

ДВУМЕРНЫЙ СВОБОДНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

К. Е. ДЖАУГАШТИН

(Ленинград)

На основе уравнений односточечных моментов второго порядка полей скорости и температуры, замкнутых с помощью полуэмпирических гипотез, найдены выражения пульсационных характеристик для течения с поперечным сдвигом в стратифицированной среде. По формуле Прандтля, учитывающей влияние архимедовых сил, выполнен анализ плоских струйных течений и течений в следе за телом. Численные расчеты и сопоставление с опытными данными проведены для плоского следа.

1. Плоские стационарные турбулентные струйные течения несжимаемой жидкости, распространяющиеся в горизонтальном направлении в вертикально стратифицированной среде, в рамках теории пограничного слоя описываются уравнениями вида [1, 2]

$$(1.1) \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\langle uv \rangle), \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

$$U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-\langle tv \rangle)$$

с граничными условиями, соответствующими конкретному типу течения. Расслоение жидкости по плотности в поле силы тяжести влияет на турбулентное напряжение трения $(-\langle uv \rangle)$ и тепловой поток $(-\langle tv \rangle)$. Ввиду этого основной задачей является отыскание выражений для $\langle uv \rangle$ и $\langle tv \rangle$, учитывающих влияние архимедовых сил и замыкающих систему уравнений (1.1). Известно значительное число работ, основанных на соображениях размерности и полуэмпирическом обобщении формулы Прандтля для напряжения трения применительно к неоднородной среде [2]. Ниже на основе метода баланса пульсационной энергии дана попытка построения теории пограничного слоя в стратифицированной среде, позволяющая в рамках единой схемы выполнить расчет как средних, так и пульсационных характеристик течения.

Исходной для анализа является система уравнений для односточечных моментов второго порядка полей скорости и температуры

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \langle u_i u_j \rangle + U_k \frac{\partial \langle u_k u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k u_j \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u_k u_i \rangle \frac{\partial U}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-v \frac{\partial \langle u_i u_j \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k u_i u_j \rangle + \left(\left\langle \delta_{jk} u_i + \delta_{ik} u_j \right\rangle \frac{p}{\rho} \right) \right] -$$

$$- \left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle +$$

$$\begin{aligned}
& +2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle - \beta g (\delta_{2i} \langle tu_j \rangle + \delta_{2j} \langle tu_i \rangle) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial \tau} \langle u_i t \rangle + U_k \frac{\partial \langle u_i t \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k t \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u_k u_i \rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\nu \frac{\partial \langle u_i t \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k u_{it} \rangle + \left\langle \frac{p}{\rho} t \right\rangle \right] - \\
& - \left\langle \frac{p}{\rho} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right\rangle + 2\nu \left\langle \frac{\partial t}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle - \delta_{2i} \beta g \langle t^2 \rangle = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial \tau} \left\langle \frac{t^2}{2} \right\rangle + U_k \frac{\partial \langle t^2 \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k t \rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} \left[-\nu \frac{\partial \langle t^2 \rangle}{\partial x_k} + \left\langle u_k \frac{t^2}{2} \right\rangle \right] + \\
& + \nu \left\langle \frac{\partial t}{\partial x_k} \frac{\partial t}{\partial x_k} \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

(Уравнения записаны в общепринятых обозначениях в предположении равенства кинематической вязкости и коэффициента температуропроводности.)

Для замыкания уравнений используем полуэмпирические соотношения А. Н. Колмогорова и Ю. Ротта [3, 4], а также аналогичные им выражения для поля температуры [5, 6]

