

## **ТРЕНИЕ И ТЕПЛОБМЕН В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПУЛЬСАЦИЯМИ ДАВЛЕНИЯ**

**А. И. ЛЕОНТЬЕВ, В. М. ФОМИЧЕВ**

(Москва)

Исследованию влияния на трение и теплообмен пульсаций давления или скорости в потоке посвящены работы, библиографию которых до 1970 г. можно найти в [1, 2]. Большинство исследований носит экспериментальный характер. Обращает на себя внимание противоречивость полученных результатов. В одних работах отмечается существенное воздействие пульсаций на эти процессы [2-6], в других говорится об отсутствии какого-либо заметного эффекта [7, 8]. Наблюдались как интенсификация, так и ухудшение теплообмена [6]. Отсутствует также определенное мнение относительно характера влияния амплитуды и частоты пульсаций. Так, например, в [3, 7] не обнаружено изменения интенсивности теплообмена при изменении частоты. Это противоречие, по-видимому, в первую очередь обусловлено сложностью рассматриваемого явления.

Укажем некоторые основные факторы, определяющие изменение осредненного во времени трения и теплообмена в пульсирующем потоке. Во-первых, это возникновение вторичных стационарных течений. Во-вторых, наличие пульсаций приводит к уменьшению критического числа Рейнольдса и тем самым способствует переходу к турбулентному течению [9]. И наконец, в турбулентном потоке благодаря взаимодействию вынужденных пульсаций с турбулентными возможно изменение уровня турбулентности.

В предлагаемой работе проведен теоретический расчет трения и теплообмена в ламинарном дозвуковом неизотермическом пограничном слое газа на плоской пластине в присутствии продольных периодических пульсаций давления или скорости. Установлены качественно новые закономерности рассматриваемого явления, не свойственные ранее изученному пульсирующему квазиизотермическому течению несжимаемой жидкости.

1. Уравнения плоского нестационарного пограничного слоя и граничные условия к ним имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) = 0 \\ (1.1) \quad & \rho \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \rho_{\infty} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} \right) \\ & c_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \\ & = \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \\ (1.2) \quad & U=0, V=0, L[T]=0 \quad (y=0) \\ & U=U_{\infty}, T=T_{\infty} \quad (y=\infty) \end{aligned}$$

Газ считается совершенным, а его теплоемкость постоянной. Оператор  $L$  определяется из решения сопряженной задачи: уравнений (1.1) и урав-

нения теплопроводности для пластины с учетом непрерывности температуры и теплового потока при  $y=0$ .

Предположим, что мгновенные значения давления, скорости, температуры и физических свойств газа можно представить в виде суперпозиции осредненной во времени и периодической составляющей. Подставляя эти мгновенные значения в уравнения (1.1) и равенства (1.2) и проводя операцию осреднения во времени за период пульсаций, получаем

$$(1.3) \quad \frac{\partial}{\partial x}(\langle \rho \rangle \langle U \rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(\langle \rho \rangle \langle V \rangle) = f_1$$

$$\langle \rho \rangle \left( \langle U \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \langle \mu \rangle \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right) + f_2$$

$$c_p \langle \rho \rangle \left( \langle U \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \langle \lambda \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right) + f_3$$

$$(1.4) \quad \langle U \rangle = 0, \langle V \rangle = 0, \langle L[T] \rangle = 0 \quad (y=0)$$

$$\langle U \rangle = \langle U_\infty \rangle, \langle T \rangle = \langle T_\infty \rangle \quad (y=\infty)$$

$$f_1 = -\frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' u' \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle \rho' v' \rangle$$

$$f_2 = \left\langle \rho_\infty' \frac{\partial u'}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \rho' \frac{\partial u'}{\partial t} \right\rangle + \langle \rho_\infty \rangle \left\langle u_\infty' \frac{\partial u_\infty'}{\partial x} \right\rangle -$$

$$- \langle \rho \rangle \left( \left\langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle \right) + \langle U_\infty \rangle \left\langle \rho_\infty' \frac{\partial u_\infty'}{\partial x} \right\rangle -$$

$$- \langle U \rangle \left\langle \rho' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} \langle \rho' u' \rangle - \langle V \rangle \left\langle \rho' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \langle \rho' v' \rangle +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \left\langle \mu' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle \right) + \left\langle \rho_\infty' u_\infty' \frac{\partial u_\infty'}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \rho' u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right\rangle - \left\langle \rho' v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle$$

