

**РАСЧЕТ ДВУМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В РЕШЕТКАХ  
ТУРБОМАШИН МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

**Б. И. КУРМАНОВ, Г. Л. ПОДВИДЗ, Г. Ю. СТЕПАНОВ**

(Москва)

В расчете плоских, установившихся течений невязкой, несжимаемой жидкости через решетки турбомашин часто используются интегральные уравнения относительно потенциала скорости, модуля скорости на контуре профиля или ее проекций [1-3]. Вычисления упрощаются при использовании конформных отображений области течения на канонические области (круг, полосу) [1]. Известны также расчеты двумерных течений в неподвижном или вращающемся слое переменной толщины [1, 4, 5].

Расчеты дозвуковых течений в линейном приближении Прандтля - Глауэрта или для модели газа Чаплыгина (с линейной аппроксимацией адиабаты) непосредственно сводятся к расчету течений несжимаемой жидкости.

В более общем случае транс- и сверхзвуковых скоростей обычно используются различные сеточные методы, из которых наиболее эффективен метод установления [6].

В статье рассматривается установившееся, двумерное течение невязкого газа через вращающуюся решетку в слое переменной толщины. Расчет течения проводится путем решения интегрального уравнения относительно модуля скорости. По сравнению с другими известными методами получена повышенная точность в области входной кромки профиля и достаточно быстрая сходимость итераций по плотности.

1. Течение невязкого газа происходит на поверхности вращения  $S_1$  в слое переменной толщины  $h$ . В цилиндрической системе координат  $\varphi, z, r$  поверхность  $S_1$  задается уравнением  $r=r(z)$  и характеризуется углом наклона  $\delta$  к оси вращения  $z$ , здесь  $m$  - длина дуги (фиг. 1)

$$dm = \frac{dz}{\cos \delta} = \frac{dr}{\sin \delta}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{dr}{dm}$$

Движение газа на поверхности  $S_1$  описывается уравнениями [1, 3]

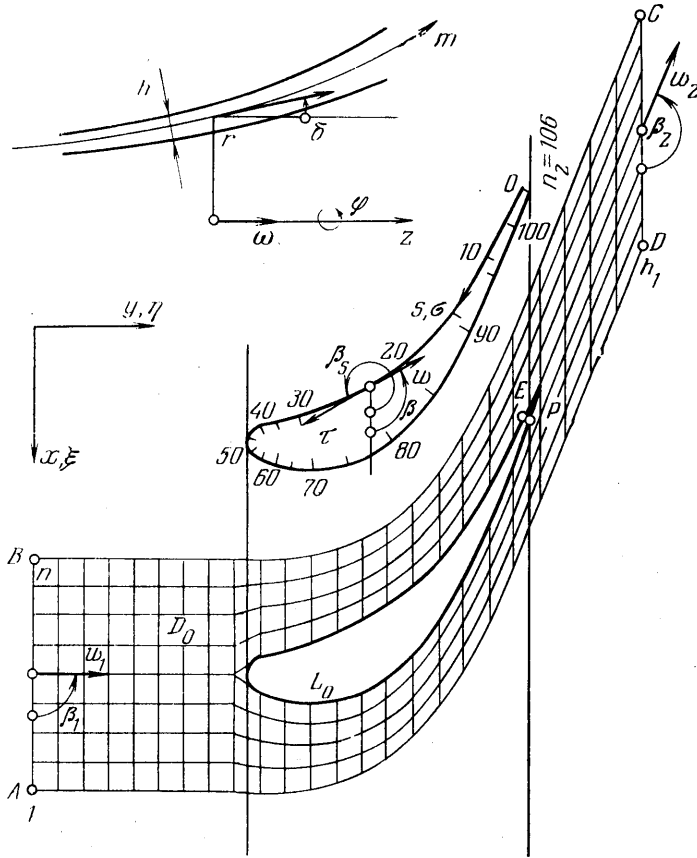
$$(1.1) \quad \frac{\partial w_m}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r w_\varphi)}{\partial m} = 2\omega r \sin \delta$$

$$h \frac{\partial (\rho w_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (\rho r h w_m)}{\partial m} = 0, \quad w_{\varphi, m} = (w_\varphi^2 + w_m^2)^{1/2}$$

$$i + \frac{1}{2}(w_{\varphi, m}^2 - u^2) = \text{const}, \quad \rho = \frac{p}{RT}, \quad \frac{p}{\rho^k} = \text{const}$$

Здесь  $w_{\varphi, m}$  - скорость течения,  $\rho$  - плотность,  $p$  - давление,  $i = \frac{k}{k-1} RT -$

энтальпия,  $\omega$  - угловая скорость вращения решетки,  $u = \omega r$ ,  $R$  - газовая постоянная,  $k$  - показатель адиабаты.



