

**РЕШЕНИЕ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ЛАМИНАРНОГО
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С УЧЕТОМ СОПРЯЖЕННОГО
ТЕПЛООБМЕНА**

В. И. ЗИНЧЕНКО, Е. Г. ТРОФИМЧУК

(Томск)

В работах по исследованию характеристик течения в двумерном пограничном слое [1-3] рассматривались стационарные режимы обтекания тел, причем температура поверхности считалась величиной заданной либо определялась из условия сохранения энергии на границе раздела сред с учетом известного решения стационарного уравнения теплопроводности в твердом теле. В то же время для ряда быстропротекающих процессов необходимо учитывать инерционность процесса переноса тепла внутри твердого тела. Это приводит к необходимости решения сопряженной задачи теплообмена, поскольку использование раздельной постановки затруднительно вследствие того, что коэффициент теплообмена является искомой функцией процесса при учете течения вдоль образующей тела [4].

Расчету сопряженного теплообмена в пограничном слое посвящены работы [5-8]. В [5-7] исследование проводится с помощью аналитических методов для случая обтекания пластины, причем вводится предположение о несжимаемости течения, что позволяет использовать в уравнении энергии известную функцию тока. В [8] рассмотрен случай неравновесного течения в окрестности лобовой критической точки.

В настоящей работе рассматривается задача об обтекании тел сферической формы сверхзвуковым потоком совершенного газа. В результате численного интегрирования найдены поля искомых величин в пограничном слое и твердом теле, а также тепловой поток и температура поверхности тела в различные моменты времени. На основе проведенных расчетов построена обобщенная зависимость для отношения тепловых потоков, которая может быть использована при решении задач указанного класса.

1. Рассмотрим систему уравнений, описывающую течение в пограничном слое, а также процесс переноса тепла в твердом теле

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(l \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) + f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + \beta \left[\frac{\theta}{\theta_e} - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ = \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial s} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\partial f}{\partial s} \right)$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{l}{Pr} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \\ = \beta \gamma \frac{\theta}{\theta_e} \frac{\partial f}{\partial \eta} - l \gamma \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right)^2 + \alpha \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\pi_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right)$$

Граничные и начальные условия выписываются в виде

$$(1.4) \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}(\infty, s) = 1, \quad \theta(\infty, s) = \theta_e$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}(0, s) = 0, \quad f(0, s) = 0, \quad q_w(0, s) \sqrt{\text{Re Pr}} \frac{\lambda_{e0}}{\lambda_{1*}} = -\pi_1 \frac{\partial \theta}{\partial y_1}(\tau, 0)$$

$$(1.6) \quad \theta_1(0, y_1) = \theta_1(\tau, 1) = \theta_{1H}$$

При записи краевой задачи (1.1)–(1.6) использовались следующие обозначения:

$$\eta = \frac{u_e r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy, \quad l = \frac{\rho \mu}{\rho_e \mu_e}, \quad \theta = \frac{T}{T_{e0}}, \quad \alpha = \frac{2 \int_0^s \rho_e \mu_e u_e (r/R)^2 ds}{\rho_e \mu_e u_e (r/R)^2}$$

$$\beta = \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{ds} \alpha, \quad \text{Re} = \frac{V_m \rho_{e0} R}{\mu_{e0}}, \quad q_w = \lambda_w \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w \frac{\sqrt{\text{Re}}}{V_m h_{e0} \rho_{e0}}$$

$$\gamma = \frac{u_e^2}{C_p T_{e0}}, \quad y_1 = -\frac{y}{R}, \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad t_* = \frac{R^2 \rho_1 C_{p1}}{\lambda_{1*}}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{1*}}$$