$$f_3 = -c_p \left[ \langle \rho \rangle \left( \left\langle u' \frac{\partial T'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle v' \frac{\partial T'}{\partial y} \right\rangle \right) + \left\langle \rho' \frac{\partial T'}{\partial t} \right\rangle + \right.$$

$$\left. + \langle U \rangle \left\langle \rho' \frac{\partial T'}{\partial x} \right\rangle + \langle V \rangle \left\langle \rho' \frac{\partial T'}{\partial y} \right\rangle + \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} \langle \rho' u' \rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \langle \rho' v' \rangle + \left\langle \rho' u' \frac{\partial T'}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \rho' v' \frac{\partial T'}{\partial y} \right\rangle \right] + \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda' \frac{\partial T'}{\partial y} \right) \right\rangle +$$

$$+ \left\langle u' \frac{\partial p'}{\partial x} \right\rangle + \langle \mu \rangle \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\rangle + 2 \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \left\langle \mu' \frac{\partial u'}{\partial y} \right\rangle + \left\langle \mu' \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2 \right\rangle$$

Уравнения пульсационного течения получаются путем вычитания из исходной системы уравнений (1.1) осредненных уравнений (1.3)

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\langle \rho \rangle u') + \frac{\partial}{\partial y}(\langle \rho \rangle v') + \frac{\partial}{\partial x}(\langle U \rangle \rho') + \frac{\partial}{\partial y}(\langle V \rangle \rho') +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}(\rho' u') + \frac{\partial}{\partial y}(\rho' v') + f_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad & \langle \rho \rangle \left( \frac{\partial u'}{\partial t} + \langle U \rangle \frac{\partial u'}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial x} u' + \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} v' + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \rho' \left( \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + f_2 = \\
 & = \frac{\partial}{\partial y} \left( \langle \mu \rangle \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu' \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu' \frac{\partial u'}{\partial y} \right) - \frac{\partial \rho'}{\partial x} \\
 & c_p \langle \rho \rangle \left( \frac{\partial T'}{\partial t} + \langle U \rangle \frac{\partial T'}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial T'}{\partial y} + \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} u' + \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} v' \right) + \\
 & + c_p \rho' \left( \langle U \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} + \langle V \rangle \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} + u' \frac{\partial T'}{\partial x} + v' \frac{\partial T'}{\partial y} \right) + f_3 = \\
 & = \frac{\partial}{\partial y} \left( \langle \lambda \rangle \frac{\partial T'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda' \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda' \frac{\partial T'}{\partial y} \right) + \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \\
 & + \langle U \rangle \frac{\partial \rho'}{\partial x} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \left( \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \right)^2 \mu' + 2 \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial y} \mu' \frac{\partial u'}{\partial y} + \mu' \left( \frac{\partial u'}{\partial y} \right)^2
 \end{aligned}$$

Граничные условия к системе уравнений (1.5) запишутся так:

$$(1.6) \quad u' = 0, \quad v' = 0 \quad (y=0), \quad u' = u'_\infty, \quad T' = T'_\infty \quad (y=\infty)$$

2. Системы уравнений, описывающие осредненное и мгновенное пульсационное течение, не могут быть решены независимо одна от другой. Значительное упрощение задачи можно получить, когда амплитуда пульсации скорости много меньше величины скорости осредненного течения или когда пульсации носят высокочастотный характер, так что величина  $|\chi| = \delta/\sigma$  удовлетворяет неравенству  $|\chi| \gg 1$ . Это неравенство означает, что толщина пограничного слоя  $\delta$  много больше толщины нестационарного слоя Стокса  $\sigma = (2\nu/\omega)^{1/2}$ , который возникает у стенки в присутствии пульсаций. Чтобы дать представление о порядке величины  $\sigma$ , укажем, что, например, для воздуха при  $t^\circ = 100^\circ \text{C}$  и  $P = 1 \text{ бар}$   $\sigma \approx 2 \cdot 10^{-3} (\omega/2\pi)^{-1/2}$ , где  $\omega/2\pi$  — частота ( $\text{гц}$ ).