Фиг. 1

Область течения конформно отображается на плоскость безразмерных координат (фиг. 1)

$$(1.2) \quad x = \varphi, \quad y(m) = \int_0^m \frac{dm}{r}$$

$$(1.3) \quad w_x = r w_\varphi, \quad w_y = r w_m$$

При этом сохраняются углы линий тока с осями координат

$$(1.4) \quad \frac{w_\varphi}{w_m} = \frac{w_x}{w_y} = \operatorname{ctg} \beta$$

С учетом соотношений (1.2)–(1.4) система уравнений (1.1) на плоскости  $x, y$  принимает вид

$$(1.5) \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} = 2\omega r^2 \sin \delta \equiv \gamma$$

$$(1.6) \quad \frac{\sigma w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = -w_x \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} - w_y \frac{\partial \ln(\rho h)}{\partial y} \equiv q$$

$$(1.7) \quad \rho = \frac{p_1^*}{RT_1^*} \left[ 1 - \frac{k-1}{2kRT_1^*} (w_{\varphi,m}^2 + u_1^2 - u^2) \right]^{1/(k-1)}$$

Здесь  $p_1^*$  и  $T_1^*$  — соответственно давление и температура адиабатически заторможенного набегающего потока перед решеткой на радиусе  $r_1$ ,  $\gamma = \gamma(y)$  — интенсивность вихрей,  $q = q(x, y)$  — интенсивность источников на плоскости  $x, y$ ,  $h = h(y)$  — переменная толщина слоя.

Расчет течения в решетке, расположенной на поверхности вращения  $S_1$ , сводится к решению системы уравнений (1.5) — (1.7) относительно неизвестных  $w_x(x, y)$ ,  $w_y(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$ . Эта система эллиптическая, если  $M_w < 1$ , и гиперболическая, если  $M_w > 1$ .

Задача ставится в бесконечной полосе  $ABCD$ , включающей в себя один профиль (фиг. 1). Ширина полосы равняется шагу решетки  $t$ , входное  $AB$  и выходное  $CD$  сечения приближенно задаются на конечном достаточно большом расстоянии от решетки.

В прямой задаче требуется выполнение граничных условий: контур профиля при безотрывном обтекании является линией тока, на ней нормальная проекция вектора скорости  $w_n = 0$ ; заданы параметры набегающего потока  $w_1$ ,  $\beta$ ,  $p_1^*$ ,  $T_1^*$  (расход газа через решетку предполагается допредельным); на границах  $AD$  и  $BC$  выполняется условие периодичности течения; на выходной кромке конечной толщины используется какое-либо условие, эквивалентное условию Жуковского — Чаплыгина, и в частности равенство скоростей в некоторых точках  $E$  и  $P$ :  $|w_E| = |w_P|$ .

Точки  $E, P$  выбираются на выходной кромке в точках скачкообразного возрастания кривизны контура [3]. Координата  $r(z)$  образующей поверхности  $S_1$ , толщина слоя  $h(z)$ , угловая скорость  $\omega$  считаются известными.

2. В комплексных переменных  $\bar{w} = w_x - iw_y = |w|e^{i\beta}$  и  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$  система уравнений (1.5) и (1.6) может быть записана в виде

$$(2.1) \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} [q(z, \bar{z}) - i\gamma(z, \bar{z})]$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Из формулы Римана — Грина для любой функции  $F = F(z, \bar{z})$ , удовлетворяющей в области  $D$  с границей  $L$  определенным условиям (достаточным условием является непрерывность производной  $\partial F / \partial \bar{z}$ ), следует ее интегральное представление как обобщенной аналитической функции [7, 8]

$$(2.2) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{\partial F}{\partial \bar{\xi}} \frac{d\xi d\eta}{\xi - z}$$