Здесь и выше η , ξ – переменные Дородницына – Лиза; $s = x/R$ – угол в радианах, отсчитываемый от передней критической точки; f – безразмерная функция тока; $f' = u/u_e$ – безразмерная скорость; Pr – число Прандтля; α , β , γ – безразмерные параметры, которые выражаются через распределение давления на внешней границе пограничного слоя; y_1 , τ – безразмерная координата в твердом теле и время; θ – безразмерная температура; q_w – безразмерный тепловой поток со стороны газовой фазы, который получен при введении безразмерных величин на внешней границе пограничного слоя (u_e/V_m , ρ_e/ρ_{e0} , μ_e/μ_{e0}); ρ , C_p – плотность и удельная теплоемкость соответственно; μ , λ – коэффициенты вязкости и теплопроводности; $V_m = \sqrt{2h_{e0}}$ – максимальная скорость; h – энтальпия; R – радиус тела. Индексы w , e , $e0$ приписываются величинам на поверхности тела, на внешней границе пограничного слоя, на внешней границе в точке торможения соответственно. Индексом 1 отмечены характеристики твердого тела, индекс * используется для обозначения характерных величин, индекс $1H$ приписывается температуре в начальный момент времени.

Как следует из (1.1)–(1.6), данная задача рассматривалась в квазистационарной постановке, поскольку согласно оценкам [8] времена релаксации процессов в газовой фазе намного меньше времени тепловой релаксации в твердом теле.

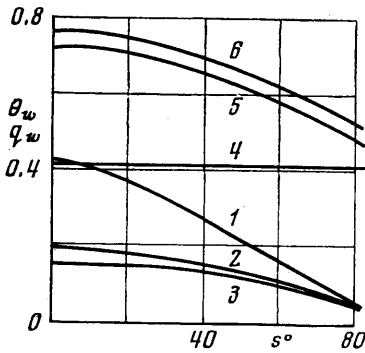
Перетекание тепла в твердом теле по продольной координате не учитывалось в соответствии с общепринятым допущением $\partial^2 T_1 / \partial x^2 \ll \partial^2 T_1 / \partial y_1^2$. Оценки максимальных значений вторых производных в твердом теле, проведенные апостериори по результатам численного интегрирования краевой задачи (1.1)–(1.6), подтвердили справедливость принятого допущения.

Надо заметить, что вследствие граничного условия (1.6) приведенная выше математическая модель явления справедлива до конечных моментов времени t_h , соответствующих времени прохождения тепловой волны в твердом теле до центра сферического образца. Данное время t_h может быть оценено с помощью выражений, приведенных в [9], до решения задачи.

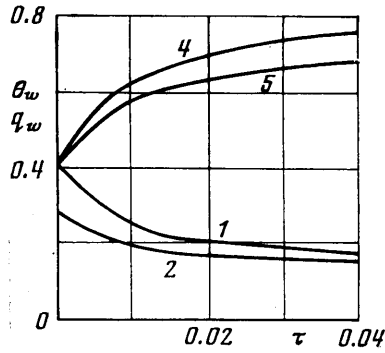
Помимо допущения о постоянстве C_p при численном интегрировании предполагалось, что $\text{Pr} = 0.7$, а для коэффициента вязкости использовался закон Сюзерленда. Коэффициент теплопроводности в твердом теле считался постоянным, поэтому в расчетах $\lambda_1 = 1$.

При интегрировании использовались данные по обтеканию сферы сверхзвуковым потоком идеального совершенного газа при $\chi=1.4$, приведенные в [10]. Таблицы указанной работы аппроксимировались полиномом для распределения давления по обводу.

2. Интегрирование краевой задачи (1.1)–(1.6) проводилось по схеме, основанной на комбинации итерационно-интерполяционного метода [11]



Фиг. 1



Фиг. 2

и метода, развитого в [12]. Система уравнений параболического типа представлялась в разностном виде и расчет сводился к интегрированию уравнений для средних арифметических величин искомого функций на средней линии полосы, заключенной между двумя расчетными характеристиками. Двухточечная краевая задача на средней линии полосы решалась с помощью метода прогонки, итерации проводились до достижения необходимой точности. Для решения уравнения теплопроводности (1.3) была использована неявная разностная схема, полученная на основе итерационно-интерполяционного метода. Погрешность аппроксимации исходной системы дифференциальных уравнений и граничных условий составляла $O(\Delta\eta)^2 + O(\Delta s)^2$, $O(\Delta y_1)^2 + O(\Delta\tau)$.