В обоих случаях нелинейная система дифференциальных уравнений (1.5) вырождается в систему линейных уравнений. Применительно к случаю высокочастотных пульсаций в несжимаемой изотермической жидкости это показано в [10]. Автор этой статьи также впервые предложил метод расчета осредненных характеристик периодического пограничного слоя. Строгое математическое обоснование этого метода можно найти в [11]. Позднее (см., например, [2]) метод был распространен на несжимаемую жидкость при наличии теплопередачи.

Можно показать, что для газа с переменными физическими свойствами при наличии теплопередачи уравнения мгновенного пульсационного течения запишутся в виде

$$(2.1) \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\langle \rho \rangle u') + \frac{\partial}{\partial y} (\langle \rho \rangle v') = 0$$

$$(2.2) \quad \langle \rho \rangle \frac{\partial u'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \langle \mu \rangle \frac{\partial u'}{\partial y} \right) + \langle \rho_\infty \rangle \frac{\partial u'_\infty}{\partial t}$$

$$(2.3) \quad c_p \langle \rho \rangle \left( \frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x} u' + \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial y} v' \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \langle \lambda \rangle \frac{\partial T'}{\partial y} \right) + \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

Система уравнений (2.1)–(2.3) отличается от исследованной ранее в [12] системы уравнений несжимаемой жидкости учетом переменности осредненных во времени физических свойств, а также наличием членов  $\partial \rho' / \partial t$  и  $\partial p' / \partial t$  в уравнениях неразрывности и энергии. Отсутствие в уравнениях (2.1)–(2.3) членов, содержащих пульсации температуры и физических свойств газа, объясняется тем, что их амплитуды малы, несмотря на то что амплитуда пульсации скорости конечна. Например, из третьего уравнения системы (1.5) следует, что  $|T'| / \langle T \rangle \approx |u'| / \langle U \rangle \cdot \langle U \rangle / \omega X \ll 1$ . Принято во внимание, что для ламинарного пограничного слоя на пластине  $\langle U \rangle / \omega X \approx 25 / |\chi|^2$ , где  $X$  – расстояние от ее передней кромки. Однако производные по времени от пульсаций температуры и плотности сравнимы с остальными членами уравнений (2.1)–(2.3). Отсутствие в этих уравнениях членов, содержащих в качестве множителя скорость осредненного течения или ее производные, и других нелинейных членов также следует из условия  $|\chi| \gg 1$ . Таким образом, характер мгновенного пульсационного течения не зависит явно от амплитуды пульсации и величины скорости основного течения. Этот вывод подтверждается экспериментальными измерениями мгновенного профиля пульсации скорости при изотермическом течении в трубе [7, 13].

Предполагая, что теплопроводность газа много меньше теплопроводности обтекаемой поверхности, граничное условие для пульсации температуры при  $y=0$  можно записать следующим образом:  $T'=0$ .

Найдем решения уравнений (2.1)–(2.3), удовлетворяющие граничным условиям (1.6), и вычислим корреляционные члены в уравнениях (1.3).

Рассмотрим вначале пульсации, изменяющиеся во времени по гармоническому закону. Вблизи поверхности пластины при  $y \ll \delta$  можно без существенной погрешности считать профиль осредненной температуры линейной функцией  $y$ . Если также принять, что вязкость и теплопроводность линейным образом зависят от температуры, уравнения (2.1)–(2.3) допускают аналитическое решение. Выражение для продольной составляющей пульсации скорости имеет вид:

$$u' = u_{\infty} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left( \Psi - \Psi_w \frac{\Psi^-}{\Psi_w^-} \right) \right\}$$

$$\Psi = \langle T \rangle / \langle T_{\infty} \rangle, \quad \Psi_w = \Psi(x, 0), \quad \Psi^- = \Psi^{-x/a}, \quad a = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}(x, 0), \quad \xi = y / \delta$$

Чтобы найти пульсации поперечной составляющей скорости и температуры, удобно ввести в рассмотрение вспомогательное соотношение, являющееся следствием уравнений (2.1) и (2.3). Домножим уравнение (2.3) на  $\partial \langle \rho \rangle / \partial \langle T \rangle$  и вычтем полученное равенство из уравнения (2.1)

$$(2.4) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial u_{\infty}'}{\partial x} + \frac{\gamma - 1}{c^2 \langle \rho \rangle} \frac{\partial}{\partial y} \left( \langle \lambda \rangle \frac{\partial T'}{\partial y} \right)$$