Принимая в качестве функции  $F$  ее обобщенные (формальные) степени, логарифм, производные или интегралы скорости  $\bar{w}$  и разделяя действительную и мнимую части (2.2), можно получить различные парные интегральные уравнения относительно модуля скорости  $|w| = (w_x^2 + w_y^2)^{1/2}$  и угла  $\beta$ , обобщенных потенциала скорости  $\phi$  и функции тока  $\psi$ , кривизны линий тока ( $s$ ) и ортогоналей к ним ( $n$ )

$$(2.3) \quad K_s = \frac{d \ln w}{dn} + \frac{\gamma}{w}, \quad K_n = -\frac{d \ln w}{ds} + \frac{q}{w}$$

а также других параметров течения [9].

Поскольку уравнение (2.1) инвариантно относительно аналитических преобразований независимой переменной, то аналогичные интегральные уравнения можно получать также в любой области конформного отображения области течения  $Z = Z(z)$ , например, на круг, полуплоскость или полюсу [1].

Ниже используется простейший вариант уравнения с функцией  $F = \bar{w}(z, \bar{z})$ , рассматриваемой в области течения через решетку в плоскости  $x, y$ . Аналогичное уравнение применялось ранее в расчете безвихревого течения несжимаемой жидкости в слое переменной толщины [4].

Распространяя контур интегрирования  $L$  на профили решетки и на контур, уходящий в бесконечность перед и за решеткой, используя теорему Лиувилля и учитывая периодичность течения, получим

$$(2.4) \quad \bar{w}(z) = \bar{w}_\infty + \frac{1}{2it} \int_{L_0} \bar{w}(\zeta) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{t} (z - \zeta) d\zeta + \\ + \frac{1}{t} \iint_{D_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\xi}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{t} (z - \zeta) d\bar{\xi} d\eta$$

Здесь  $D_0$  — область одного, основного периода решетки  $ABCD$  с выбранным профилем;  $L_0$  — контур основного профиля, обходимый против часовой стрелки (фиг. 1).

Константа  $\bar{w}_\infty$  и скорость  $\bar{w}_2$  за решеткой ( $y = \infty$ ) находятся из соотношений

$$(2.5) \quad \bar{w}_\infty = \frac{1}{2} (\bar{w}_1 + \bar{w}_2)$$

$$(2.6) \quad \bar{w}_2 = \bar{w}_1 - \frac{1}{t} \int_{L_0} \bar{w}(\zeta) d\zeta - \frac{2i}{t} \iint_{D_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\xi}} d\bar{\xi} d\eta$$

Интеграл уравнения (2.4) по  $z$  дает обобщенный комплексный потенциал

$$(2.7) \quad \Phi(z) = \bar{w}_\infty z + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \bar{w}(\zeta) \ln \sin \frac{\pi}{t} (z - \zeta) d\zeta + \\ + \frac{1}{\pi} \iint_{D_0} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\xi}} \ln \sin \frac{\pi}{t} (z - \zeta) d\bar{\xi} d\eta + \text{const}$$

Заметим, что ядра интегралов в выражениях (2.4) и (2.7)

$$W_{\Gamma}(z - \zeta) = \frac{1}{2it} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{t} (z - \zeta) = W_{\Gamma x}(x - \xi, y - \eta) + iW_{\Gamma y}(x - \xi, y - \eta)$$

$$\Phi_{\Gamma}(z - \zeta) = \frac{1}{2i\pi} \ln \sin \frac{\pi}{t} (z - \zeta) = \varphi_{\Gamma}(x - \xi, y - \eta) + i\psi_{\Gamma}(x - \xi, y - \eta)$$

