можно сначала разложить $F(\Delta, u, \alpha)$ по семи температурным δ -функциям

$$F = \sum_{k=1}^7 a_k \delta(T - T_k)$$

(здесь соответствующая функция в v -пространстве получается с помощью проектирования на плоскость $v_x = 0$ функции R_-' (см. (2.6), (2.7)), а затем представить и всю функцию $\{R_-'\}$ в виде семи δ -функций

$$\{R_-'\} = \sum_{k=1}^7 a_k \delta(T - T_k) \delta\left(u - \frac{T_k u_1}{T_1}\right)$$

Важно то, что такое разложение не нарушает полученной из (3.2) связи между моментами: $A_{r-s}^- = A_{0r}^- u_1^{r-s} T_1^{s-r}$. Поэтому если в точной

U_0	Δ									
	10 ⁻⁷	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
10 ⁻⁷	0.001	0.003	0.001	0.001	0.003	0.012	0.007	0.003	0.091	0.751
0.1	0.003	0.009	0.016	0.010	0.013	0.030	0.094	0.185	0.264	0.780
0.2	0.009	0.082	0.038	0.021	0.037	0.128	0.150	0.196	0.535	0.912
0.3	0.010	0.056	0.045	0.035	0.102	0.250	0.211	0.930	0.817	0.984
0.4	0.030	0.054	0.073	0.143	0.191	0.505	0.617	0.447	0.857	1.171
0.5	0.061	0.075	0.237	0.063	0.112	0.283	0.759	0.473	0.934	1.215
0.6	0.087	0.121	0.256	0.266	0.254	0.223	0.634	0.747	1.104	1.324
0.7	0.150	0.120	0.341	0.393	0.541	0.523	0.858	0.855	1.123	1.673
0.8	0.161	0.273	0.531	0.272	0.726	0.855	0.762	0.926	1.315	1.783
0.9	0.189	0.251	0.334	0.724	0.472	0.869	1.077	1.174	1.287	1.952
1.0	0.197	0.265	0.672	0.731	0.551	0.814	1.043	1.410	1.132	1.267
1.1	0.207	0.664	0.381	0.420	0.908	1.015	1.169	1.643	1.710	1.943
1.2	0.215	0.477	0.798	0.764	1.032	1.567	1.953	1.889	1.911	2.014
1.3	0.244	0.588	0.885	0.724	1.310	1.981	1.895	1.603	1.784	2.118
1.4	0.399	0.612	1.141	1.227	1.458	1.621	1.897	2.071	2.017	2.341

и приближенной функциях совпадают шесть температурных моментов, то совпадают и другие моменты вида $A_{r-s,s}$ ($r, s < 6$), т. е. 21 момент. При разложении R_-' шаг по Δ и U_0 выбирался равным 0.2.

В результате для R_+' в каждой из 150 точек сетки (Δ, U_0) было вычислено и затабулировано по 51 параметру δ -функций, а для R_-' — соответственно по 21 параметру. В таблице приведены максимальные погрешности, которые имеют место при вычислении R_+' . При расчете погрешности вычислялось процентное отношение разности между точным и приближенным значениями функции к значению функции при $v=0$. При вычислении R_-' погрешность была ниже, чем при вычислении R_+' и нигде не превышала 0.5%.

Для построения R_{\pm}' внутри ячеек сетки (Δ, U_0) проводилась интерполяция. Интерполяция $\{R_+'\}$ проводилась по формуле

$$(3.3) \quad \{R_+'\}_{\Delta, U_0} = \frac{U_{02} - U_0}{U_{02} - U_{01}} \left(\frac{\Delta_2 - \Delta}{\Delta_2 - \Delta_1} \{R_+'\}_{\Delta_1, U_{01}} + \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \{R_+'\}_{\Delta_2, U_{01}} \right) + \\ + \frac{U_0 - U_{01}}{U_{02} - U_{01}} \left(\frac{\Delta_2 - \Delta}{\Delta_2 - \Delta_1} \{R_+'\}_{\Delta_1, U_{01}} + \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1} \{R_+'\}_{\Delta_2, U_{02}} \right)$$