Здесь принято во внимание, что

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} + \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \langle T \rangle} \frac{\partial T'}{\partial t}, \quad \frac{1}{c^2 \langle \rho \rangle} \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\partial u_{\infty}'}{\partial x},$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \langle P \rangle} + \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial \langle T \rangle} \frac{1}{c_p \langle \rho \rangle}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Интегрируя уравнения (2.4) по координате  $y$ , находим выражение для поперечной составляющей пульсации скорости как функцию от  $y$ ,  $u_{\infty}'$ ,

$\partial u_\infty'/\partial x$ ,  $\partial T'/\partial y$  и осредненных параметров потока. Подставляя  $u'$  и  $v'$  в уравнение (2.3), получаем, дифференциальное уравнение второго порядка по  $y$  для определения  $T'$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$T' = \langle T_\infty \rangle \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left[ \psi(x, \xi) - \psi(x, 0) \frac{\Phi}{\Phi_w} \right] \right\},$$

$$\Phi = \Psi^{-\chi/a\sqrt{\operatorname{Pr}}}, \quad u_\infty = |u_\infty'|$$

$$\begin{aligned} \psi(x, \xi) = & \frac{1}{i\omega} \left\{ \frac{du_\infty}{dx} \left[ (\gamma-1) \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \xi \right] - \right. \\ & \left. - a \frac{\partial}{\partial x} \left[ u_\infty \left( \int_0^\xi \Psi d\xi - \frac{\Psi_w}{a-\chi} \left( \frac{\Psi \Psi^-}{\operatorname{Pr}-1+a} - \Psi_w^- \right) \right) \right] - \right. \\ & \left. - u_\infty \frac{\Psi - \Psi_w}{a} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial \xi^2}(x, 0) \left[ \Psi + \Psi_w \frac{(\operatorname{Pr}-1)(\Psi - \Psi_w) + a\chi^{-1}(\Psi + \Psi_w)}{(\Psi - \Psi_w)(\operatorname{Pr}-1)^2 - a^2\chi^{-2}} \frac{\Phi}{\Phi_w} \right] \right\} \end{aligned}$$

Выражение для поперечной составляющей пульсации скорости находится из уравнения (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{v'}{\delta} = & \operatorname{Re} \left\{ e^{i\omega t} \left[ \frac{du_\infty}{dx} \xi - \frac{\partial}{\partial x} \left( u_\infty \int_0^\xi \Psi d\xi \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( u_\infty \frac{\Psi \Psi^- - \Psi_w \Psi_w^-}{\Psi_w^- (a-\chi)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{i\omega}{\operatorname{Pr} \chi^2} \left( \Psi \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(x, 0) - \frac{\psi(x, 0)}{a} \left( \frac{\Phi}{\Phi_w} - 1 \right) \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

При  $\Psi=1$  решение для  $u'$  тождественно решению, полученному в [12]. Этого нельзя сказать о решениях для  $v'$  и  $T'$ , поскольку, как уже упоминалось, уравнения (2.1) и (2.3) отличаются от уравнений, полученных для несжимаемой жидкости. Выражение для пульсации плотности находится из равенства  $\rho' = \gamma \rho' / c^2 + (\partial \langle \rho \rangle / \partial \langle T \rangle) T'$ .

Итак, выражения для пульсации скорости, температуры и физических свойств газа найдены в виде некоторого интегродифференциального оператора от неизвестной, но не зависящей от времени функции  $\Psi(x, \xi)$  и заданной функции  $u_\infty'(x, t)$ . Заметим, что при  $\chi \xi > 1$  имеет место асимптотическое представление решений, справедливое при любом виде зависимостей  $\mu(T)$ ,  $\lambda(T)$

$$u' = u_\infty \Psi \cos \omega t, \quad \frac{v'}{\delta} = \left[ \frac{du_\infty}{dx} \xi - \frac{\partial}{\partial x} \left( u_\infty \int_0^\xi \Psi d\xi \right) \right] \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} T' = & - \frac{\langle T_\infty \rangle}{\omega} \left[ \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial x} u_\infty - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_\infty \int_0^\xi \Psi d\xi \right) + \right. \\ & \left. + \frac{du_\infty}{dx} \left( (\gamma-1) \Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \xi \right) \right] \sin \omega t \end{aligned}$$

Если вычислить корреляционные члены в уравнениях (1.3), получим систему уравнений, отличающихся от уравнений плоского стационарного пограничного слоя наличием дополнительных членов в их правых частях.

