

**ВЛИЯНИЕ КРИВИЗНЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ
НА ОТРЫВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ**

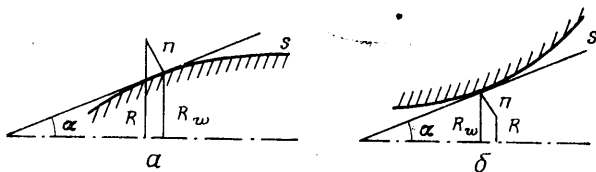
Г. М. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

(Москва)

В ряде работ исследовалось влияние различных факторов на отрыв пограничного слоя. Это влияние наиболее наглядно проявляется в изменении величины критерия отрыва пограничного слоя, т. е. безразмерной комбинации градиента давления и других параметров, достигающей в сечении отрыва определенного значения. Увеличение критерия отрыва означает, что при прочих равных условиях пограничный слой может выдержать, не отрываясь, больший положительный градиент давления, уменьшение — что отрыв пограничного слоя наступает при меньших градиентах давления.

Влияние сжимаемости на критерий отрыва турбулентного пограничного слоя было рассмотрено Н. М. Беляниным [1], в [2] изучено изменение критерия отрыва плоского турбулентного пограничного слоя при нагревании или охлаждении стенки, в [3] — влияние на величину критерия отрыва электромагнитных сил и распределенного отсоса, в [4] — отсоса, сосредоточенного на малой длине. В [5] приводится формула для критерия отрыва несжимаемого турбулентного пограничного слоя с учетом поперечной кривизны поверхности. Однако получена она не вполне корректно. В настоящей работе выводятся формулы, дающие зависимость критериев отрыва ламинарного и турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе, учитывающие влияние кривизны поперечного сечения поверхности. Это влияние может стать существенным в случае, когда толщина пограничного слоя имеет порядок радиуса кривизны поперечного сечения обтекаемой поверхности.

1. Рассмотрим пограничный слой, образующийся при обтекании осесимметричного тела или при течении в осесимметричном канале. Пусть s — координата, отсчитываемая вдоль образующей, n — по нормали к поверхности, R — расстояние до оси симметрии (фиг. 1) $a - (\partial R/\partial n)_w > 0$.



Фиг. 1

$b - (\partial R/\partial n)_w < 0$). Предположим, что образующая не имеет изломов. Тогда уравнения пограничного слоя сжимаемого газа при осесимметричном течении имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial R \rho u}{\partial s} + \frac{\partial R \rho v}{\partial n} = 0$$

$$(1.2) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial s} + \rho v \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{dp}{ds} = \left(\frac{1}{R} \right) \frac{\partial R \tau}{\partial n}$$

$$(1.3) \quad \rho c_v \left(u \frac{\partial T}{\partial s} + v \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n} \kappa R \frac{\partial T}{\partial n} - \frac{p}{R} \left(\frac{\partial R u}{\partial s} + \frac{\partial R v}{\partial n} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2$$

где ρ — плотность, p — давление, T — температура газа, u и v — проекции скорости на направления s и n , μ и κ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, c_v — теплоемкость при постоянном объеме, τ — напряжение трения, равное для ламинарного пограничного слоя

$$(1.4) \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n}$$

Поскольку не предполагается, что толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с радиусом кривизны поперечного сечения обтекаемой поверхности R_w , R — функция как s , так и n .

На стенке всегда выполняются условия

$$(1.5) \quad u=0, \quad v=0 \quad (n=0)$$

Из уравнения движения (1.2) и его производной по n с учетом уравнения неразрывности (1.1) и граничных условий (1.5) следует, что при $n=0$

$$(1.6) \quad R_w \frac{dp}{ds} = \left(\frac{\partial R \tau}{\partial n} \right)_w, \quad \left(\frac{dp}{ds} \right) \left(\frac{\partial R}{\partial n} \right)_w = \left(\frac{\partial^2 R \tau}{\partial n^2} \right)_w$$

где w обозначает, что величины берутся при $n=0$.