$$\begin{aligned}
2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle &= c_{1\nu} \frac{\langle u_i u_j \rangle}{l^2} + \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{E^{3/2}}{l}, \\
2\nu \left\langle \frac{\partial t}{\partial x_k} \frac{\partial t}{\partial x_k} \right\rangle &= c_{1t} \nu \left\langle \frac{\langle t^2 \rangle}{l^2} + c_t \frac{\langle t^2 \rangle \sqrt{E}}{l} \right\rangle \\
(1.3) \quad 2\nu \left\langle \frac{\partial t}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right\rangle &= c_{ut} \nu \left\langle \frac{u_i t}{l^2} \right\rangle, \\
\left\langle \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle &= -k \frac{\sqrt{E}}{l} \left(\langle u_i u_j \rangle - \delta_{ij} \frac{2}{3} E \right) \\
\left\langle \frac{p}{\rho} \frac{\partial t}{\partial x_i} \right\rangle &= -k_t \frac{\sqrt{E}}{l} \langle u_i t \rangle, \quad E = \frac{1}{2} (\langle u^2 \rangle + \langle v^2 \rangle + \langle w^2 \rangle)
\end{aligned}$$

где l — масштаб длины, k и c с различными индексами — постоянные величины. Оценочные значения некоторых из них по теории изотропной турбулентности следующие: $c_1 \approx 5/\pi$, $c_{1t} \approx 3/\pi$, $c_{ut} \approx \pi$. Остальные постоянные являются эмпирическими.

Записывая уравнения (1.2) с учетом (1.3) для развитого турбулентного течения с поперечным сдвигом и пренебрегая турбулентной диффузией, получим систему алгебраических уравнений относительно моментов второго порядка

$$\begin{aligned}
(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \langle u_i u_j \rangle + \langle u_k u_j \rangle \frac{\partial U}{\partial x_k} + \langle u_k u_i \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + k \frac{\sqrt{E}}{l} \left(\langle u_i u_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} E \right) + \\
+ \delta_{ij} \frac{2}{3} c \frac{E^{3/2}}{l} - \beta g (\delta_{2i} \langle tu_j \rangle + \delta_{2j} \langle tu_i \rangle) = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \langle u_i t \rangle + \langle u_k t \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u_k u_i \rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} + k_i \frac{\sqrt{E}}{l} \langle u_i t \rangle - \delta_{2i} \beta g \langle t^2 \rangle = 0$$

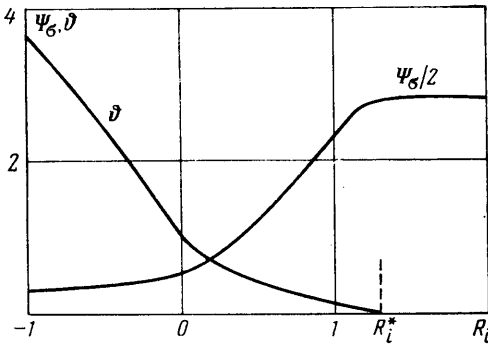
$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\langle t^2 \rangle}{2} + \langle u_k t \rangle \frac{\partial T}{\partial x_k} + c_i \frac{\langle t^2 \rangle \sqrt{E}}{l} = 0$$

Уравнения (1.4) приближенно описывают баланс энергии и в реальных двумерных пограничных слоях. Действительно, как показывают опытные данные, в однородной среде в развитом пограничном слое на стенке турбулентная диффузия незначительна, а в струйных течениях в автомодельной области развития, за исключением узкой приосевой зоны, конвективные и диффузионные члены близки по величине, но противоположны по знаку [7, 8].