3. Некоторые предельные заключения относительно характера влияния пульсаций на трение и теплообмен можно сделать из анализа

интегральных уравнений сохранения импульса и энергии, являющихся следствием уравнений (1.3)

$$(3.1) \quad \frac{d\delta^{**}}{dx} = \frac{C_f}{2} - \delta \int_0^{\infty} f d\xi + O(|\chi|^{-1}) \quad \left( f = \frac{1-\Psi}{2} B \frac{dB}{dx}, B = \frac{u_{\infty}}{\langle U_{\infty} \rangle} \right)$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial \delta_T^{**}}{dx} + \frac{\delta_T^{**}}{\langle T_w \rangle - \langle T_{\infty} \rangle} \frac{d\langle T_w \rangle}{dx} = St + O(|\chi|^{-1})$$

Здесь  $\delta^{**}$  — толщина потери импульса,  $\delta_T^{**}$  — толщина потери энергии,  $C_f$  — коэффициент сопротивления,  $St$  — критерий Стантона. В квазиизотермическом пограничном слое относительное изменение трения и теплоотдачи при наличии периодических пульсаций имеет порядок величины  $|\chi|^{-1}$  и, следовательно, мало при  $|\chi| \gg 1$ . В неизотермическом пограничном слое основное изменение трения и теплоотдачи обусловлено вторым членом в правой части равенства (3.1).

Это обстоятельство позволяет установить предельные зависимости для трения и теплообмена при  $|\chi| \rightarrow \infty$ . Из уравнений (3.1), (3.2) следует, что относительная погрешность расчета по этим зависимостям будет иметь порядок величины  $|(1-\Psi_w)\chi|^{-1}$ . По определению предельные зависимости не будут содержать в качестве параметра частоту пульсации. Условие  $|\chi| = \infty$  отвечают следующие равенства  $f_1, f_3 = 0, f_2 = f$ , справедливые всюду, за исключением плоскости  $\xi = 0$ . При  $|\chi| = \infty$  уравнения (1.3) имеют вид уравнений стационарного пограничного слоя при наличии продольного градиента давления, но в рассматриваемом случае  $f$  — неизвестная функция, знак которой зависит от направления теплообмена. Если  $(1-\Psi_w)dU_{\infty}/dx > 0$ , то трение и теплоотдача больше, а если  $(1-\Psi_w)dU_{\infty}/dx < 0$  — соответственно меньше, чем при отсутствии пульсаций. Сопоставляя второе и третье уравнения системы (1.3), можно сделать вывод об отсутствии подобия между осредненными безразмерными полями скорости и температуры в пульсирующем пограничном слое, что значительно усложняет решение задачи. Предельные зависимости для трения и теплообмена могут быть найдены путем численного интегрирования уравнений (1.3) совместно с граничными условиями (1.4).

4. Исследуем подробно случай, когда температура поверхности пластины постоянна. Для удобства численного решения перейдем к новым переменным

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{1}{2} \left( \frac{\langle U_{\infty} \rangle}{\langle v_{\infty} \rangle x} \right)^{1/2} \int_0^y \frac{\langle \rho \rangle}{\langle \rho_{\infty} \rangle} dy,$$

$$\varphi = 2 \int_0^{\infty} \frac{\langle U \rangle}{\langle U_{\infty} \rangle} d\eta, \quad \theta = \frac{\langle T \rangle - \langle T_{\infty} \rangle}{\langle T_w \rangle - \langle T_{\infty} \rangle}$$

Осредненные уравнения и граничные условия запишутся так:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} &= 4\xi B \frac{dB}{d\xi} (\Psi_w - 1) (1 - \theta) [\Psi_w + (1 - \Psi_w)\theta] \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \text{Pr} \varphi \frac{\partial \theta}{\partial \eta} &= 0 \\ \varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0, \quad \theta = 0 \quad (\eta = 0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 2, \quad \theta = 1 \quad (\eta = \infty) \end{aligned}$$