Методика расчетов строилась следующим образом: для заданной температуры поверхности в начальный момент времени определялись поля скорости и температуры в газовой фазе и тепловой поток как функция продольной координаты s ; затем для уравнения (1.3) с учетом граничных и начальных условий (1.5), (1.6) рассчитывалось поле температур в твердом теле в момент времени $\Delta\tau$ и определялась новая температура поверхности $\theta_w(s)$; после этого вновь проводился расчет характеристик течения в пограничном слое и т. д.

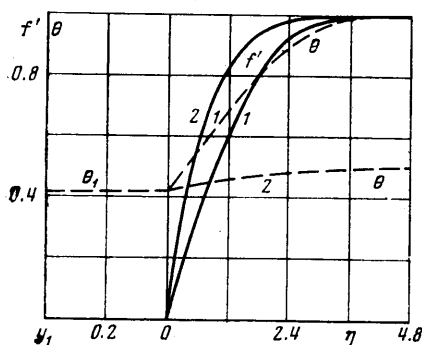
Решение рассматриваемой краевой задачи зависит от следующих параметров: M_∞ — числа Маха в набегающем потоке, χ , Pr , θ_{1H} , $\sqrt{Re Pr} \frac{\lambda_{e0}}{\lambda_{1*}} = S$. Последний параметр характерен для задач сопряженного

теплообмена и характеризует масштаб отношения теплового потока, распространяющегося в теле к тепловому потоку из газа в тело. При численном интегрировании варьировались параметры M_∞ , θ_{1H} , S .

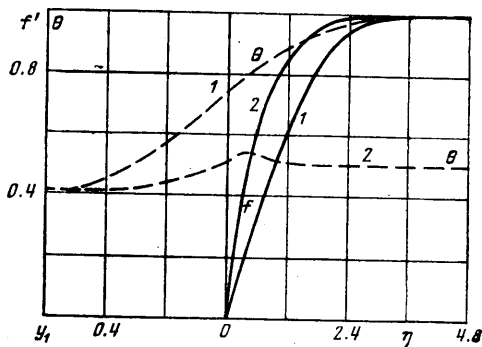
Для тестовых проверок разностной схемы часть расчетов была проведена по данным, используемым в [1]. В этом случае поля характеристик газовой фазы и потоковые величины, соответствующие начальному моменту времени, совпадали с точностью до графика с результатами расчетов [1], проведенных для стационарного случая. Кроме того, при числен-

ном интегрировании с целью выбора оптимального числа шагов проводилось варьирование $\Delta\tau$, Δy_1 , а в ряде расчетов изменялся также шаг Δs .

3. Рассмотрим результаты расчетов исходной краевой задачи. На фиг. 1 приведено изменение безразмерного теплового потока q_w (кривые 1–3) и температуры θ_w (кривые 4–6) в зависимости от продольной координаты s , выраженной в градусах, для различных моментов времени. Кривые 1, 4; 2, 5; 3, 6 соответствуют $\tau=0$; 0.03; 0.05. Для данного расчета $M_\infty=4$, $T_\infty=288^\circ$, $\sqrt{\text{Re}} \text{Pr} \lambda_{s0}/\lambda_{1*}=S=6.63$. Как и следовало ожидать, наличие максимума теплового потока в лобовой критической точке приводит к



Фиг. 3



Фиг. 4

наибольшему прогреву лобовой части сферы и установлению максимальной температуры поверхности в этой области тела (кривые 4–6). Такое повышение температуры поверхности в свою очередь приводит к значительному снижению величины теплового потока вследствие уменьшения разности температур на внешней границе пограничного слоя и на поверхности тела. Как показали расчеты, при уменьшении параметра сопряженности S процесс повышения температуры поверхности замедляется в одинаковые физические моменты времени при неизменных условиях обтекания, что физически ясно, поскольку в этом случае увеличивается отвод тепла в глубину твердого тела.

