

**ТЕЧЕНИЕ СМЕСИ ГАЗОВ С РЕЛАКСАЦИЕЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ
ЭНЕРГИИ В ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛАХ**

В. В. БРЕЕВ, С. Н. МИНИН, У. Г. ПИРУМОВ, В. Р. ШЕВЧЕНКО

(Москва)

Представлен метод расчета плоских и осесимметричных течений смеси газов с релаксацией колебательной энергии в до-, транс- и сверхзвуковой областях сопла. Метод основан на численном решении обратной задачи теории сопла.

Представлены результаты расчетов течения с колебательной релаксацией смеси $\text{CO}_2 - \text{N}_2 - \text{H}_2\text{O} - \text{He}$. Проведено сравнение с результатами одномерных расчетов. Выявлено, что релаксация колебательных энергий оказывает существенное влияние на газодинамические параметры течения в соплах с большим относительным расширением, и поэтому при профилировании сопел, особенно сверхзвуковой части, необходимо проводить расчеты неравновесного течения. Показано, что геометрия транс- и сверхзвуковой областей сопла оказывает значительное влияние на распределение инверсной заселенности уровней и коэффициент усиления.

В настоящее время достаточно хорошо развиты и реализованы численные методы расчета одномерного течения в сопле смеси газов с релаксацией колебательной энергии (см., например, [1-6]), установлены основные качественные особенности таких течений.

Очевидно, что пространственный характер течения, особенно в областях, где градиенты газодинамических параметров вдоль различных трубок тока заметно отличаются, должен оказывать влияние на протекание неравновесных процессов. Особенно важно иметь информацию о трансзвуковой области течения, в которой, во-первых, начинают проявляться неравновесные эффекты, а во-вторых, формируются параметры течения, служащие в качестве начальных данных для расчета сверхзвуковой области. Авторам известны лишь две работы, посвященные расчету двумерного течения смеси газов с релаксацией колебательной энергии — [7, 8]. В [7] численно решается обратная задача теории сопла. Последовательно используя методы работ [5, 9], авторы рассчитывают двумерное течение в до-, транс- и сверхзвуковой областях сопла. Однако авторы работы [7] не используют неявных разностных схем для решения релаксационных уравнений типа [10], что приводит к неустойчивости решения при расчете течения вблизи равновесия. В [8] методом сквозного счета, аналогичным методу С. К. Годунова, рассчитывается лишь сверхзвуковая область течения.

1. Течение релаксирующего газа без учета вязкости, теплопроводности, диффузии, химического протекания реакций в криволинейной ортогональной системе координат (ψ, s) описывается следующей системой уравнений [11]:

$$(1.1) \quad \frac{\partial y^{j+1}}{\partial \psi} = (j+1) \frac{u}{\rho w^2}, \quad \frac{\partial (xy^{j+1})}{\partial \psi} = (j+1)x \frac{u}{\rho w^2} - y \frac{v}{\rho w^2}$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial (\rho y^{j+1})}{\partial \psi} = \frac{ya}{w} \left[v \frac{\partial u}{\partial s} - u \frac{\partial v}{\partial s} \right] + (j+1)p \frac{u}{\rho w^2}$$

$$(1.3) \quad \rho w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad H + \frac{w^2}{2} = H_0, \quad p = \rho RT$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial e_v}{\partial s} = f_v(e_v^* - e_v)$$

$$(1.5) \quad u = aw \frac{\partial x}{\partial s}, \quad v = -aw \frac{\partial y}{\partial s}, \quad w = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$e_v = \left[\exp\left(\frac{\theta_v}{T_v}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad a = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

В системе (1.1) – (1.5) ψ – функция тока, s – расстояние вдоль линии тока, p – давление, T – температура, ρ – плотность, u , v – проекции вектора скорости на оси прямоугольной декартовой системы координат x и y соответственно, H_0 – энтальпия торможения, H – энтальпия релаксирующего газа, e_v – безразмерная колебательная энергия v -й моды, связанная с колебательной T_v и характеристической θ_v температурами формулой Эйнштейна, R – газовая постоянная, a – интегрирующий множитель, $j = 0, 1$ для плоского и осесимметричного случаев соответственно.