В точке отрыва пограничного слоя выполняется условие

$$(1.7) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (n=0)$$

Дифференцируя уравнения (1.2) по n 2 и 3 раза и учитывая (1.1), (1.5), (1.7), получим, что в точке отрыва при $n=0$

$$(1.8) \quad \left(\frac{\partial^3 R \tau}{\partial n^3} \right)_w = 0, \quad \left(\frac{\partial^4 R \tau}{\partial n^4} \right)_w = 0$$

Более высокие производные уже не могут быть выражены только через первую производную давления dp/ds .

Чтобы из формул (1.6), (1.8) получить условия на производные скорости при $n=0$, необходимо знать производные от R и μ по n . Из фиг. 1 видно, что величина

$$(1.9) \quad R = R_w \pm n \cos \alpha = R_w (1 + An/\delta) \quad A = \pm (\delta/R_w) \cos \alpha$$

где α — угол между касательной к образующей и осью симметрии, δ — толщина пограничного слоя, знак плюс соответствует случаю внешнего обтекания тела, а минус — течению в канале. Из (1.9) следует, что

$$(1.10) \quad \frac{\partial R}{\partial n} = AR_w, \quad \frac{\partial^{(k)} R}{\partial n^k} = 0 \quad (k \geq 2)$$

Так как μ — известная функция температуры, то для вычисления производных μ по n необходимо знание производных T по n .

Рассмотрим прежде всего случай теплоизолированной стенки. Граничное условие для температуры

$$(1.11) \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad (n=0)$$

Рассматривая уравнение (1.3) и его производную по n на поверхности, т. е. при $n=0$, и учитывая (1.5), (1.7) и (1.11), получаем

$$(1.12) \quad \left(\frac{\partial^3 T'}{\partial n^3} \right)_w = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 T}{\partial n^3} \right)_w = 0$$

Так как μ — функция только T , то из (1.11) и (1.12) следует:

$$(1.13) \quad \left(\frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_w = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial n^2} \right)_w = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 \mu}{\partial n^3} \right)_w = 0$$

Используя выражения (1.9) для производных R и (1.13) для производных μ при $n=0$, находим из формул (1.6) и (1.8) значения производных скорости u на стенке

$$(1.14) \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_w = \frac{1}{\mu_w} \frac{dp}{ds}, \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} \right)_w = -\frac{A}{\mu_w \delta} \frac{dp}{ds}$$

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial n^4} \right)_w = \frac{3A^2}{\mu_w \delta^2} \frac{dp}{ds}, \quad \left(\frac{\partial^5 u}{\partial n^5} \right)_w = -\frac{12A^3}{\mu_w \delta^3} \frac{dp}{ds}$$

Будем искать профиль скорости в точке отрыва ламинарного пограничного слоя в виде полинома шестой степени по n

$$(1.15) \quad u = \sum_{k=0}^6 a_k n^k$$

Для определения коэффициентов a_k используем условия (1.5), (1.7) и (1.14). Потребуем также гладкого сопряжения искомого профиля с профилем вне пограничного слоя, т. е. потребуем, чтобы на границе пограничного слоя выполнялось условие

$$u=U, \quad \partial u / \partial n = 0 \quad (n=\delta)$$

Из этого соотношения получаем

$$(1.16) \quad a_6 = -(1/6\delta^5) \sum_{k=1}^5 k a_k \delta^{k-1}$$

Из (1.5), (1.7), (1.14) находим

$$(1.17) \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2\mu_w} \frac{dp}{ds}, \quad a_3 = -\frac{A}{6\mu_w \delta} \frac{dp}{ds}$$

$$a_4 = \frac{A^2}{8\mu_w \delta^2} \frac{dp}{ds}, \quad a_5 = -\frac{A^3}{10\mu_w \delta^3} \frac{dp}{ds}$$

Используя выражения (1.16), (1.17), можем записать искомый профиль скорости в виде

$$\frac{u}{U} = \frac{\delta^2}{\mu_w U} \frac{dp}{ds} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{n}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{n}{\delta} \right)^6 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{A}{6} \left[\left(\frac{n}{\delta} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\delta} \right)^6 \right] + \frac{A^2}{8} \left[\left(\frac{n}{\delta} \right)^4 - \frac{2}{3} \left(\frac{n}{\delta} \right)^6 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{A^3}{10} \left[\left(\frac{n}{\delta} \right)^5 - \frac{5}{6} \left(\frac{n}{\delta} \right)^6 \right] \right\}$$