Система уравнений (1.4) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{c^{2/3}} \left(l \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \psi, \quad \psi = \frac{1}{2} [1 - r R_i' + \sqrt{1 - 2(r - 2q) R_i' - (r - 2)^2 R_i'^2}] \\ u^2 &= \frac{2}{3} \left(1 + 2 \frac{c}{k} \right) \frac{1}{c^{2/3}} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \psi_1, \\ \psi_1 &= \frac{3\psi}{2 - k/c} \left[\frac{\psi + q R_i'}{(\psi - R_i')(\psi + p R_i')} + \frac{1}{3} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) \right] \\ \langle v^2 \rangle &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{c}{k} \right) \frac{1}{c^{2/3}} \left(l \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \psi_2, \quad \psi_2 = \psi \\ \langle w^2 \rangle &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{c}{k} \right) \frac{1}{c^{2/3}} \left(l \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \psi_3, \quad \psi_3 = \psi \frac{\psi + k/c R_i'}{\psi + p R_i'} \\ \langle uw \rangle &= \left(l \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \psi_4, \quad \psi_4 = \psi^{3/2} \frac{\psi + q R_i'}{(\psi + R_i')(\psi + p R_i')} \\ \langle tw \rangle &= \frac{k}{k_i} l^2 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \psi_5, \quad \psi_5 = \frac{\psi^{3/2}}{\psi + p R_i'} \\ \langle t^2 \rangle &= \frac{c}{c_i} \frac{k}{k_i} \frac{1}{c^{2/3}} \left(l \frac{\partial T}{\partial z} \right) \psi_6, \quad \psi_6 = \frac{\psi}{\psi + R_i'} \\ \langle tu \rangle &= \frac{c}{k} \frac{k}{k_i} \left(1 + \frac{k}{k_i} \right) \frac{1}{c^{2/3}} l^2 \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \psi_7, \\ \psi_7 &= \psi \frac{(1 + k/k_i) \psi + (q + k/k_i) R_i'}{(1 + k/k_i) (\psi + R_i') (\psi + p R_i')} \\ R_i' &= \frac{3}{2} R_i \left[\frac{k_i}{k} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) \right]^{-1} \\ p &= 2 + \frac{c}{c_i}, \quad q = \frac{k}{c_i} - \frac{k}{k_i}, \quad r = \frac{7}{3} + \frac{k}{c} \left(\frac{2}{3} + \frac{c}{c_i} \right) \\ k &= \sqrt{\frac{c}{k}} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) \right]^{3/4}, \quad c = \left(\frac{c}{k} \right)^{3/4} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{k}{c} - 1 \right) \right]^{3/4} \end{aligned}$$

Искомые величины представлены в виде произведения двух сомножителей, один из которых совпадает с соответствующим выражением пуль-



Фиг. 1

сационных характеристик в однородной среде ($\psi(0)=1$), а другой (ψ) учитывает влияние архимедовых сил. Значения первых из них определяются локальными градиентами средней скорости и температуры, а значения ψ_i — числом Ричардсона

$$(1.7) \quad R_i = \beta g \frac{\partial T}{\partial y} / \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$$

Решение (1.5) записано с учетом того, что коэффициент, входящий в выражение для турбулентного трения $\langle -uv \rangle$, был принят равным 1, $(c^{3/2} k^{-2} (k/c - 1) = 1)$, по-

скольку масштаб l определяется с точностью до постоянного множителя. Это условие позволяет ограничиться заданием трех эмпирических констант $\sigma_r^\circ = k_i/k \approx 0.75$, $k/c \approx 7$, $c/c_i \approx 1$ [7] (σ_r° — турбулентное число Прандтля в однородной среде). Существенно, что все эти константы определяются из опытных данных по средним и пульсационным характеристикам в однородной среде.

Соотношения (1.5) позволяют выполнить приближенную оценку пульсационных характеристик во всей области изменения числа Ричардсона. Основной интерес представляет функция ψ_i (в дальнейшем используем обозначение $\Phi = \psi_i$), учитывающая влияние стратификации на турбулентное трение и приведенная на фиг. 1. Видно, что неустойчивая стратификация приводит к возрастанию, а устойчивая — к уменьшению турбулентного обмена. При критическом значении числа $R_i^* = q/(r-1) \approx 1.30$ энергия пульсационного движения и трение обращаются в нуль, что свидетельствует о подавлении турбулентного движения архимедовыми силами. Отметим, что турбулентное число Прандтля $\sigma_r = \sigma_r^\circ \psi_6$, ($\psi_6 = \psi_i/\psi_5$) при предельно устойчивой $R_i \rightarrow R_i^*$ или неустойчивой стратификации $R_i \rightarrow -\infty$ асимптотически стремится к конечным значениям (фиг. 1).