В системе (1.1) – (1.5) уравнения (1.1) – следствие уравнения неразрывности, (1.2), (1.3) – уравнения движения, энергии, состояния, (1.4) – уравнение колебательной кинетики, (1.5) – уравнение линии тока.

Запись системы уравнений колебательной кинетики в виде (1.4) оказывается всегда возможной и удобна при построении использованных ниже разностных схем. Выражения для f_v и e_v^* определяются конкретной выбранной схемой реакций и времен релаксации.

Основными каналами релаксации колебательной энергии в смеси CO_2 – N_2 – H_2O – He можно считать резонансный обмен через нижний колебательный уровень молекулы N_2 и уровень 00^01 молекулы CO_2 (с релаксационным временем τ_{43}), переход энергии асимметричного типа колебания CO_2 через уровень 00^01 в деформационный и симметричный типы колебаний (с релаксационным временем τ_{32}), совместную релаксацию энергии $\epsilon_1 + \epsilon_2$ на поступательные степени свободы через уровень 01^10 (с τ_{20}) и столкновительную релаксацию энергии ϵ_4 на поступательные степени свободы (с τ_{40}). Номера 1–3 соответствуют симметричной, деформационной и асимметричной модам CO_2 , 4 – колебанию N_2 .

Функции f_v и e_v^* при сделанных выше предположениях и при $T_1 = T_2$, $\theta_3 \approx \theta_4$ в соответствии с [12] можно записать в виде

$$f_{12} = \frac{1}{aw\tau_{20}}, \quad f_3 = \frac{1}{aw} \frac{\tau_{43}[(1+e_2)^3 - e_2^3 e^{-500/T}] + \alpha_2 \tau_{32}}{\tau_{32}\tau_{43}}$$

$$f_4 = \frac{1}{aw} \frac{\alpha_1 \tau_{40} + \tau_{43}}{\tau_{43}\tau_{40}}$$

$$e_{12}^* = e_{12}(T) - \frac{3}{2} \tau_{20} \frac{e_2^3(1+e_3)e^{-500/T} - e_3(1+e_2)^3}{\tau_{32}}$$

$$e_3^* = \frac{\tau_{43}e_2^3 e^{-500/T} + \alpha_2 \tau_{32} e_4}{\tau_{43}[(1+e_2)^3 - e_2^3 e^{-500/T}] + \alpha_2 \tau_{32}}, \quad e_4^* = \frac{\tau_{40}\alpha_1 e_3 + \tau_{43}e_4(T)}{\alpha_1 \tau_{40} + \tau_{43}}$$

$$e_{12} = (e^{0_1/T_1} - 1)^{-1} + (e^{0_1/2T_1} - 1)^{-1}, \quad e_2 = (e^{0_1/2T_1} - 1)^{-1}, \quad e_3 = (e^{0_3/T_3} - 1)^{-1},$$

$$e_4 = (e^{0_3/T_4} - 1)^{-1}, \quad e_{12}(T) = (e^{0_1/T} - 1)^{-1} + (e^{0_1/2T} - 1)^{-1},$$

$$e_4(T) = (e^{0_3/T} - 1)^{-1}, \quad \theta_1 = 1920^\circ \text{K}, \quad \theta_3 = 3380^\circ \text{K}$$

Здесь α_1 , α_2 – мольные доли CO_2 и N_2 . Времена колебательной релаксации в сложных смесях представлены в виде:

$$(\tau_I)^{-1} = \sum_{K=1}^n \alpha_K (\tau_{IK})^{-1}, \quad I=12,$$

Здесь 3, 4, n – число газовых компонент в смеси.

Для нахождения времен релаксации бинарных смесей и их температурных зависимостей были использованы данные, приведенные в работах [13-15].

2. Система уравнений (1.1)–(1.5) применялась для исследования двумерных течений релаксирующего газа в соплах Лавала. Отметим, что используемая форма уравнений позволяет рассчитывать течение в плоских и осесимметричных соплах любой конфигурации.