Рассматривая это уравнение в точке на границе пограничного слоя, получим соотношение между параметрами внешнего потока и толщиной пограничного слоя, выполняющееся в точке отрыва пограничного слоя, т. е. так называемый критерий отрыва

$$(1.18) \quad \xi_i^* = \frac{dp}{ds} \frac{\delta^2}{\mu_w U} = 3 \left(1 - \frac{A}{4} + \frac{A^2}{8} - \frac{A^3}{20} \right)^{-1}$$

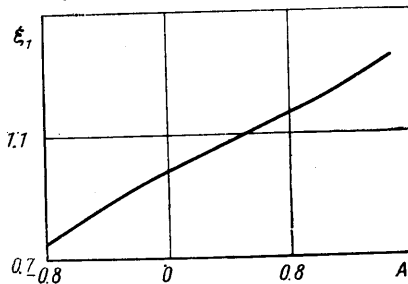
Поскольку при выводе (1.18) не предполагалось, что пограничный слой тонек по сравнению с радиусом сечения тела, значение полученного критерия отрыва зависит от отношения δ/R_w и угла наклона касательной к образующей, как следует из выражения (1.9) для параметра A .

На фиг. 2 показана зависимость $\xi_i^*/\xi_i^{*0} = \xi_i$ от A , вычисленная по формуле (1.18) (ξ_i^{*0} — значение параметра отрыва для плоского пограничного слоя, т. е. при $\delta/R_w \rightarrow 0$). Как видно из фиг. 2, поправка к величине критерия отрыва, связанная с конечностью отношения δ/R_w , невелика. Так, например, при отрыве на цилиндрическом участке поверхности ($\cos \alpha = 1$) при $\delta/R_w \sim 1$ значение критерия отрыва изменяется на величину $\sim 20\%$ по сравнению с его значением для плоского пограничного слоя.

Поправка при обтекании тел и при течении в канале оказывается разного знака. При обтекании тонких тел значение критерия отрыва возрастает, т. е. при одинаковой толщине пограничного слоя и скорости внешнего потока пограничный слой на тонком осесимметричном теле может выдержать больший положительный градиент давления, чем плоский пограничный слой. При течении же в канале поправка отрицательна, т. е. при прочих равных условиях отрыв будет происходить быстрее, чем в плоском канале.

Физически это можно объяснить тем, что при обтекании тонкого осесимметричного тела объем газа, движущийся с малой скоростью у стенки, относительно меньше (по сравнению со всем объемом пограничного слоя), чем в плоском пограничном слое. Поэтому дополнительное количество движения, получаемое пристеночными частицами из внешней части пограничного слоя, на единицу объема оказывается больше, чем в плоском пограничном слое, что и позволяет преодолеть без отрыва больший градиент давления. При обратном знаке кривизны поверхности (при течении в канале) объем газа у стенки относительно больше, чем в плоском пограничном слое, и эффект оказывается обратным: получая на единицу объема меньше количества движения, частицы отрываются от стенки при меньшем, чем при плоском течении, градиенте давления.

Рассмотрим теперь тот случай, когда стенка не теплоизолирована. Критерий отрыва плоского турбулентного пограничного слоя на нетеплоизолированной стенке был получен в [2]. Для вывода критерия отрыва ламинарного слоя при осесимметричном течении около нетеплоизолированной поверхности воспользуемся опять формулами (1.6)–(1.9). Из них и из соотношений (1.12) следует, что и в этом случае значения производных скорости u на стенке вплоть до пятого порядка зависят только от параметров первого порядка разложения величин внешнего потока в малой окрестности точки отрыва. Однако формулы значительно усложняются. Поэтому ограничимся при нетеплоизолированной стенке построением для скорости u полинома четвертой степени. Из (1.6) с учетом (1.10),