Максимальная погрешность в центрах ячеек не превышала 2%. Интересно отметить, что если использовать формулы (3.3), то моменты интерполируемой функции M_{00} и M_{01} совпадают с соответствующими моментами точной функции во всех точках плоскости (Δ, U_0) . Для коррекции моментов, соответствующих импульсу и энергии, M_{10} и $M_{20} + \frac{3}{2}M_{01}$ вводились постоянные для всех δ -функций сдвиги по u и по T . Схема интерполяции $\{R_-'\}$ была несколько модифицирована с использованием свойства (3.2). Таким образом, во всех точках плоскости (Δ, U_0) приближенная функция $\{I^M\}$ имела три точных первых момента. Последнее обстоятельство важно, так как интерполяция не нарушает вклада от R_{\pm}' в моменты, соответствующие законам сохранения. Вследствие этого не нарушается консервативность при аппроксимации интеграла столкновений.

4. Решалась задача о выравнивании скоростей и температур «квазишок». Однородное уравнение Больцмана записывалось в безразмерном виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \int A(w, w_1, w_2) \varphi(w_1) \varphi(w_2) dw_1 dw_2$$

Здесь время отнесено ко времени релаксации $\tau = \sqrt{\pi m} / (4n\sigma\sqrt{kT_0})$, где T_0 — характерная температура. В начальный момент функция распределения задавалась двумя точками в $\alpha - u$ -пространстве

$$\varphi = c_1 \delta(u - u_1) \delta(T - T_1) + c_2 \delta(u - u_2) \delta(T - T_2)$$

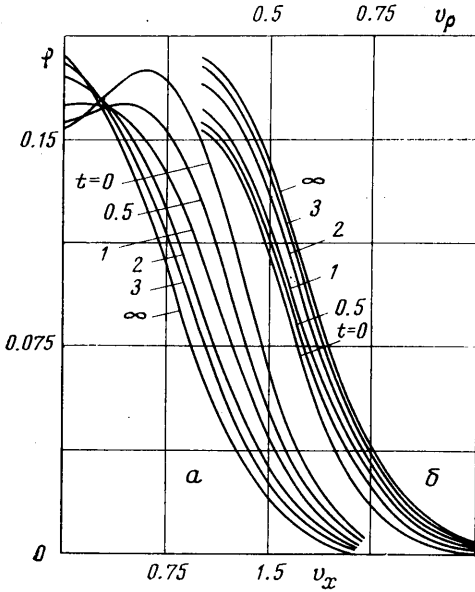
Задача решалась методом Эйлера. В плоскости $u - T$ выбиралась прямоугольная сетка. Если первоначально в этой сетке находятся всего две точки, то уже в следующий момент времени в каждую ячейку сетки может попасть много δ -функций. Все они имеют сравнительно мало отличающиеся одна от другой координаты u_k и T_k . Разобьем множество этих δ -функций на две группы. Рассмотрим отдельно δ -функции с положительными и отрицательными весами. Введем следующие усредненные характеристики каждой группы:

$$n_{\pm} = \sum_k a_{k\pm}, \quad u_{\pm} = \frac{1}{n_{\pm}} \sum_k a_{k\pm} u_{k\pm} \\ T_{\pm} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{n_{\pm}} \sum_k a_{k\pm} \left(\frac{3}{2} T_{k\pm} + u_{k\pm}^2 \right) - u_{\pm}^2 \right]$$

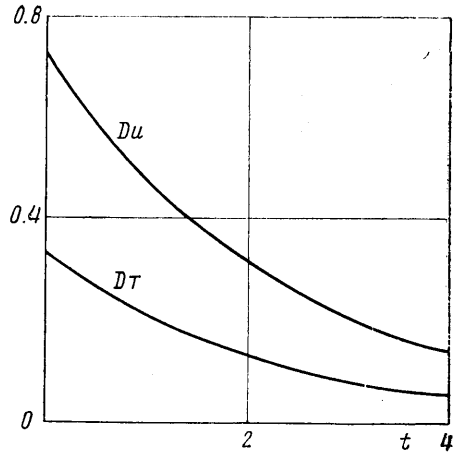
Все δ -функции данной ячейки с положительными весами заменим одной с весом n_+ и координатами T_+ и u_+ , и аналогично усредним все δ -функции второй группы.