2. В общем случае исследование струйных течений на основе уравнений (1.1) требует численного расчета, поскольку необходимые для этого величины $\langle uv \rangle$, $\langle tv \rangle$ имеют сложное аналитическое выражение. Задача, однако, может быть существенно упрощена, если для напряжения трения принять вторую формулу Прандтля и применить соображения, используемые при ее выводе, к преобразованию выражения числа R_i (1.7). Иными словами, в (1.7) значения производных следует заменить конечно-разностными отношениями масштабных величин.

Из различных типов стратифицированных сред наиболее характерными являются среда с линейным распределением температуры (или плотности) и среда с границей раздела однородных жидкостей с различной температурой (соотношения, относящиеся к этим случаям, будем обозначать индексами I и II соответственно). Для этих сред указанные выше замены производных будут иметь вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_2 - U_1}{b}, \quad I - \frac{\partial T}{\partial y} = \text{const}, \quad II - \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{T_2 - T_1}{b_T}$$

где b , b_T — динамическая и тепловая толщины области турбулентного перемешивания, U и T с индексами — значения скорости и температуры на границах слоя смешения. Градиент температуры (I) и разность темпера-

тур (II) являются заданными величинами. Ширину теплового слоя b_T можно выразить через динамическую ширину, используя соотношение, характерное для решений методом конечной толщины $b_T = b\sqrt{\sigma_T}$ [9]. При этом уравнения движения и энергии расщепляются и для исследования поля скоростей достаточно динамического уравнения. В конечном счете выражение для касательного напряжения трения приобретает вид

$$(2.2) \quad \langle uv \rangle = \nu_T \vartheta(R_i)$$

где коэффициент турбулентного обмена ν_T и функция ϑ постоянны по сечению струи и являются функциями только продольной координаты. Это обстоятельство позволяет в уравнениях (1.1) ввести замену переменных ($x \rightarrow \xi$, $y \rightarrow \eta$) по формулам [10]: $\vartheta(R_i) dx = d\xi$, $\eta = y$, в результате которой получим систему уравнений

$$(2.3) \quad U \frac{\partial U}{\partial \xi} + V_1 \frac{\partial U}{\partial \eta} = \nu_T \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V_1}{\partial \eta} = 0 \quad \left(V_1 = \frac{V}{\vartheta} \right)$$

ничем не отличающуюся от уравнений пограничного слоя в однородной среде (в переменных ξ , η). Указанные преобразования не меняют граничных условий в струйных и следовых течениях. Таким образом, задача исследования плоского свободного пограничного слоя в стратифицированной среде сводится к аналогичной задаче для однородной среды. Если решение последней известно, то искомое решение соответствующей задачи для неоднородной среды определяется путем обратной замены ($\xi \rightarrow x$, $\eta \rightarrow y$)

$$(2.4) \quad x = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\vartheta(R_i)}, \quad y = \eta$$

3. Исследуем турбулентные струйные течения в стратифицированной среде на основном участке развития. Необходимые для этого решения задач в однородной среде обычно записываются в виде

$$(3.1) \quad U = U_m F(\varphi), \quad \varphi = \frac{y}{\delta}; \quad \delta = a\xi^\alpha, \quad U_m = \frac{U_0}{\xi^\beta}$$

где U_m , δ — скорость на оси струи и условная ширина струи, зависящие от продольной координаты; F и φ — универсальный профиль скорости и автотомодельная координата; α , β — постоянные величины; a — эмпирическая константа (U_0 выражается через a). Значения этих величин для течения приведены в таблице [11]. (Решения для течения в следе за телом получено на основе линеаризованных уравнений пограничного слоя, C_x — коэффициент сопротивления.)

Тип течения	F	U_0	α	β	n I	n II
След	$\exp(-\varphi^2)$	$\frac{C_x}{2a\sqrt{\pi}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{3}{2}$
Струя	$\text{ch}^{-2} \varphi$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{a}}$	1	$\frac{1}{2}$	3	2
Край струи	$\frac{1}{2} (1 + \text{erf } \varphi)$	1	1	0	2	1

Для отыскания связи $\xi = \xi(x)$ преобразуем выражения для числа R_i (1.7) с учетом соотношений (2.1) и (3.1). (Заметим, что эффективная ширина слоя смешения будет равна $b = \lambda\delta$, где значение λ определяется из