Фиг. 2

(1.7) находим

$$(1.19) \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial n^3} \right)_w = - \left[\frac{2}{\mu_w} \left(\frac{d\mu}{dT} \right)_w \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w + \frac{A}{\delta} \right] \frac{1}{\mu_w} \frac{dp}{ds}$$

Записывая скорость в виде полинома четвертой степени относительно n и требуя гладкого сопряжения на внешней границе пограничного слоя (обращения в нуль производной u по n), используя условия (1.5)–(1.7) и (1.19), получим

$$u = \sum_{h=1}^4 a_h n^h, \quad a_0=0, \quad a_1=0, \quad a_2 = \frac{1}{2\mu_w} \frac{dp}{ds}$$

$$a_3 = - \frac{1}{6} \left[\frac{2}{\mu_w} \left(\frac{d\mu}{dT} \right)_w \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w + \frac{A}{\delta} \right] \frac{1}{\mu_w} \frac{dp}{ds}$$

$$a_4 = \frac{1}{4\mu_w \delta^2} \frac{dp}{ds} \left[-1 + \frac{\delta}{\mu_w} \left(\frac{d\mu}{dT} \right)_w \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w + \frac{A}{2} \right]$$

Профиль скорости при этом имеет вид

$$(1.20) \quad u = \frac{\delta^2}{2\mu_w} \frac{dp}{ds} \left\{ \left[\left(\frac{n}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\delta} \right)^4 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3} \left[\frac{2\delta}{\mu_w} \left(\frac{d\mu}{dT} \right)_w \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w + A \right] \left[\left(\frac{n}{\delta} \right)^3 - \frac{3}{4} \left(\frac{n}{\delta} \right)^4 \right] \right\}$$

Требуя, чтобы $u=U$ при $n=\delta$, получим критерий отрыва

$$(1.21) \quad \xi_i^* = \frac{\delta^2}{\mu_w U} \frac{dp}{ds} = \xi_i^{*0} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left[\frac{2\delta}{\mu_w} \left(\frac{d\mu}{dT} \right)_w \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w + A \right] \right\}^{-1}$$

где ξ_i^{*0} обозначает величину критерия отрыва на плоской теплоизолированной стенке (т. е. при $(\partial T/\partial n)_w=0$ и $R_w \rightarrow \infty$). Из (1.21) видно, что влияние радиуса кривизны сечения поверхности R_w здесь качественно такое же (в ту же сторону), как и на теплоизолированной стенке, т. е. при внешнем обтекании тел ($A>0$) величина критерия отрыва возрастает, а при течении в канале ($A<0$) уменьшается. Влияние на критерий отрыва температуры стенки определяется в (1.21) членом

$$(1.22) \quad -(\delta/3\mu_w) (d\mu/dT)_w (\partial T/\partial n)_w$$

Для газов $d\mu/dT>0$ и все определяется знаком $(\partial T/\partial n)_w$. При температуре стенки ниже равновесной (охлаждаемая стенка) тепловой поток направлен к стенке ($\partial T/\partial n>0$), выражение (1.22) отрицательно и из (1.21) при этом следует, что $\xi_i^* > \xi_i^{*0}$. При нагревании стенки явление будет обратным: $(\partial T/\partial n)_w < 0$ и $\xi_i^* < \xi_i^{*0}$.

Следует отметить, что, хотя для ламинарного слоя в газе качественно эффект влияния температуры стенки получился такой же, как в [2] для турбулентного пограничного слоя на плоской поверхности, физическое объяснение этого влияния совершенно иное. В [2] увеличение значения критерия отрыва при охлаждении стенки объясняется «уменьшением чувствительности (турбулентного) пограничного слоя к градиенту давления вследствие увеличения плотности газа в пристеночной области». Из формулы же (1.21) видно, что при ламинарном пограничном слое плотность непосредственно не входит в выражение критерия отрыва. Изменение критерия отрыва ламинарного пограничного слоя при охлаждении или нагревании стенки определяется только изменением коэффициента вязкости μ . Если $d\mu/dT>0$ и стенка охлаждается, то величина коэффициента вязкости у стенки падает, следовательно, уменьшается при прочих равных условиях величина силы трения, дей-

ствующей со стороны стенки на частицы газа. Так как эта сила направлена против потока, то ее уменьшение создает возможность преодоления большего градиента давления. Для сред, в которых $d\mu/dT < 0$, эффект будет обратным.