Легко доказать, что u_{\pm} и T_{\pm} не выйдут за границы ячейки. В результате усредненные δ -функции попадают не в центр ячейки, как это обычно делается в численных схемах, а в точки с координатами (u_{\pm}, T_{\pm}) . Такой выбор весов и координат δ -функций позволяет не нарушить консервативности схемы. Кроме того, можно показать, что возникающая при такой замене погрешность оказывается пропорциональной квадрату шага сетки.

Далее получившиеся две δ -функции в ячейке заменялись одной, если их средняя скорость и средняя температура не выходила за границы ячейки. Такое усреднение по ячейкам проводилось на каждом шаге счета. В результате в каждой не пустой ячейке оказывались одна или две δ -функции.



Фиг. 1



Фиг. 2

Следует подчеркнуть, что разрабатываемый метод решения уравнения Больцмана позволяет на каждом шаге оценить погрешность в функции распределения, вносимую той или иной приближенной процедурой.

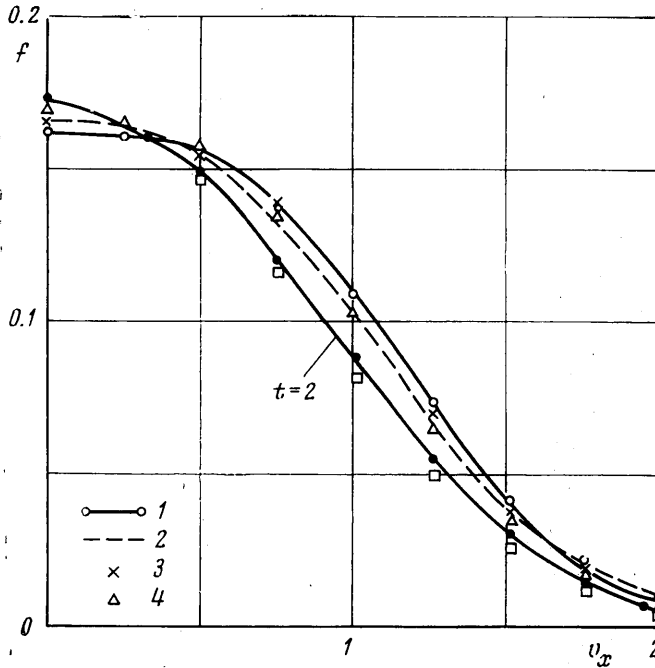
Тот факт, что известно аналитическое выражение для I^M [6], можно использовать для оценки погрешности, допускаемой при вычислении функции распределения как при разложении по максвеллианам, так и при осреднении в ячейках.

Как и следовало ожидать, погрешность при первом переходе весьма незначительна (четвертый и пятый знаки при $\Delta t = 0.05$). Погрешность при втором переходе (осреднение в ячейках) в наших расчетах не превышала 1%. Для удобства контроля за погрешностью в процессе счета использовались некоторые моментные характеристики. Вычислялись полное число частиц, импульс и энергия. Поскольку все описанные выше операции, начиная с аппроксимации интеграла столкновений в узлах и кончая суммированием в ячейках, не нарушают законов сохранения, эти моменты сохранялись на каждом временном шаге. Вычислялись также величины, которые можно назвать температурой и скоростной дисперсией, по формулам

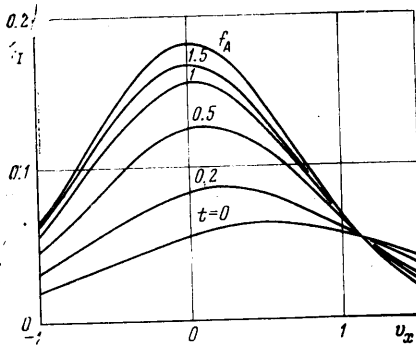
$$Du = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_k a_k (u_k - \langle u \rangle)^2}, \quad DT = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_k a_k (T_k - \langle T \rangle)^2}$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{n} \sum_k a_k u_k, \quad \langle T \rangle = \frac{3}{2n} \sum_k a_k (u_k^2 + \frac{3}{2} T_k) - \frac{3}{2} \langle u \rangle^2$$

