

АКУСТИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ
МАГНИТОГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛОТНОЙ
ПЛАЗМЫ

И. М. РУТКЕВИЧ

(Москва)

Исследования электропроводности плотной неидеальной плазмы паров металлов указывают на возможность использования таких сред для МГД преобразования энергии [1]. При этом определяющая роль отводится эффекту резкого возрастания проводимости среды с увеличением ее плотности: $(\partial \sigma / \partial \rho)_T > 0$. Возрастающая зависимость $\sigma(\rho)_T$ установлена в экспериментах с парами ртути [2-4] и цезия [5].

Зависимость σ от термодинамических параметров может приводить к акустической неустойчивости течений в МГД каналах. Для плазмы, используемой в МГД генераторах открытого цикла и характеризуемой условиями $(\partial \sigma / \partial \rho)_T < 0$, $(\partial \sigma / \partial T)_p > 0$, акустическая неустойчивость рассматривалась во многих работах (см., например, [6-10]).

В данной статье исследуется акустическая неустойчивость течения в канале МГД генератора сжимаемой среды при условиях, характерных для плотных металлических паров: $(\partial \sigma / \partial \rho)_T > 0$, $(\partial \sigma / \partial T)_p < 0$. Наряду со специфической проводимостью рассматриваемая среда отличается от плазмы продуктов сгорания органического топлива, применяемой в генераторах открытого цикла, слабым проявлением эффекта Холла и сравнительно большими значениями показателя адиабаты γ . Последнее обстоятельство требует учета взаимодействия между энтропийной и звуковыми волнами в проводящей среде.

Для слабонеоднородных течений определены условия потери устойчивости. Показано, что при достаточно резком возрастании $\sigma(\rho)_T$ неустойчивость стационарных течений возникает начиная с весьма низких значений числа Маха, отвечающих дозвуковым потокам. Изучаются типы неустойчивостей и дисперсионные эффекты. Обнаружена область параметров, в которой осуществима абсолютная неустойчивость. Построено решение задачи с начальными условиями, иллюстрирующее взаимодействие (связанность) неустойчивой звуковой и устойчивой энтропийной волн.

1. Рассмотрим нестационарное течение изотропно проводящего газа по каналу МГД генератора, две стенки которого $y = \pm h(x)$ — сплошные электроды, а стенки $z = \pm b$, перпендикулярные приложенному магнитному полю $\mathbf{B}(x)$, являются изоляторами. В пренебрежении трением и теплообменом система уравнений квазиодномерного течения в общепринятых обозначениях имеет вид

$$(1.1) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho + \frac{\rho}{h} \frac{\partial uh}{\partial x} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) u + \frac{\partial p}{\partial x} = -\sigma u B^2 (1-K)$$

$$p \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) S = c_v (\gamma - 1) \sigma u^2 B^2 (1-K)^2$$

$$p = \rho RT, \quad S = c_v \ln \frac{T}{\rho^{\gamma-1}} + \text{const}, \quad \sigma = \sigma(\rho, T), \quad K = \frac{E}{uB}$$

В (1.1) входят величины, осредненные по сечению канала. В частном случае $h = \text{const}$ уравнения (1.1) описывают строго одномерное течение невязкого и нетеплопроводного газа. Коэффициент нагрузки K для генераторного режима течения лежит в интервале $(0, 1)$. Для применимости системы (1.1) необходимо выполнение условий

$$(1.2) \quad \text{Re}_m = \mu_0 \sigma u L \ll 1, \quad (\omega \cdot L / u) \text{Re}_m \ll 1$$

позволяющих пренебречь индуцированным магнитным полем и вихревым электрическим полем. Здесь ω — характерная частота процесса, L — характерный размер неоднородностей (например, длина МГД взаимодействия в случае стационарного течения).

Рассматривается область термодинамических параметров, в которой влияние неидеальности плазмы сказывается на ее проводимости, но не на уравнении состояния [1]. Как следует из экспериментов [2, 11], уравнение состояния совершенного газа, принятое в (1.1), является хорошим приближением при $\rho \leq 0.2\rho_c$, $T \geq T_c$, где ρ_c , T_c — параметры в критической точке.