решения задачи.) В результате получим

$$(3.2) \quad R_i = R_i^{\circ} \sqrt[n]{\psi^{\circ} \zeta^n}$$

$$(3.3) \quad R_i^{\circ} = R_i^{\circ} \left(\frac{\lambda a}{U_0} \right)^2, \quad R_i^{\circ} = \beta g \frac{dT}{dy} \left(\frac{d}{U_H} \right)^2, \quad n = 2(\alpha + \beta), \quad \psi^{\circ} = 1$$

$$R_i^{\circ} = R_i^{\circ} \frac{\lambda a}{U_H^2} \sqrt{\sigma_T^{\circ}}, \quad R_i^{\circ} = \beta g (T_1 - T_2) \frac{d}{U_H^2}, \quad n = \alpha + 2\beta, \quad \psi^{\circ} = \psi_{\sigma}$$

Здесь первая и вторая формулы (3.3) соответствуют типам I и II стратификации (см. таблицу).

Ниже все величины записаны в безразмерном виде, в качестве масштабов использованы характерные значения скорости и длины U_H , d .

В конечном счете, используя соотношения (2.4) и (3.2), связь между x и ζ удобно представить в параметрическом виде

$$(3.4) \quad x = \frac{f(R_i)}{\sqrt[n]{R_i^{\circ}}}, \quad \zeta = \sqrt[n]{\frac{R_i}{R_i^{\circ} \psi_{\sigma}(R_i)}}$$

$$(3.5) \quad f = \frac{1}{n} \int_0^{R_i} \frac{R_i^{1/n-1}}{\psi^{1/n}} dR_i - \frac{\Lambda}{2n} \int_0^{R_i} \frac{R_i^{1/n}}{\psi^{1+(1/n)}} \frac{d\psi^{\circ}}{dR_i} dR_i$$

Здесь f — универсальная функция, для стратификаций типов I, II $\Lambda = 0$ и 1 соответственно. При заданном распределении температуры среды для каждого частного вида струйного течения функция f может быть вычислена и представлена, например, в табличном виде.

Отметим общую для струйных течений закономерность развития в устойчиво-стратифицированной среде. Как видно из (3.1) и (3.4), ширина зоны смешения определяется выражением

$$(3.6) \quad \delta = a \left(\frac{R_i}{R_i^{\circ} \psi_{\sigma}} \right)^{\alpha/n}$$

С развитием струи число R_i увеличивается и на некотором расстоянии от устья становится равным критическому значению $R_i = R_i^*$. При этом величина $\psi_{\sigma}(R_i^*)$ конечна и ширина зоны смешения, как видно из (3.6) и (3.3), достигает предельной величины δ^* , зависящей от начальных условий истечения $\delta^* \sim (R_i^{\circ})^{-\alpha/n}$. В коэффициент пропорциональности в этом выражении, как показано ниже на частном примере, не входят эмпирические константы.

Установленную зависимость δ^* от режимных параметров можно выявить также, используя соображения размерности. Для этого следует учесть, что в случаях I и II влияние силы тяжести определяется комплексами $\beta g \partial T / \partial y$ и $\beta g \Delta T$ соответственно, а динамическое воздействие, например, при истечении струи — начальным импульсом $U_H^2 d$. Применяя теперь метод размерности, получим, что $\delta^* \sim (R_i^{\circ})^{1/2}$, и $\delta^* \sim (R_i^{\circ})^{-1/2}$ соответственно для типов I, II стратификации.

4. В качестве конкретного примера рассмотрим дальний след за телом в линейно-стратифицированной среде. Используя результаты, приведенные в таблице, и соотношения (3.1) и (3.4), получим следующие выражения для скорости на оси и ши-

рины следа, записанные в параметрическом виде:

$$(4.1) \quad \delta = \sqrt{\frac{C_x}{2\lambda\sqrt{\pi}}} \left(\frac{R_i}{R_i^{\circ}} \right)^{1/4}, \quad U_m = \sqrt{\frac{\lambda C_x}{2\sqrt{\pi}}} \left(\frac{R_i^{\circ}}{R_i} \right)^{1/4},$$

$$x = \frac{C_x}{2\lambda a^2 \sqrt{\pi}} \frac{f(R_i)}{R_i}$$

$$(4.2) \quad f = \frac{1}{2} \int_0^{R_i} \frac{dR_i}{\sqrt{R_i} \Phi(R_i)}$$

Здесь f определяется интегралом (3.5) при $n=2, \psi^4=1, \Lambda=0$.