Следует заметить, что расчетные значения теплового потока в лобовой критической точке в текущие моменты времени $q_w(0, \tau)$ хорошо согласуются со значениями q_w , найденными из аналитического выражения для теплового потока в лобовой критической точке [13] при подстановке величин $\theta_w(0, \tau)$, соответствующих расчетным.

На фиг. 2 показана динамика изменения теплового потока q_w (кривые 1, 2) и температуры поверхности θ_w (кривые 4, 5) с течением времени в различных точках на поверхности обтекаемого тела. Кривые 1, 4 соответствуют $s=0$, кривые 2, 5 — углу $s=40^\circ$. Расчетные параметры те же, что и для фиг. 1. Из формы указанных кривых видно, что для времен, близких к начальному, наблюдается существенно нестационарный участок процесса, который соответствует прогреву близлежащих к границе раздела сред слоев твердого тела. В дальнейшем тепловая волна распространяется в глубь твердого тела и температура поверхности $\theta_w(s, \tau)$, а также тепловой поток $q_w(s, \tau)$ меняются сравнительно медленнее. Область существенно нестационарного участка процесса изменяется в зависимости от s , как следует из кривых фиг. 1 и 2. Например, для точек, удаленных от лобовой части, тепловой поток с течением времени изменяется незначительно (см. фиг. 1, $s \approx 80^\circ$).

Как указывалось выше, характер изменения теплового потока и температуры поверхности с течением времени и временной интервал существенно нестационарного участка определяются заданием исходных параметров задачи.

На фиг. 3 и 4 для данного расчета приведены поля скоростей f' и температуры θ в пограничном слое, а также поле температуры в твердом теле при $\tau=0$ и 0.05 соответственно. Кривые 1 на указанных фигурах отвечают $s=0$; кривые 2 соответствуют $s=84^\circ$. Видно, что в одинаковых пространственных точках профиль безразмерной скорости изменяется незначительно с течением времени, в то же время распределение температуры с течением времени меняется не только количественно, но и качественно. Из поведения кривых фиг. 4 видно, что градиент температуры в глубине твердого тела возрастает с увеличением τ и тепловая волна продвигается внутрь образца.

В результате численных расчетов для чисел M_∞ от 3 до 6, различных значений θ_{1x} и параметра сопряженности St/Re , который изменялся в практически интересном диапазоне величин, было установлено, что полученные результаты удобно представлять в виде отношения чисел Стантона, поскольку данное отношение является весьма консервативной функцией процесса. Для числа St использовалось следующее выражение: $St = q_w / \rho_\infty V_\infty C_p (T_{e0} - T_w)$, тогда St/St_0 характеризует отношение числа St в текущей точке поверхности к числу Стантона в начальной точке

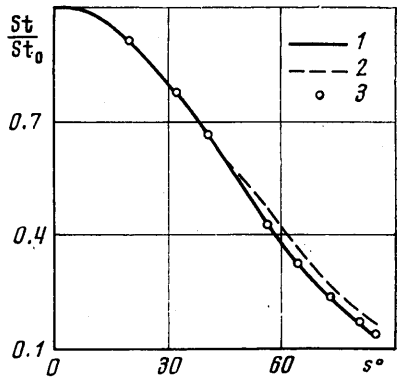
$$(3.1) \quad \frac{St}{St_0} = \frac{q_w}{q_{w0}} \frac{(T_{e0} - T_w)}{(T_{e0} - T_{w0})}$$

На фиг. 5 приведен график зависимости St/St_0 от угла s в различные моменты времени. Расчетные параметры для кривых 1 и 2 указаны выше для фиг. 1. Кривая 1 здесь отвечает начальному моменту времени, а кривая 2 построена при $\tau=0.05$. Легко видеть, что величина St/St_0 для углов $s=75 \div 85^\circ$ максимально изменяется на 10–15%, в то же время, как следует из фиг. 1, отношение тепловых потоков q_w/q_{w0} в фиксированных точках может изменяться в несколько раз с изменением времени. Точками 3 на данном графике обозначено решение для $\tau=0.05$, полученное при тех же исходных данных, за исключением параметра сопряженности $s=0.663$.