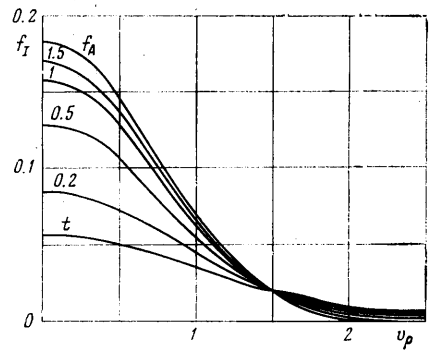
Здесь $\langle u \rangle$ и $\langle T \rangle$ — средняя скорость и температура газа. Величины Du и DT характеризуют разброс функции по u и по T , они монотонно убывают с ростом t и в равновесии обращаются в нуль. Вычисляя Du и DT в каждый момент времени до и после осреднения в ячейках, можно контролировать погрешность, которая допускается за счет осреднения, не прибегая при этом к вычислению в v -пространстве.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Разработанный метод был применен для решения релаксационной задачи с начальными условиями

$$(4.1) \quad c_1 = c_2 = 1/2, \quad T_1 = T_2 = 0.666, \quad u_1 = -u_2 = 1/\sqrt{2}$$

Такие начальные условия выбраны из тех соображений, что при этих условиях в [7] проведено сравнение трех разных методов. Заметим, что в отличие от [7] при решении нигде не была использована симметрия условий (4.1).

Промежуток по T делился на семь равных частей, а промежуток по u — на шесть. Шаг по времени выбирался равным 0.05. В среднем на один шаг затрачивалось меньше 3 мин на БЭСМ-6. На фиг. 1 изображено поведение функции распределения скоростей в сечениях $v_p=0$ (а) и $v_x=0$ (б) в разные моменты времени. На фиг. 2 приведены зависимости Du , DT от времени. На фиг. 3 приведено сравнение решений из [7], построенных по моделям Крука 2, Черемисина 3 и Шахова 4, с решением настоящей работы 1 при $t=1$. Можно отметить хорошее совпадение с кривой 3 в области тепловых скоростей. Кривые 2 и 4 лежат ближе к кривой 1, соответствующей $t=1$, т. е. различие в скорости релаксации составляет $\sim 20\%$.

5. В низкотемпературной плазме большую роль играют процессы, связанные с распространением ионов. Основным механизмом взаимодействия ионов с атомами явля-

ется резонансная перезарядка. Решалась релаксационная задача о резонансной перезарядке ионов на атомах. В модели дифференциального сечения $\sigma(g, \chi) = \sigma_0 \delta(\chi - \pi) / \sin \chi$, где $\sigma_0 = \text{const}$, $\text{Re } l_+$ по виду совпадает с $\text{Re } l_-$, если в последнем поменять местами индексы атомов и ионов. Функции распределения ионов и атомов в начальный момент выбирались максвелловскими с разными скоростями и температурами. При $t \rightarrow \infty$ функция распределения ионов совпадала с максвелловской функцией распределения атомов.

На фиг. 4, 5 изображено поведение функции распределения ионов по продольной и поперечной составляющим скорости в разные моменты времени (погрешность меньше 1%).

В заключение следует сказать, что решение релаксационной задачи представляет не только самостоятельный интерес, но является составной частью более сложных задач. Так, если решать пространственно-неоднородную, нестационарную задачу методом расщепления, то на малых промежутках времени нужно последовательно рассматривать два процесса — свободный разлет и однородную релаксацию.

Разработанный метод позволяет считать каждый временный шаг релаксационной части уравнения Больцмана за время меньше 3 мин на ЭЭСМ-6 и обладает высокой точностью (погрешность в функции распределения не превышает 1%).

Поступила 23 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Эндер И. А., Эндер А. Я. Об одном представлении уравнения Больцмана. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 1.
2. Эндер И. А., Эндер А. Я. Об одном методе решения уравнения Больцмана при сильных отклонениях от максвелловского распределения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
3. Эндер А. Я., Эндер И. А. Уравнение Больцмана в α, μ -представлении. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
4. Эндер И. А. Построение ядра столкновительного оператора в α, μ -представлении уравнения Больцмана. Вестн. ЛГУ, 1974, № 19, Сер. матем., механ., астрон., вып. 4.
5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. Deshpande S. M., Narasimha R. The Boltzman collision integrals for a combination of Maxwellians. J. Fluid Mech., 1969, vol. 36, pt 3.
7. Шахов Е. М. Метод исследования движений разреженного газа. М., «Наука», 1974.