Исследуем предварительно предельные режимы течения.

а) Стратификация, близкая к однородной ($|R_i| \rightarrow 0$). Поскольку $f(0)=0$, то из (3.4) следует, что этот случай соответствует малым значениям x . Используя асимптотическую формулу для Φ (1.5) при $R_i \rightarrow 0$ ($\Phi=1-AR_i, A=1/2(r-3q)+p+1$), получим из (4.2) выражения для f

$$(4.3) \quad f^+ = \frac{1}{2\sqrt{A}} \ln \frac{1+\sqrt{AR_i}}{1-\sqrt{AR_i}}, \quad f^- = \frac{1}{\sqrt{A}} \operatorname{arctg} \sqrt{A|R_i|}$$

(знаками плюс и минус обозначаются формулы, относящиеся соответственно к случаям $R_i > 0$ и $R_i < 0$). Подставляя (4.3) в соотношения (4.1), получим следующие выражения для ширины следа:

$$(4.4) \quad \delta^+ = a \sqrt{x_0} \left[\frac{\exp(2x/x_0) - 1}{\exp(2x/x_0) + 1} \right]^{1/2}, \quad \delta^- = a \sqrt{x_0 \operatorname{tg} \frac{x}{x_0}}$$

$$x_0 = C_x (2\lambda a^2 \sqrt{\pi} A R_i^{\circ})^{-1}$$

При малых значениях x/x_0 , используя разложение в ряд функции в (4.4), найдем

$$(4.5) \quad \delta^+ \approx a \sqrt{x \left(1 + \frac{x}{x_0} \right)}, \quad \delta^- = a \sqrt{x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right]}$$

Отсюда следует, что с удалением от тела устойчивая стратификация уменьшается, а неустойчивая увеличивает рост ширины следа по сравнению с ее изменением в однородной среде.

б) Предельная устойчивая стратификация ($R_i \rightarrow R_i^*$). Из выражения для f и (3.4) следует, что этот режим течения имеет место при $x \rightarrow \infty$. Значения δ и U_m при этом стремятся к предельным значениям, равным (см. (3.1) и (3.4))

$$(4.6) \quad \delta = \sqrt{\frac{C_x}{2\lambda\sqrt{\pi}}} \left(\frac{R_i^*}{R_i^{\delta}} \right)^{1/4}, \quad U_m = \sqrt{\frac{\lambda C_x}{2\sqrt{\pi}}} \left(\frac{R_i^{\circ}}{R_i^*} \right)^{1/4}$$

При больших значениях числа Ричардсона ($R_i^{\circ} \rightarrow \infty$) (в рамках рассматриваемой схемы следа-источника) область смещения вырождается в плоскость, проходящую через ось следа, с нормалью, параллельной оси y . При этом $U_m \rightarrow \infty$, но значение избыточного импульса остается конечным, равным его начальной величине. Следует подчеркнуть, что предельные значения U_m и δ не зависят от эмпирических констант и полностью определяются режимными параметрами. Это является общей закономерностью плоских свободных струйных течений.