равны соответственно комплексной скорости и потенциалу течения в точке  $z = x + iy$  от решетки вихрей единичной интенсивности, расположенных в точках  $\zeta + nt$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ . Действительная и мнимая части ядер имеют вид

$$W_{\Gamma x}(x - \xi, y - \eta) = -\frac{1}{2t} \frac{\operatorname{sh}[2\pi(y - \eta)/t]}{\operatorname{ch}[2\pi(y - \eta)/t] - \cos[2\pi(x - \xi)/t]}$$

$$W_{\Gamma y}(x - \xi, y - \eta) = -\frac{1}{2t} \frac{\sin[2\pi(x - \xi)/t]}{\operatorname{ch}[2\pi(y - \eta)/t] - \cos[2\pi(x - \xi)/t]}$$

$$\varphi_{\Gamma}(x - \xi, y - \eta) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th}[\pi(y - \eta)/t]}{\operatorname{tg}[\pi(x - \xi)/t]}$$

$$\psi_{\Gamma}(x - \xi, y - \eta) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{2} \{ \operatorname{ch}[2\pi(y - \eta)/t] - \cos[2\pi(x - \xi)/t] \}$$

На контуре профиля

$$(2.8) \quad \bar{w}(\zeta) = |w(\zeta)| e^{-i\beta}, \quad d\zeta = e^{i\beta} d\sigma$$

где  $\beta$  — угол между осью  $X$  и вектором скорости течения  $w$  (фиг. 1),  $\beta_s$  — угол между осью  $X$  и вектором  $\tau$ , касательным к профилю.

В формуле (2.7) отделяем мнимую часть и устремляем точку  $z$  из области  $D_0$  на гладкий контур  $L_0$ . Из условия на контуре профиля  $\operatorname{Im} \Phi_{\Gamma}(s) = \operatorname{const}$  получаем линейное интегральное уравнение типа Фредгольма первого рода относительно скорости на профиле  $w(s)$ , ядро которого имеет логарифмическую особенность. После устранения особенности и использования соотношений (2.5) и (2.6) приходим к интегральному уравнению

$$(2.9) \quad w(s) \int_{L_0} K(s, \sigma) d\sigma + \int_{L_0} [w(\sigma) - w(s)] K(s, \sigma) d\sigma + C = \\ = \frac{y(s)}{2} \left( 2w_{1x} - \frac{1}{t} I_4 \right) - \frac{x(s)}{2} \left( 2w_{1y} + \frac{1}{t} I_3 \right) + I_1(x, y) + I_2(x, y)$$

$$K(s, \sigma) = -\psi_{\Gamma}(x - \xi, y - \eta) + \frac{y(s)}{2t}$$

$$I_1(x, y) = \iint_{D_0} q(\xi, \eta) \varphi_{\Gamma}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta,$$

$$(2.10) \quad I_2(x, y) = \iint_{D_0} \gamma(\eta) \psi_{\Gamma}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

$$I_3 = \iint_{D_0} q(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad I_4 = \iint_{D_0} \gamma(\eta) d\xi d\eta$$

Здесь  $x(s)$ ,  $y(s)$  — координаты контура профиля.

В левой части уравнения (2.9) первый интеграл берется численно по контуру  $L_0$ , за исключением малой окрестности точки  $s = \sigma$ , второй интеграл особенности не имеет.

Решение  $w(s)$  уравнения (2.9) зависит от интегралов  $I_1(x, y)$  и  $I_3$ , учитывающих сжимаемость  $\rho = \rho(w)$  и переменность толщины слоя  $h = h(y)$  в области  $D_0$ , а также от интегралов  $I_2(x, y)$  и  $I_4$ , учитывающих вращение решетки.

Для вычисления интегралов  $I_1(x, y)$  и  $I_3$  необходимы проекции скорости  $w_x(x, y)$ ,  $w_y(x, y)$  во внутренних точках  $(x, y)$  области течения  $D_0$ . Разделяя действительную и мнимую части выражения (2.4), имеем

$$(2.11) \quad w_x(x, y) = \frac{1}{2}(w_{1x} + w_{2x}) + I_5(x, y) + I_7(x, y)$$

$$w_y(x, y) = \frac{1}{2}(w_{1y} + w_{2y}) - I_6(x, y) - I_8(x, y)$$

$$I_5(x, y) = \int_{L_0} w(\sigma) W_{\Gamma x}(x - \xi, y - \eta) d\sigma,$$

$$I_6(x, y) = \int_{L_0} w(\sigma) W_{\Gamma y}(x - \xi, y - \eta) d\sigma$$

(2.12)

$$I_7(x, y) = \iint_{D_0} [-q(\xi, \eta) W_{\Gamma y}(x - \xi, y - \eta) + \gamma(\eta) W_{\Gamma x}(x - \xi, y - \eta)] d\xi d\eta$$

$$I_8(x, y) = \iint_{D_0} [q(\xi, \eta) W_{\Gamma x}(x - \xi, y - \eta) + \gamma(\eta) W_{\Gamma y}(x - \xi, y - \eta)] d\xi d\eta$$