Для численного интегрирования система уравнений (1.1)–(1.3) записывалась в конечно-разностном виде с использованием неявной разностной схемы второго порядка точности [9], а дифференциальные уравнения колебательной релаксации аппроксимировались неявной «параметрической» разностной схемой [10]. Для вычисления производных F_s' (F — любая из функций u, v, x, y) использовалась трехточечная разностная схема с переменным шагом на слое с интерполяцией по Лагранжу.

В предлагаемом численном методе последовательно используются методы [9, 10] для расчетов двумерного течения релаксирующего газа. Аналогичный подход для исследования течения с химической релаксацией в соплах использован в [16].

Первоначально в первой итерации по известным параметрам на n -м слое $\psi = \psi_n$ из уравнений (1.1), (1.2) определяется форма линий тока и распределение давления на ней. Интегрируя затем вдоль линий тока при известном распределении давления, с помощью уравнений (1.3), (1.4) определяются остальные параметры течения. С использованием уточненных значений этих параметров в следующей итерации вновь определяется форма линий тока и распределение давления на ней, а затем остальные параметры течения. Итерации повторяются до сходимости по точности всех этих параметров. Отметим, что на начальной линии тока $\psi = \psi_0$, форма которой $y = y_0(s, \psi_0)$ и распределение давления на ней $p = p_0(s, \psi_0)$ заданы, проводится лишь интегрирование системы (1.3), (1.4). Система уравнений газовой динамики совместно с релаксационными уравнениями рассчитывается на оси симметрии аналогично системе соответствующих уравнений в одномерном приближении [10]. При интегрировании системы уравнений (1.1)–(1.5) предполагается, что в начальной плоскости $s = s_0$ течение близко к одномерному и при всех ψ существует некоторая связь $e_v = e_v(p, T)$, $v = 12, 3, 4$, которая задается из феноменологических соображений, например, предполагается равновесное возбуждение колебательных степеней свободы при $s = s_0$. Детальную запись разностных схем и алгоритма численного расчета можно найти в [9-11, 16].

3. Ниже представлены результаты расчетов двумерного течения релаксирующего газа в плоских и осесимметричных соплах.

Значения функций $y(s, \psi_0)$ на оси сопла задавались равными нулю. Распределение давления на оси сопла задавалось в виде аналитической функции [9]

$$(3.1) \quad p(s, \psi_0) = p_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2(s, \psi_0) \right]^{1/(\gamma-1)}$$

$$\lambda(s, \psi_0) = 1 + \frac{(1-\lambda_-)(\lambda_+-1)(a-c)}{(1-\lambda_-)a + (\lambda_+-1)c}$$

$$a = \exp(2bs), \quad c = 1 \quad (s \leq 0), \quad a = 1, \quad c = \exp(-2bs) \quad (s > 0)$$

$$b = b + \frac{(b_0-b_-)(b_+-b_0)(a_1-c_1)}{(b_0-b_-)a_1 + (b_+-b_0)c_1}$$

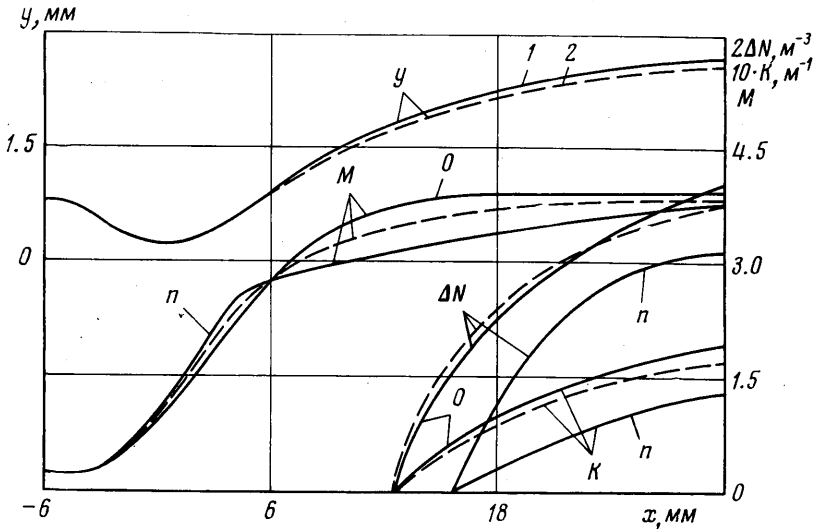
$$a_1 = \exp(2b_1s), \quad c_1 = 1 \quad (s \leq 0), \quad a_1 = 1, \quad c_1 = \exp(-2b_1s) \quad (s > 0)$$