2. В случае турбулентного пограничного слоя остаются справедливыми уравнения (1.1), (1.2), если под τ понимать сумму ламинарного и турбулентного напряжения трения. При турбулентном движении непосредственное построение профиля скорости сопряжено с большими трудностями, однако тем же приемом, что и ранее, можно построить профиль напряжения трения τ . Такое построение для плоского пограничного слоя впервые было проведено в [6]. Эксперименты, проведенные при плоском пограничном слое в несжимаемой жидкости, показали, что в обычных точках получающееся путем построения полинома распределение величины τ поперек пограничного слоя может очень сильно отличаться от наблюдающегося в эксперименте. Но в сечении отрыва пограничного слоя совпадение расчетных и экспериментальных данных оказывается вполне удовлетворительным [7]. Для построения полинома $\tau(n)$ в сечении отрыва можно воспользоваться соотношениями (1.6), (1.8). К ним следует добавить требование обращения в нуль напряжения трения на стенке (в точке отрыва) и на внешней границе

$$(2.1) \quad \tau=0 \quad (n=0), \quad \tau=0 \quad (n=\delta)$$

Можно требовать также гладкости кривой $\tau(n)$ на внешней границе пограничного слоя, т. е. обращения в нуль при $n=\delta$ определенного числа производных τ по n . По поводу выбора граничных условий для τ необходимо сделать следующие замечания. При дальнейшем преобразовании полученное выражение τ приравнивается к значению τ по формуле Прандтля с использованием той или иной зависимости длины пути смещения от расстояния от стенки. При этом на внешней границе пограничного слоя в силу сложности происходящих явлений зависимость длины пути смещения от расстояния от стенки не универсальна.

Правда, как показывают расчеты различных авторов и их сравнение с экспериментами, это оказывает слабое влияние на общую форму профиля скорости в пограничном слое. Но отсюда следует, что не имеет смысла требовать большой точности для полинома $\tau(n)$ вблизи внешней границы пограничного слоя. В частности, не получится существенного уточнения, если требовать высокой степени гладкости кривой $\tau(n)$ при сопряжении с внешним потоком. В то же время такое требование будет приводить к большим неоправданным усложнениям расчетов. Поэтому в дальнейшем будем ограничиваться условием обращения в нуль на внешней границе пограничного слоя только самого напряжения трения τ .

Вблизи стенки находится ламинарный подслой. В настоящее время нет достаточно четкого представления о толщине ламинарного подслоя в сечении отрыва (тем более для сжимаемого газа при широком диапазоне изменения скорости внешнего потока). Так как в сечении отрыва трение на стенке обращается в нуль (в том числе обращается в нуль и ламинарное трение), то вообще понятие ламинарного подслоя как зоны, где ламинарное трение намного больше турбулентного, для сечения отрыва, возможно, теряет смысл. Следовательно, при построении профиля скорости в сечении отрыва в настоящее время нельзя получить значительного уточнения, рассматривая двухслойную модель пограничного слоя.

В связи с этим в сечении отрыва профиль скорости будем строить вне узкой зоны у самой стенки, пренебрегая ее толщиной, т. е. записы-

вая граничные условия при $n=0$. Скорость на внешней границе этой зоны в сечении отрыва достаточно близка к нулю, но производные скорости уже могут иметь конечное значение. По этой причине при построении полинома турбулентного трения τ можно использовать формулы (1.6), для вывода которых необходимо было только равенство нулю скорости на поверхности, но использование формул (1.8) не внесет, по видимому, существенных уточнений, так как для их справедливости необходимо требовать равенства нулю производной $du/\partial n$, которая, как указывалось выше, на малом расстоянии от стенки может уже иметь конечное значение.