Проекции скорости на бесконечности за решеткой определяются соотношением (2.6)

$$(2.13) \quad w_{2x} = w_{1x} - \frac{1}{t} \Gamma - \frac{1}{t} I_4, \quad w_{2y} = w_{1y} + \frac{1}{t} I_3, \quad \Gamma = \int_{L_0} w(\sigma) d\sigma$$

Интегральное уравнение (2.9) и условие  $|w_E| = |w_P|$  совместно с выражениями (2.10) — (2.13) образуют замкнутую систему относительно неизвестной функции  $w(s)$  и постоянной  $C$ , решаемую итерациями по плотности  $\rho$ .

Интегральное уравнение (2.9) записывается в безразмерном виде и сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Для этого контур профиля разбивается на участки со сгущением на входной и выходной кромках. Интегралы по контуру (применялась трехточечная формула Симпсона) заменяются конечными суммами, и решается полученная система линейных уравнений.

Задача дозвукового течения в слое переменной толщины квазилинейная и равномерно-эллиптическая. Она имеет единственное решение, к которому должны сходиться даже простые итерации.

Трансзвуковая задача для канала или решетки профилей, когда звуковая линия не пересекает межлопаточного канала или при  $M_\infty < 1$  для изолированного профиля, является глобально-эллиптической и локально-смешанной. Вообще такая задача не имеет единственного решения, хотя для некоторых частных случаев известны доказательства существования единственных решений с местными сверхзвуковыми зонами и непрерывным переходом через скорость звука. Учитывая, что в каждой итерации развитого метода по существу решается задача течения несжимаемой жидкости в слое переменной толщины  $h^{N-1} = h\rho^{N-1}$ , можно рассчитывать на получение непрерывных трансзвуковых решений с местными сверхзвуковыми скоростями.

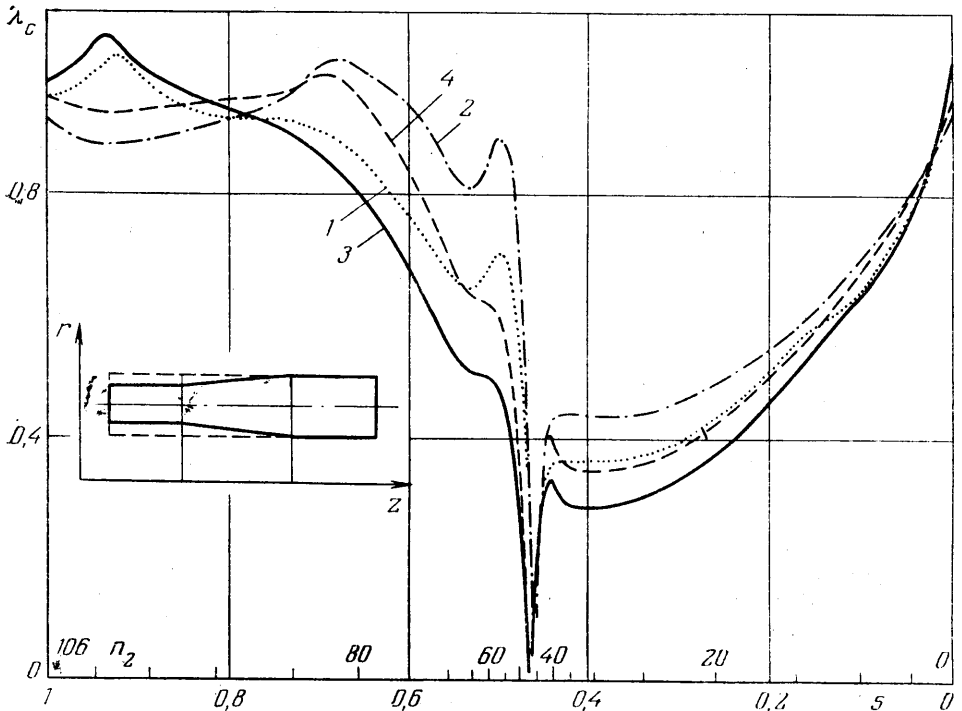
При этом целесообразно использовать более сложную итерационную схему