в) Предельная неустойчивая стратификация ($R_i \rightarrow \infty$). В этом случае функции Φ и f имеют следующие асимптотические выражения:

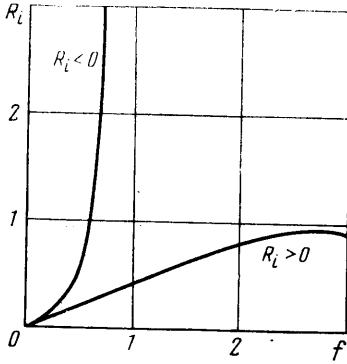
$$(4.7) \quad \Phi \approx \omega \sqrt{|R_i|}, \quad \omega = \frac{(r-1)^2(r-q-1)}{(r-2)(r-p-1)}; \quad f \approx f_+ + \frac{1}{2\omega} \ln \frac{R_i}{R_i^+}$$

где $f_+ = f(R_i^+)$, а R_i^+ — значение R_i , выше которого ($|R_i| > |R_i^+|$) функция Φ с достаточной степенью точности описывается его предельным выражением. Искомое

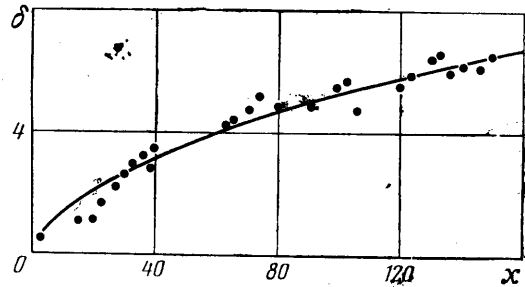
выражение для δ , полученное так же, как и в случае a , имеет вид

$$(4.8) \quad \delta = \sqrt{\frac{C_x}{2\lambda\sqrt{\pi}}} \left(\frac{R_i^+}{R_i} \right) \exp \left[\frac{\omega f_+}{2} \left(\frac{x}{x_+} - 1 \right) \right], \quad x_+ = \frac{C_x f_+}{2\lambda a^2 \sqrt{\pi R_i^{\circ}}}$$

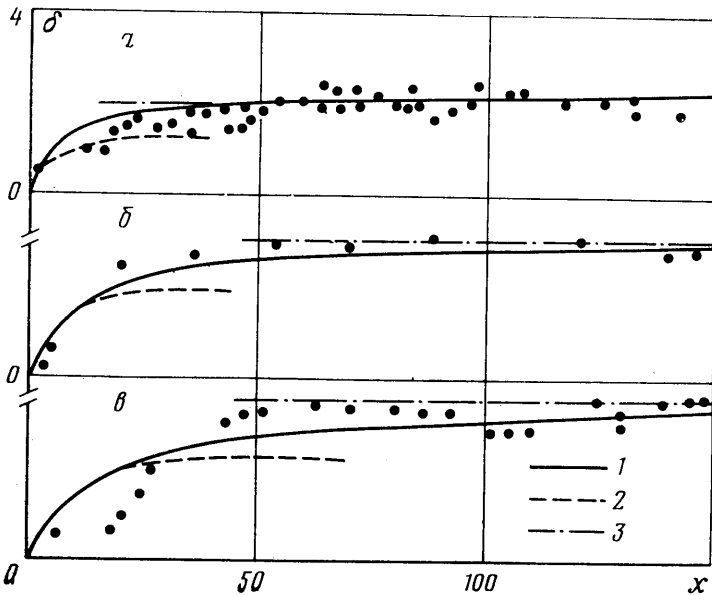
Таким образом, ширина следа при неустойчивой стратификации вдали от тела увеличивается по экспоненциальному закону, т. е. значительно быстрее, чем в однородной среде.



Фиг. 2



Фиг. 3



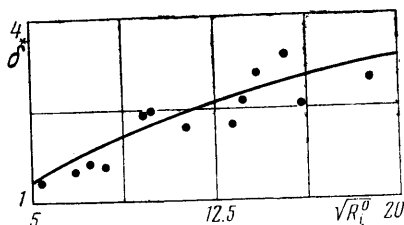
Фиг. 4

Исследование закономерности развития следа во всей автомодельной области течения выполняется на основе зависимости $f=f(R_i)$, приведенной на фиг. 2. Этот же график показывает изменение условной ширины следа вдоль его оси, поскольку R_i и f связаны с δ и x соотношениями $R_i=R_i^+(\delta/a)^4$, $f=x\sqrt{R_i^+}$. С качественной стороны зависимость $\delta=\delta(x)$ соответствует закономерностям изменения δ , установленным при анализе предельных режимов течения.