В работе [5] для турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости строится полином для произведения $R\tau$ с использованием на стенке только первого условия (1.6). Но такое построение для точки отрыва некорректно, так как в точке отрыва $\tau_w=0$ и из первого соотношения (1.6) выпадает R_w . Таким образом, система граничных условий, принятая в [5], в сечении отрыва не содержит R_w , в силу чего получающаяся зависимость τ от R_w в сечении отрыва оказывается необоснованной. Учитывая все сделанные выше замечания, будем искать зависимость τ от n в сечении отрыва турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе в виде полинома третьей степени, удовлетворяющего граничным условиям (2.1) и обоим условиям (1.6). Определяя из указанных соотношений коэффициенты с учетом формул (1.9), получим

$$\tau = \sum_{j=0}^3 a_j \left(\frac{n}{\delta}\right)^j, \quad a_0=0, \quad a_1=\delta \frac{dp}{ds}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} A \delta \frac{dp}{ds}, \quad a_3 = -\delta \frac{dp}{ds} \left(1 - \frac{A}{2}\right)$$

где A зависит от δ/R_w по формуле (1.9). При этом выражение для τ принимает вид

$$(2.2) \quad \tau = \delta \frac{dp}{ds} \frac{n}{\delta} \left(1 - \frac{n}{\delta}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{A}{2}\right) \frac{n}{\delta}\right]$$

Чтобы получить уравнение для определения профиля скорости, приравняем выражение (2.2) для τ выражению τ по формуле Прандтля [8]

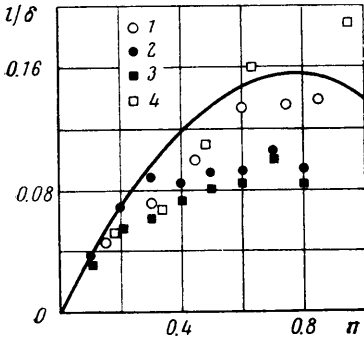
$$(2.3) \quad \tau = \rho l^2 (\partial u / \partial n)^2$$

где l — длина пути смешения. Для зависимости пути смешения l от n применяются различные формулы [5]. Вблизи стенки (вне области ламинарного подслоя) поведение l хорошо аппроксимируется выражением $l=0.4n$. Вблизи внешней границы пограничного слоя, по опытам Никурадзе, $l=0.14\delta$. Часто вводятся сложные формулы, учитывающие тонкости изменения l в ламинарном подслое. Как указывалось выше, в сечении отрыва такое усложнение не оправдано, так же как уточнения вблизи внешней границы. Часто при $l/\delta \geq 0.2$ просто полагают $l=\text{const}$. Задание $l(n)$ в виде двух отрезков прямых неудобно для получения аналитических выводов. Поэтому будем задавать l в виде квадратичной функции n , такой, что при $n=0$ $dl/dn=0.4$, а при $n=\delta$ $l=0.14\delta$

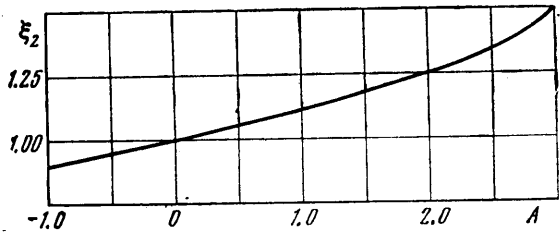
$$(2.4) \quad l/\delta = 0.4(n/\delta) - 0.26(n/\delta)^2$$

На фиг. 3 сплошной линией нанесена кривая $l(n)$, рассчитанная по формуле (2.4). Там же нанесены экспериментальные точки, дающие распределение $l(n)$, взятые из [9] (1, 2) и [10] (3, 4). В обоих работах исследовался пограничный слой перед зоной взаимодействия скачка с пограничным слоем (2, 3) и за ней (1, 4). Ин-

тенсивность скачка была такова, что отрыва пограничного слоя не происходило (хотя давление в зоне взаимодействия повышалось в 2.3–3 раза). В [9] описаны эксперименты на теплоизолированной стенке плоского сопла при числе M потока вне пограничного слоя, равном 2.9, и числе Рейнольдса, подсчитанном по толщине пограничного слоя перед областью взаимодействия и равном $1.4 \cdot 10^6$. В [10] исследовалось взаимодействие ударной волны с пограничным слоем в осесимметричном канале при $M=4$ и $Re_\delta=9 \cdot 10^4$. Из фиг. 3 видно, что даже при сравнительно больших числах M и общей сложной картине течения расчет по формуле (2.4) дает вполне приемлемые результаты.