$$w^{(N)} = \kappa A[w^{(N-1)}] + (1 - \kappa)w^{(N-1)}$$

с коэффициентом релаксации  $\kappa < 1$ , подбираемым эмпирически из условия сходимости приближений. Здесь  $A$  — интегральный оператор относительно  $w(s)$ , соответствующий уравнению (2.9), и интегродифференциальный оператор относительно  $h(y)\rho(x, y)$ .

Отметим, что применение этой итерационной схемы эквивалентно применению к уравнению  $w = A[w]$  метода установления с шагом по фиктивному времени  $\tau$ :  $\Delta\tau = \kappa$ ,  $A[w] - w = \Delta w / \Delta\tau$ .

3. Для практических расчетов форма лопатки турбомашини задается в двух цилиндрических сечениях  $r = \text{const}$ , между которыми располагается поверхность  $S_1$ . Поверхность лопатки считается линейчатой, и находится профиль, полученный при пересечении поверхности лопатки с поверхностью  $S_1$ . Затем полученный профиль по формулам (1.2) отображается на плоскость  $x, y$ , и строится фиксированная расчетная сетка в области течения (фиг. 1).



Фиг. 2

Интегралы по площади  $D_0$  вычислялись с помощью девятиточечной формулы Симпсона для четырех соседних клеток сетки.

В интеграле  $I_1(x, y)$  функция  $\varphi_{\Gamma}(x-\xi, y-\eta)$  многозначная, имеющая особую точку на контуре профиля при  $x=\xi, y=\eta$ . Для выделения однозначной ветви  $\varphi_{\Gamma}$  в окрестности точки  $(x, y)$  области  $D_0$  делается разрез, параллельный оси  $x$ , шириной  $2\Delta\eta$ . Непрерывный переход с одной ветви  $\varphi_{\Gamma}$  на другую осуществляется по формуле

$$\varphi_{\Gamma}(x-\xi, y-\eta) = \frac{1}{2\pi} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{th}[\pi(y-\eta)/t]}{\operatorname{tg}[\pi(x-\xi)/t]} - \pi k \operatorname{sgn} \frac{1}{t} (y-\eta) \right]$$

где  $k=k_1+1, k_1=E[(x-\xi)/t]$  — наибольшее целое, не превышающее величины  $(x-\xi)/t$ .

В интеграле  $I_2(x, y)$  функция  $\psi_{\Gamma}(x-\xi, y-\eta)$  имеет логарифмическую особенность на контуре профиля при  $x=\xi, y=\eta$ . Для ее устранения делается, как и в интеграле  $I_1(x, y)$ , разрез шириной  $2\Delta\eta$ . Вычисление интегралов  $I_3, I_4, I_5(x, y), I_6(x, y)$  трудностей не представляет.

В интегралах  $I_7(x, y), I_8(x, y)$  подынтегральные функции имеют особенности в точке  $y=\eta, x=\xi$ , а для граничных линий  $AD, BC$  — и в точках  $y=\eta, x=\xi \pm t$ . При вычислении интегралов эти особенности предварительно устраняются.

Итерационный процесс по плотности газа организован следующим образом. В первом приближении рассчитывается течение жидкости постоянной плотности  $\rho=\operatorname{const}$ , в слое постоянной толщины  $h=\operatorname{const}$  ( $q(x, y)=0$ ), переменного радиуса  $r$ . В правой части уравнения (2.9) полагается  $I_1(x, y)=0, I_3=0$ , вычисляются двойные интегралы  $I_2(x, y), I_4$  и находится решение интегрального уравнения. По найденному распределению  $w(s)$  рассчитывается циркуляция  $\Gamma$  и из (2.13) — проекция  $w_{2x}$  скорости за решеткой. Затем из (2.11) находятся проекции  $w_x(x, y), w_y(x, y)$  скорости в области  $D_0$ .