Указанное обстоятельство в рассмотренном диапазоне чисел Маха позволяет существенно упростить исходную краевую задачу, поскольку в этом случае тепловой поток на неизотермической поверхности определяется с достаточной для практики степенью точности (особенно в пределах до 60°) и выражение (3.1) может быть использовано для задания $q_w(s, \tau)$ со стороны газовой фазы. Действительно, вследствие близости значений St/St_0 , полученных при постоянной и переменной температурах поверхности, можно записать

$$(3.2) \quad \frac{q_w}{q_{w0}} = \left(\frac{q_w}{q_{w0}} \right)^\circ \frac{(T_{e0} - T_w)}{(T_{e0} - T_{w0})}$$

где $^\circ$ отвечает отношению тепловых потоков для изотермической поверхности.



Фиг. 5

Отсюда, используя известные аналитические выражения для теплового потока в окрестности лобовой критической точки [13], а также отношение $(q_w/q_{w0})^\circ$, полученное для изотермической поверхности, определяется выражение для теплового потока q_w . Следует заметить, что для отношения $(q_w/q_{w0})^\circ$ имеются аналитические выражения [2], которые показали хорошее согласование с результатами численных расчетов, либо указанное отношение может быть получено в виде аппроксимационной функции s по результатам ряда расчетов неавтономельного пограничного слоя.

Таким образом, выражение (3.2), найденное на основании точного численного решения сопряженной задачи теплообмена, может быть использовано для определения тепловых потоков при известном распределении температуры поверхности либо для решения краевой задачи (1.3), (1.5), (1.6) с последующим определением важнейших для практики характеристик $T_w(s, t)$, $q_w(s, t)$.

Поступила 1 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Анкудинов А. Л. Результаты расчета пограничного слоя на круговом цилиндре и сфере в сверхзвуковом потоке. Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 902.
2. Резников Б. И. Метод асимптотического интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя. В сб. «Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений». М.—Л., «Наука», 1967.
3. Алексеев Б. В. Ламинарный пограничный слой с химическими реакциями. М., ВЦ АН СССР, 1966.
4. Лыков А. В. Теплообмен. Справочник. М., «Энергия», 1972.
5. Лыков А. В., Перельман Т. Л. О нестационарном теплообмене между телом и обтекающим его потоком жидкости. В сб. «Тепло- и массообмен тел с окружающей газовой средой». Минск, «Наука и техника», 1965.
6. Luikov A. V. Conjugate convective heat transfer problems. Intern. J. Heat and Mass. Transfer, 1974, vol. 17, No. 2.
7. Хусид Б. М., Гдалевич Л. Б., Левитин Р. С., Копелиович Б. Л. Исследование параметров, определяющих характер сопряженного теплообмена тел в потоках жидкости. В сб. «Вопросы кинетики процессов тепло- и массообмена». Минск, 1975.
8. Гришин А. М., Зинченко В. И. Сопряженный теплообмен между реакционноспособным твердым телом и газом при наличии неравновесных химических реакций. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
9. Carslaw H. S., Jaeger J. C. Conduction of heat in solids. Oxford, Clarendon Press, 1959.
(Рус. перев.: Теплопроводность твердых тел. М., «Наука», 1964.)
10. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной. М., ВЦ АН СССР, 1961.
11. Гришин А. М., Берцун В. Н. Итерационно-интерполяционный метод и теория сплайнов. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4.
12. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы». М., «Наука», 1964.
13. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двойной кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. ПМТФ, 1965, № 1.