Фиг. 3



Фиг. 4

Следует еще сделать замечание о применимости формул для пути смешения при обтекании тонких осесимметричных тел. Если радиус кривизны сечения поверхности R_w станет много меньше (или порядка) длины смешения, то, по всей вероятности, влияние такой резко искривленной стенки на турбулентное смешение будет существенно иным, чем в плоском пограничном слое, и непосредственное использование констант, взятых из экспериментов с плоским слоем, будет недопустимо. Однако, как следует из экспериментов, существенное изменение l , т.е. существенное влияние стенки на характер турбулентного смешения, происходит на расстояниях $n < 0.2\delta$. При $\delta/R_w \sim 1$ (и даже несколько больше единицы) в области, где влияние стенки существенно, $l/R_w \sim 0.1$ (или меньше). Поэтому можно с полным основанием предположить, что для $\delta/R_w \sim 1$ формулы типа (2.4), в которых использованы константы, полученные в опытах с плоским пограничным слоем, будут давать вполне удовлетворительные результаты.

Для получения уравнения, позволяющего определить профиль скорости, приравняем выражение для τ (2.2) выражению (2.3), подставив в последнее значение l из формулы (2.4)

$$\begin{aligned} \rho_\infty U^2 (0.4n^\circ - 0.26n^{\circ 2})^2 \rho^\circ \left(\frac{\partial u^\circ}{\partial n^\circ} \right)^2 = \\ = \delta \left(\frac{dp}{ds} \right) n^\circ (1 - n^\circ) [1 + (1 - 0.5A)n^\circ] \end{aligned}$$

где $u^\circ = u/U$, $n^\circ = n/\delta$, $\rho^\circ = \rho/\rho_\infty$, ρ_∞ — значение плотности на границе пограничного слоя. Отсюда находим выражение производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\circ}{\partial n^\circ} \sqrt{\rho^\circ} = \left(\frac{\delta}{\rho_\infty U^2} \frac{dp}{ds} \right)^{0.5} \times \\ \times \left\{ \frac{(1 - n^\circ) [1 + (1 - 0.5A)n^\circ]}{n^\circ (0.4 - 0.26n^{\circ 2})} \right\}^{0.5} \end{aligned}$$

Интегрируя это выражение поперек пограничного слоя от стенки до внешней границы, получим соотношение, связывающее в точке отрыва

параметры внешнего потока и характерный размер пограничного слоя

$$(2.5) \quad \int_0^1 \sqrt{\rho^0} du^0 = \left(\frac{\delta}{\rho_\infty U^2} \frac{dp}{ds} \right)^{0.5} \int_0^1 \left\{ \frac{(1-n^0)[1+(1-0.5A)n^0]}{n^0(0.4-0.26n^0)^2} \right\}^{0.5} dn^0$$

Для проверки допустимости всех сделанных выше предположений сравним значение критерия отрыва, вычисленное по формуле (2.5), с имеющимися экспериментальными данными для плоского турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. В этом случае значение интеграла в левой части (2.5) равно единице, а в правой ~ 5.480 . Тогда в точке отрыва $(\delta/\rho_\infty U^2)(dp/ds) = 0.033$.

Профиль скорости в точке отрыва плоского турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости с достаточной степенью точности аппроксимируется прямой [1]. Поэтому $\delta^* \approx 0.5\delta$. Подставляя это в предыдущую формулу, получим значение критерия отрыва, подсчитанное по δ^* , вытекающее из формулы (2.5) $(\delta^*/\rho_\infty U^2)(dp/ds) = 0.0165$.

Эксперименты же дают значение, равное ~ 0.015 . Это вполне удовлетворительное согласование расчетного и экспериментального значений свидетельствует о допустимости принятых при расчете предположений.