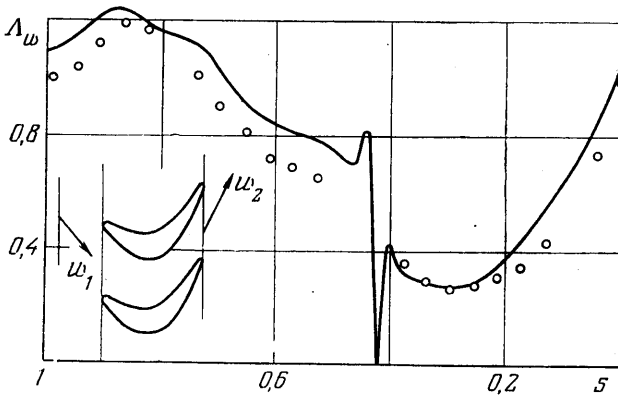
Во втором и следующем приближениях вычисляется плотность  $\rho(x, y)$  (1.7), рассчитываются двойные интегралы  $I_1(x, y), I_3$  и вновь решается интегральное уравнение (2.9).

4. В качестве примера на ЭВМ типа БЭСМ-6 было рассчитано течение в решетке соплового венца осевой газовой турбины (фиг. 1) с числом лопаток  $z=94$ , расположенной на цилиндрической поверхности  $r=\text{const}$ . На профиле было расположено  $n_2+1=107$  расчетных точек. Внешняя фиксированная сетка в области  $D_0$  состояла из  $n \times n_1=12 \times 45$  узлов, показатель адиабаты  $k=1.33$ ,  $\epsilon=0.006$ . Исследовано влияние  $\rho$  и переменности толщины слоя  $h$  для приведенной скорости  $\lambda_{2c}=0.90$ .

На фиг. 2 приведены расчетные зависимости  $\lambda_c$  от  $s=s/s_x$ , где  $s_x$  — длина контура профиля.

В слое  $h=\text{const}$  при переходе от расчета  $\rho=\text{const}$  (кривые 4) к  $\rho=\text{var}$  (кривые 3) и в слое  $h=\text{var}$  при переходе от расчета  $\rho=\text{const}$  (кривые 2) к  $\rho=\text{var}$  (кривые 1) получено одинаковое влияние сжимаемости: на выпуклой стороне профиля координата  $\lambda_{c \max}$  смещается к выходной кромке и уменьшается длина участка диффузорного течения, на вогнутой стороне характер обтекания не изменяется.

В расчете варианта 4 решение находится сразу, а для расчета варианта 3 потребовалось семь итераций. В этом случае получена локальная область сверхзвукового течения небольшой протяженности. При  $\lambda_{c \max} < 1.2$  последовательные приближения еще сходились, причем введение коэффициента релаксации  $\kappa < 1$  не уменьшало их необходимого числа. При  $\lambda_{c \max} > 1.2$  последовательные приближения начали расходиться.



Фиг. 3

Координата передней критической точки определяется с точностью шага сетки на входной кромке профиля  $\Delta s=0.004$ . При переходе от  $h=\text{const}$  (вариант 4) к  $h=\text{var}$  (вариант 2) передняя критическая точка сместилась на  $\Delta s=0.004$  в сторону вогнутой части профиля.

Расчет течения в решетке рабочего венца при  $\lambda_{2w}=0.821$  удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными (фиг. 3), где  $\lambda_w=\lambda_w/\lambda_{2w}$ .

Поступила 17 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
2. Степанов Г. Ю. Гидродинамическая теория решеток. В кн. «Механика в СССР за 50 лет», т. 2. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
3. Жуковский М. И. Аэродинамический расчет потока в осевых турбомашинах. Л., «Машиностроение», 1967.
4. Викторов Г. В. Гидродинамическая теория решеток. М., «Высшая школа», 1969.
5. Раухман Б. С. Расчет обтекания несжимаемой жидкостью решетки профилей на осесимметричной поверхности тока в слое переменной толщины. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
6. Богод А. Б., Замтфорт Б. С., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Об использовании процесса установления по времени при решении задач стационарного обтекания газом решеток профилей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
7. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1958.
9. Степанов Г. Ю. Некоторые приложения краевых задач в гидродинамической теории крыла и решеток турбомашин. Всесоюзная конференция по крайвым задачам и их приложениям в механике жидкости и газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.