Здесь $\lambda(s, \psi_0) = w/a$ — коэффициент скорости, γ — показатель адиабаты, p_0 — давление торможения, λ_- — асимптотическое значение коэффициента скорости в дозвуковой области, λ_+ — асимптотическое значение коэффициента скорости в сверхзвуковой области. Параметры b_- , b_0 , b_+ определяют величину параметра b в до-, транс- и сверхзвуковых областях сопла. Параметр b_1 определяет величину градиента давления на оси.

Расчет проводился с постоянным шагом $\Delta\psi = \text{const}$ во всей области течения и с переменным шагом по слою Δs . Давление торможения $p_0 = 17 \text{ ата}$, температура торможения $T_0 = 1300^\circ \text{ К}$. Состав смеси $\text{CO}_2\text{-N}_2$ —

—H₂O—He (в мольных долях): $\alpha_1=0.08$, $\alpha_2=0.912$, $\alpha_3=0.008$, $b_- = 500$, $b_0 = 300$, $b_+ = 200$, $b_1 = 500$, $\gamma = 1.3$, $\lambda_- = 0.2$, $\lambda_+ = 2.14$.

На фиг. 1 представлены контуры плоского сопла, полученные при расчете течения с колебательной релаксацией (кривая 1) и без релаксации (кривая 2), распределения числа Маха, газовой температуры, инверсной



Фиг. 1

заселенности уровней $\Delta N = (N_{001} - N_{100}) 10^{-21}$ коэффициента оптического усиления вдоль оси симметрии (функции обозначены 0) и на линии тока, выбранной за стенку сопла ($-n$). Коэффициент оптического усиления вычислялся по формуле

$$K = \beta p \frac{\theta_2 - \theta_1}{T} \alpha_1 (e^{-\theta_2/T_2} - e^{-\theta_1/T_1}) [(1 - e^{-\theta_1/T_1}) (1 - e^{-\theta_2/T_2}) \times \\ \times (1 - e^{-\theta_1/2T_1})] \sqrt{\pi} a H(a, 0) \\ \beta = \frac{40}{p} (\alpha_1 + 0.75\alpha_2 + 0.43\alpha_3 + 0.58\alpha_4)$$

Здесь a — отношение столкновительной полуширины к доплеровской, $H(a, 0)$ — значение функции Фойхта в центре линии

$$H(a, 0) = 1/(\sqrt{\pi} a) \left(1 - \frac{1}{2a^2} + \frac{3}{4a^4} + \dots \right), \quad a > 1.4$$

$$H(a, 0) = \exp(a^2) [1 - F(a)], \quad a \leq 14, \quad F(a) - \text{интеграл ошибок}$$

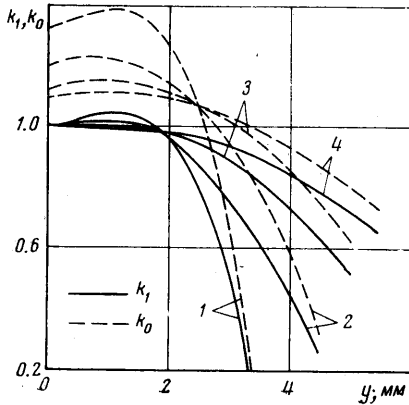
Пунктирными кривыми обозначены на этой же фигуре результаты расчета неравновесного течения в одномерном приближении.

Неравновесные и двумерные эффекты начинают проявляться уже в дозвуковой области сопла. Однако наибольшее влияние они оказывают в транс- и сверхзвуковой областях. В этих областях параметры двумерного потока газа существенно отличаются от одномерного.