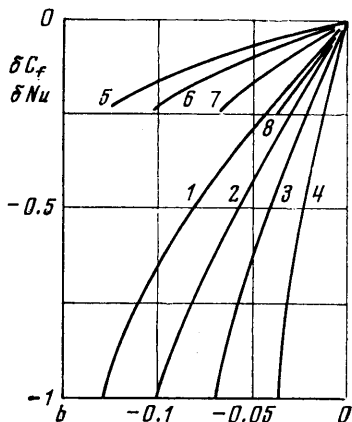
На фиг. 1-4 представлены предельные зависимости для трения и теплообмена, полученные в результате решения нелинейной краевой задачи (4.1) на ЭЦВМ для

$Pr=1$ . Зависимости представлены на плоскости  $\delta C_f(b)$ ,  $\delta Nu(b)$  для различных значений  $\Psi_w$ . На фиг. 1, 2: 1, 5 -  $\Psi_w=2$ ; 2, 6 -  $\Psi_w=3$ ; 3, 7 -  $\Psi_w=5$ ; 4, 8 -  $\Psi_w=10$ ; 1-4 - трение; 5-8 - теплоотдача. На фиг. 3, 4: 1, 4 -  $\Psi_w=0$ ; 2, 5 -  $\Psi_w=0.2$ ; 3, 6 -  $\Psi_w=0.5$ ; 1-3 - трение, 4-6 - теплоотдача.

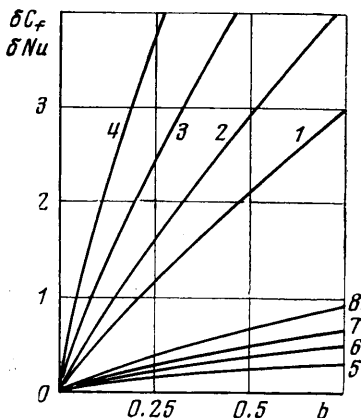
Здесь

$$\delta C_f = \frac{C_f - C_{f0}}{C_{f0}}, \quad \delta Nu = \frac{Nu - Nu_0}{Nu_0}, \quad b = (1 - \Psi_w) B \frac{dB}{dx} \delta_0^{**} R_x^{1/2}$$

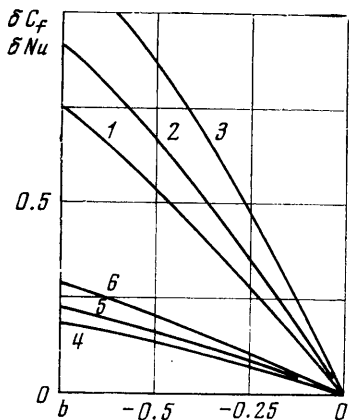
где  $C_{f0}$ ,  $Nu_0$  - коэффициент сопротивления и критерий Нуссельта при отсутствии пульсаций,  $\delta_0^{**} (=0.685x Re_x^{-1/2})$  - толщина потери импульса при отсутствии пульсаций.



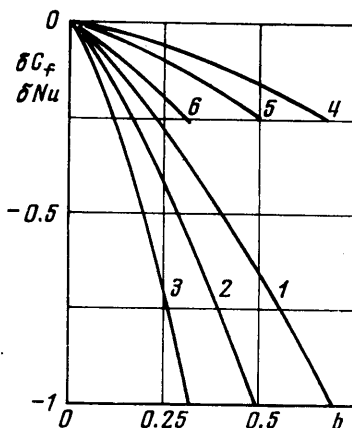
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

При  $\Psi_w > 1$  пульсации вызывают значительно большее изменение трения и теплоотдачи, чем при  $\Psi_w < 1$ . Это объясняется тем, что в первом случае амплитуда пульсации скорости всюду, за исключением области  $y \lesssim \sigma$ , больше  $u_\infty$ , а во втором случае меньше  $u_\infty$ . Фиг. 1-4 иллюстрируют отсутствие аналогии Рейнольдса в пульсирующем пограничном слое. Наиболее сильное влияние пульсации оказывают на трение. Относительное изменение теплоотдачи составляет в среднем 20% изменения трения. Более значительное ухудшение теплоотдачи происходит, как этого и следовало ожидать, при отрыве пограничного слоя, но и здесь оно не превышает 25%. Сопоставляя фиг. 1 и 2, а также фиг. 3 и 4, можно заключить, что при одном и том же по абсолютной величине значении параметра  $b$  уменьшение коэффициентов трения и теплоотдачи превышает их увеличение. Это происходит потому, что при  $b < 0$  профиль осредненной температуры менее заполненный, чем при  $b > 0$ , и, следовательно,