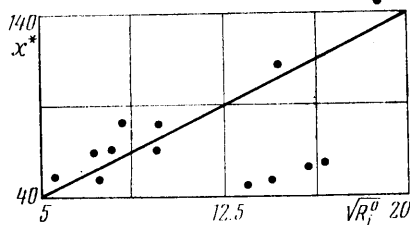
Выполним теперь сравнение результатов проведенного расчета с опытом, используя для этого данные экспериментальных исследований течения в плоском следе в линейно-стратифицированной среде [12]. Необходимые для расчетов значения C_x и a , определенные по опытным данным в однородной среде, равны 0.96 и 0.28 соответственно. За внешнюю границу слоя смешения при вычислении a принима-

лась точка, в которой значение $U/U_m=0.03$, а при этом величина $\lambda=b/\delta$, найденная из выражения для профиля скорости, равна $\lambda=1.85$. Подставляя значение постоянных в (4.1) и используя зависимость $f=f(R_i)$ при заданном значении R_i , найдем закономерность изменения δ и U_m вдоль оси следа.

На фиг. 3, 4 показаны данные, относящиеся к ширине следа в однородной (фиг. 3) и стратифицированной средах при трех значениях $\sqrt{R_i}$: $a - 6.39$; $b - 13.83$; $c - 19.15$. Линия 1 соответствует расчету по формуле (4.1), линии 2 и 3 — расчетам предельных режимов течения (см. (4.5) и (4.6)).



Фиг. 5



Фиг. 6

Значение предельной ширины следа δ^* уменьшается с увеличением числа R_i (4.6). Обобщающий график зависимости $\delta^*=\delta^*(R_i)$ приведен на фиг. 5. Там же показана расчетная кривая (4, 6).

В опытах [12] фиксировалась точка ($x^*=x^*$), ниже которой по течению ширина следа, достигнув предельного значения, практически далее не изменяется. Зависимость $x^*=x^*(R_i)$ показана на фиг. 6. Для проведения расчетной кривой необходимо из опытных данных при одном значении R_i оценить число R_i , соответствующее x^* . Для этого заданная величина R_i и опытное значение x^* подставляются в третье из соотношений (4.1), определяется значение f и затем по графику (фиг. 2, $R_i > 0$) находится значение R_i . Расчет показал, что искомое значение $R_i \approx 1.08$. Результаты расчета x^* по (4.1) во всем диапазоне изменения параметра стратификации показаны на фиг. 6. Общим для данных, представленных на фиг. 3–6, является удовлетворительное согласие расчета и эксперимента.

Результаты, полученные в настоящей статье по расчету струйных течений, а также выполненное ранее аналогичным образом исследование пристенного пограничного слоя (на примере расчета приземного слоя атмосферы [8]) показывают эффективность теории пограничного слоя стратифицированной среды, развитой на основе метода баланса пульсационной энергии.

Поступила 16 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М., «Наука», 1965.
3. Rotta J. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. 1. Z. Physik, 1951, Bd 129, Nr 5.
4. Левин В. Б. К расчету основных характеристик турбулентных потоков с поперечным сдвигом. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 4.
5. Монин А. С. О свойствах симметрии турбулентности в приземном слое воздуха. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 1.
6. Коловандин В. А. К расчету основных характеристик теплообмена в турбулентных течениях со сдвигом. В сб. «Тепло- и массоперенос», т. 1. М., «Энергия», 1968.
7. Джаугаштин К. Е. Баланс пульсационной энергии в свободных турбулентных струях несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
8. Джаугаштин К. Е. К теории пограничного слоя в стратифицированной среде. Вестн. АН КазССР, 1975, № 3.
9. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
10. Вильямс Ф. А. Теория горения. М., «Наука», 1971.
11. Вулкс Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
12. Монгое R. H., Mei C. C. The shape of two-dimensional turbulent wakes in density-stratified fluids. Massachuset. Inst. Technol. Dept. Civ. Eng.—Hydrodynamics Lab., Rept., 1968, No. 110.