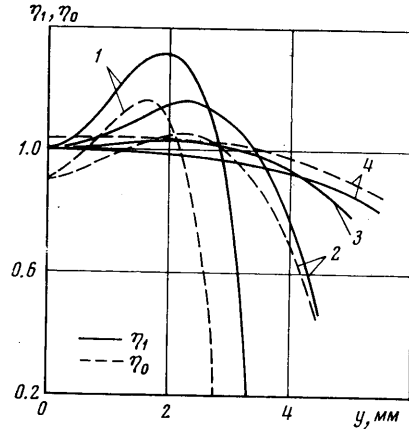
На фиг. 2, 3 приведены распределения коэффициента усиления и инверсной заселенности уровней, отнесенных к этим же параметрам на оси $k_1 = K/K_1$, $\eta_1 = \Delta N/\Delta N_1$ или к вычисленным по одномерной методике $k_0 = K/K_0$, $\eta_0 = \Delta N/\Delta N_0$ в сечениях $s = 0.014, 0.017, 0.0125, 0.028$ м (кривые 1—4 соответственно).

Двумерность потока оказывает наибольшее влияние на распределение коэффициента усиления и инверсной заселенности в области возникновения инверсной заселенности уровней. В целом влияние двумерности на коэффициент усиления и инверсную заселенность с увеличением расстояния от оси возрастает. При движении вниз по потоку влияние двумерности на распределения коэффициента усиления и инверсной заселенности уменьшается так, что в выходном сечении сопла неравномерность этих параметров составляет несколько процентов.

Было проведено расчетное исследование влияния геометрии сопла на величину и неравномерность коэффициента усиления и инверсной заселенности при постоянном критическом размере (h_*) и фиксированной дли-



Фиг. 2



Фиг. 3

не сопла. Изменение геометрии сопла достигалось за счет соответствующего изменения начального распределения давления по формуле (3.1). Расчеты показали, что геометрия дозвуковой части сопла практически не оказывает влияния на распределения колебательных параметров. Наличие в дозвуковой области сопла начальных зон торможения также не приводит к изменению распределения колебательных параметров. Уменьшение радиуса очертания критического сечения приводит к изменению распределений колебательных параметров: увеличению значений коэффициента усиления и инверсной заселенности во всей области существования инверсии и некоторому уменьшению их неравномерности в выходном сечении сопла.

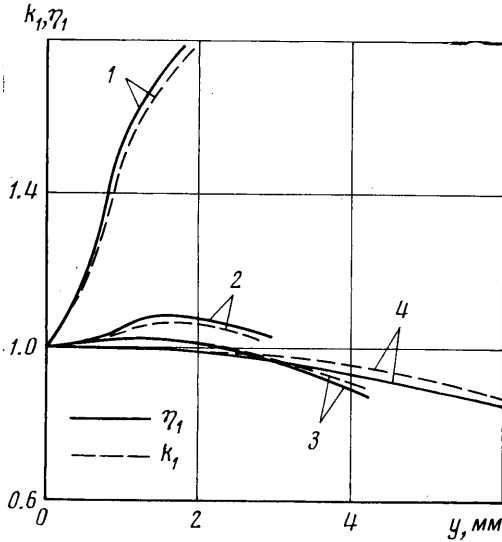
Расчеты серии сопел, близких к соплам с угловой точкой и имеющих разные критические размеры, показали, что распределение колебательных параметров существенно зависит от критического размера сопла. Начальное распределение давления, дающее сопло, близкое к угловой точке, взято из эксперимента¹ и по формуле, приведенной там же, пересчитано на свои исходные данные. Сопла, имеющие разные критические размеры (h_*), получались при сжатии или растяжении начального распределения давления вдоль начальной линии тока. При этом длина сопла соответственно менялась в ту или иную сторону.

На фиг. 4 приведены распределения коэффициента усиления и инверсной заселенности уровней в выходных сечениях сопел отнесенные к этим параметрам на оси сопел в том же сечении. Кривые 1–4 относятся соответ-

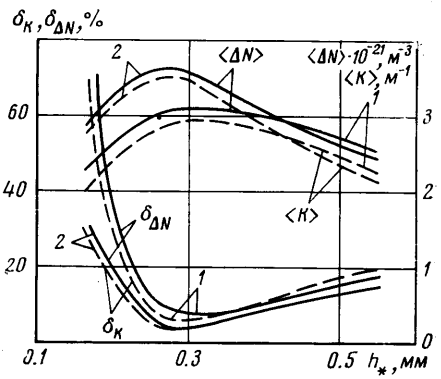
¹ А. М. Овсянников. Исследование смешанных течений в кольцевых соплах. Канд. дис., МФТИ, 1972.