абсолютная величина второго члена в правой части равенства (3.1) в первом случае больше. Таким образом, если, например, рассмотреть задачу о влиянии стоячей звуковой волны, длина которой  $\Lambda$  меньше длины пластины, на коэффициенты трения и теплоотдачи, то их осредненные по длине значения для  $x > \Lambda$  должны быть меньше соответствующих значений для стационарного пограничного слоя. Это заключение не противоречит выводам ряда экспериментальных исследований (например, [6]), которые некоторыми авторами считались ошибочными.

Рассмотрение может быть легко обобщено на случай, когда пульсация — периодическая функция времени. В этом случае под параметром  $b$  следует понимать

$$(1 - \Psi_w) \frac{\delta_0^{**} (Re_x)^{1/2}}{\langle U_\infty \rangle^2} \sum_{n=1}^{\infty} u_{n\infty} \frac{du_{n\infty}}{dx}$$

где  $u_{n\infty}$  — спектральная составляющая пульсации скорости  $u_\infty'$ . Покажем это. Так как система уравнений (2.1)–(2.3) линейна, осредненные члены в уравнениях (1.3) будут иметь вид

$$\left\langle \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{\infty} C_n(i\omega_n) \sum_{k=1}^{\infty} \bar{D}_k(i\omega_k) e^{i(\omega_n - \omega_k)t} \right) \right\rangle$$

где  $C_n(i\omega_n)$ ,  $D_k(i\omega_k)$  — спектральные составляющие пульсаций или их производные по координатам  $x$ ,  $y$ , черта означает комплексное сопряжение. Можно установить, что при  $|\chi| \rightarrow \infty$  выполняется  $f_1, f_3 = 0$ ,  $f_2 = f$ . В асимптотическом выражении для  $f_2$  имеет место  $C_n \sim u_{n\infty}$ ,  $D_k \sim du_{k\infty}/dx$  и, следовательно,

$$f \sim \left\langle \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_{n\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{du_{k\infty}}{dx} e^{i(\omega_n - \omega_k)t} \right) \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n\infty} \frac{du_{n\infty}}{dx}$$

что и требовалось показать.

Авторы благодарны Г. А. Любимову за полезное обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 4 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Richardson P. D. Effects of sound and vibration on heat transfer. Appl. Mech. Rev., 1967, vol. 20, No. 3.
2. Тепло- и массообмен в звуковом поле. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, СО АН СССР, 1970.
3. Костерин С. И., Кожин И. А., Леонтьев А. И. Влияние пульсаций давления в потоке газа на конвективный теплообмен. Теплоэнергетика, 1959, № 3.
4. Румынский А. И., Сенкевич М. В. Влияние пульсаций большой амплитуды на теплообмен. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
5. Фанд, Кэй. Воздействие акустических колебаний на свободную конвекцию у горизонтального цилиндра. Тр. Америк. об-ва инж. механ. Сер. С. Теплопередача, 1961, т. 83, № 2.
6. Порди, Джексон, Гортон. Влияние резонансного акустического поля на течение вязкой жидкости. Тр. Америк. об-ва инж. механ. Сер. С. Теплопередача, 1964, т. 86, № 1.
7. Karlsson K. F. An unsteady turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 4.
8. Lemlich R. The effect of acoustic vibration on forced convective heat transfer. A. I. Ch. E. Journal, 1961, vol. 7, No. 1.
9. Karstner L., Shin S. H. Critical Re-number for steady and pulsating flow. Engineering, London, 1951.
10. Lin C. C. Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow. Proc. 9-th Intern. Congress Appl. Mech., Bruxelles, 1957, vol. 4.
11. Силаев Д. А. Асимптотическое интегрирование системы уравнений пограничного слоя методом осреднения. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 1.
12. Lighthill M. J. The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuation in the stream velocity. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1954, vol. 224, No. 1156.
13. Ohmi Munekazy Usui Tateo, Fukawa Michio, Harasaki Shuichi. Pressure and velocity distribution in pulsating laminar pipe flow. Bull. JSME, 1976, vol. 19, No. 129.