Если распределение плотности поперек пограничного слоя зависит только от распределения скорости (например, если температура торможения постоянна или с достаточной степенью точности справедлив интеграл типа интеграла Крокко), то левая часть равенства (2.5) не зависит непосредственно от R_w , т. е. от параметра A . В то же время интеграл в правой части является функцией только параметра A . Это значит, что в большинстве практически важных случаев зависимость параметра отрыва от числа M внешнего потока, температуры стенки и поперечной кривизны стенки имеет вид (если за характерный размер пограничного слоя принять его толщину)

$$(2.6) \quad \xi_{\text{от}}^* = \frac{\delta}{\rho_\infty U^2} \frac{dp}{ds} = \frac{f^2(M, T_w/T_\infty)}{\varphi^2(A)}$$

$$f = \int_0^1 \sqrt{\rho^0} du^0, \quad \varphi = \int_0^1 \left\{ \frac{(1-n^0)[1+(1-0.5A)n^0]}{n^0(0.4-0.26n^0)^2} \right\}^{0.5} dn^0$$

Зависимость $\xi_{\text{от}}^*$ от M была впервые найдена для плоского пограничного слоя Н. М. Беляниным [1], от T_w/T_∞ — Н. Н. Захаровым [2]. Из (2.6) следует, что эта же зависимость критерия отрыва от числа M остается справедливой и для осесимметричного течения, причем δ/R_w может быть немалым, если в качестве характерного размера пограничного слоя принимается его толщина δ . При выборе других характерных размеров пограничного слоя, например δ^* , такого разделения зависимости от числа M и A может не быть, так как профиль скорости, а следовательно, и связь между δ и δ^* может зависеть одновременно и от числа M внешнего потока, и от R_w .

Из (2.6) следует, что

$$(2.7) \quad \xi_{\text{от}}^*/\xi_{\text{от}}^{*0} = \varphi^2(0)/\varphi^2(A) = \xi_2$$

где $\xi_{\text{от}}^{*0}$ — значение критерия отрыва для плоского турбулентного пограничного слоя при тех же параметрах внешнего потока и той же температуре стенки. Эта зависимость нанесена на фиг. 4. При небольших значениях A функция φ может быть аппроксимирована линейной функцией:

$\phi=5.480-0.303A$. Ошибка в вычислении ϕ по этой формуле не превышает 2% даже для $A=2$. При этом

$$(2.8) \quad \xi_{i0}^*/\xi_{i0}^{*0} = (1-0.061A)^{-2}$$

Из фиг. 4 и формул (2.7), (2.8) следует, что влияние кривизны на параметр отрыва турбулентного пограничного слоя хотя и не очень велико, но вполне заметно при толщинах пограничного слоя, сравнимых с радиусом кривизны тела. Так, при внешнем обтекании тел при $A=2$ ξ_i^* примерно на 26% больше, чем ξ_i^{*0} , а при течении в канале при $A=-1$ ξ_i^* на 14% меньше ξ_i^{*0} при плоском течении.

Поступила 1 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика. М., «Наука», 1969.
2. *Зазаров Н. Н.* Влияние теплообмена на отрыв турбулентного пограничного слоя. Тр. ЦИАМ, 1971, № 507.
3. *Вагажин А. Б.* Определение параметра отрыва несжимаемого магнитогазодинамического пограничного слоя с помощью теории размерностей. Теплофизика высоких температур, 1972, т. 10, № 2.
4. *Бам-Зеликович Г. М.* О критерии отрыва пограничного слоя при наличии отсоса. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 6.
5. *Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В.* Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1973.
6. *Федяевский К. К.* Турбулентный пограничный слой крыла, ч. 1, 2. Тр. ЦАГИ, 1936, вып. 282, 1937, вып. 316.
7. *Schubauer G. B., Klebanoff P. S.* Investigation of separation of the turbulent boundary layer. Nat. Advisory Committee Aeronaut., 1951, Rept, No. 1030.
8. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
9. *Роуз, Джонсон.* Турбулентность при взаимодействии ударной волны с пограничным слоем. Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 7.
10. *Rose W. C.* The behavior of a compressible turbulent boundary layer in a shock-wave induced adverse pressure gradient. NASA, 1973, Techn. Note, No. 7092.
11. *Бам-Зеликович Г. М.* Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 12.