ственно к соплам с полушириной критического размера $h_* = 0.16, 0.27, 0.38, 0.55$ мм.

На фиг. 5 приведены коэффициент неравномерности и средние значения коэффициента усиления и инверсной заселенности в выходных сечениях этих сопел в зависимости от критического размера (кривые 1). Коэффициент неравномерности параметров в сечении характеризуется максимальным относительным различием колебательных параметров (коэффициента усиления и инверсной заселенности). На фиг. 5 видно, что существует зона оптимальных h_* с точки зрения минимума неравномерности и максимума средних значений колебательных параметров.



Фиг. 4



Фиг. 5

Расчеты показали, что наличие после сопла выравнивающего участка приводит к уменьшению оптимальной зоны, уменьшению неравномерности и увеличению средних колебательных параметров в этой зоне (кривые 2 на фиг. 5). Относительная длина выравнивающих участков различных сопел бралась постоянной ($s/h_* = 30$).

В осесимметричных соплах неравномерность коэффициента усиления и инверсной заселенности уровней значительно меньше, чем в плоских соплах при тех же начальных данных и размерах критики ($r_* = h_*$).

Поступила 25 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирюков А. С., Шелепин Л. А. Кинетика физических процессов в газодинамических лазерах. Влияние формы сопла на инверсию. Ж. техн. физ., 1974, т. 44, вып. 6.
2. Лосев С. А., Макаров В. Н. Оптимизация коэффициента усиления в газодинамическом лазере на углекислом газе. Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 7.
3. Чирихин А. В. О неравновесном течении в обратном сопле Лавалля. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 3.
4. Дынникова Г. Я. Расчет течения смеси релаксирующих газов при адиабатическом расширении. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 4.
5. Vabiano A., Chevalier Ph. Calcul de l'écoulement monodimensionnel relaxé d'un gaz dans une tuyère sonique convergente-divergente. C. r. Acad. Sci. Paris, 1973, t. 276, No. 10.
6. Красицкая Л. С., Напарович А. П., Шарков В. Ф. К расчету газодинамического CO_2 -лазера. М., 1972. (Препринт Ин-та атомной энергии № 2252.)

7. Babiano A., Chevalier Ph. Calcul bidimensionnel de révolution de l'écoulement relaxé d'un gaz dans une tuyère sonique convergente-divergente. C. r. Acad. Sci. Paris, 1973, t. 276, No. 13.
 8. Левин В. А., Туник Ю. В. Движение релаксирующей смеси газов в двумерных плоских соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 1.
 9. Пирумов У. Г. Расчет течения в сопле Лавали. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
 10. Камзолов В. Н., Пирумов У. Г. Расчет неравновесных течений в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
 11. Пирмов У. Г. Обратная задача теории сопла и численное решение внутренних задач газовой динамики. В сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 6. М., МГУ, 1974.
 12. Бирюков А. С., Гордиец Б. Ф. Кинетические уравнения релаксации колебательной энергии в смеси многоатомных газов. ПМТФ, 1972, № 6.
 13. Гордиец Б. Ф., Соболев Н. Н., Шелепин Л. А. Кинетика физических процессов в ОКГ на CO_2 . ЖЭТФ, 1967, т. 53, вып. 5.
 14. Лосев С. А., Макаров В. Н., Павлов В. А., Шагалов О. П. Исследование процессов в газодинамическом лазере на ударной трубе большого диаметра. Физика горения и взрыва, 1973, т. 9, № 4.
 15. Moore C. B., Wood R. E., Bei-Lok Hu, Yardley J. T. Vibrational energy transfer in CO_2 lasers. J. Chem. Phys., 1967, vol. 46, No. 11.
 16. Колмогоров В. Ф. Численное решение обратной задачи теории сопла Лавали применительно к двумерным неравновесным течениям совершенного газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
-