Пусть на стационарное (фоновое) течение наложены малые возмущения. Параметры фонового течения, обозначаемые ниже величинами с нулевым индексом, удовлетворяют стационарной системе, получаемой из (1.1) при $\partial/\partial t = 0$. Если линеаризовать уравнения (1.1) около стационарного решения, после чего принять коэффициенты получившихся уравнений постоянными и перейти к безразмерным переменным, по формулам

$$(1.3) \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \xi = \frac{x}{u_0 t_0}, \quad t_0 = \frac{\rho_0}{(1-K_0)\sigma_0 B^2}$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0} - 1, \quad u' = \frac{u}{u_0} - 1, \quad S' = \frac{S - S_0}{c_V}$$

придем к следующей системе:

$$(1.4) \quad \frac{D\rho'}{D\tau} + \frac{\partial u'}{\partial \xi} + C_1 \rho' + C_2 u' = 0$$

$$\frac{Du'}{D\tau} + M^{-2} \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} + \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial S'}{\partial \xi} + C_3 \rho' + C_4 u' + C_5 S' = 0$$

$$\frac{DS'}{D\tau} + C_6 \rho' + C_7 u' + C_8 S' = 0$$

$$\left(\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad M^{-2} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0 u_0^2} \right)$$

Здесь M — число Маха в невозмущенном потоке, а коэффициенты C_i определяются формулами

$$(1.5) \quad C_1 = -u_0 t_0 (\ln \rho_0)_x, \quad C_2 = -u_0 t_0 (\ln u_0)_x$$

$$C_3 = \gamma(\gamma - 1)(1 - K_0) + \lambda_\rho + u_0 t_0 [(\ln u_0)_x + (\gamma - 1)M^{-2}(\ln \rho_0)_x]$$

$$C_4 = (1 - K_0)^{-1} + u_0 t_0 (\ln u_0)_x, \quad C_5 = (\gamma - 1)(1 - K_0) + \lambda_S + u_0 t_0 M^{-2} (\ln \rho_0)_x$$

$$C_6 = \gamma(\gamma - 1)(\gamma - \lambda_\rho)(1 - K_0)M^2, \quad C_7 = -\gamma(\gamma - 1)(1 + K_0)M^2$$

$$C_8 = \gamma(\gamma - 1)(1 - \lambda_S)(1 - K_0)M^2$$

Здесь нижний индекс x означает дифференцирование стационарных распределений по координате. Величины λ_ρ и λ_S определяются выраже-

ниями

$$(1.6) \quad \lambda_p = \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \rho} \right)_{s_0} = \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \rho} \right)_{T_0} + (\gamma - 1) \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln T} \right)_{\rho_0}$$

$$\lambda_s = c_v \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln S} \right)_{\rho_0} = \left(\frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln T} \right)_{\rho_0}$$

При линеаризации системы (1.4) учитывалось, что продольные возмущения не приводят к изменениям электрического поля.

Допущение о постоянстве коэффициентов линеаризованной системы справедливо при анализе устойчивости коротких волн, пространственный масштаб которых l удовлетворяет условию $l \ll L_0$, где L_0 — длина изменения фоновых параметров. Это допущение позволяет искать решения системы (1.4) в виде гармонических возмущений $\sim \exp[i(k\xi - \omega\tau)]$ при $k \gg 1$. С точностью до членов порядка k^{-2} дисперсионное уравнение, отвечающее системе (1.4), имеет вид

$$(1.7) \quad P(\xi) = \xi^3 - M^{-2}\xi + (ik)^{-1}(a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3) = 0$$

$$a_1 = (1 - K_0)^{-1} + \gamma(\gamma - 1)(1 - \lambda_s)(1 - K_0)M^2 + u_0 t_0 [(\ln u_0)_x - (\ln \rho_0)_x]$$

$$a_2 = -\lambda_p + (\gamma - 1)[1 + K_0 - \gamma(1 - K_0)] +$$

$$+ u_0 t_0 [(M^{-2} - 1)(\ln u_0)_x - (\gamma - 1)M^{-2}(\ln \rho_0)_x]$$

$$a_3 = (\gamma - 1)(1 - K_0)(\gamma\lambda_s - \lambda_p)(\xi = 1 - \omega/k)$$

Затухание и раскачка волн, а также их дисперсия, определяются входящими в (1.7) диссипативными коэффициентами a_i .

Дисперсионное уравнение (1.7) можно использовать для анализа как коротких гармонических волн, так и локализованных возмущений (импульсов), ширина которых $l \ll L_0$. На величину l имеется также ограничение снизу, так как для очень коротких волн будет существенным влияние теплопроводности и вязкости газа. Хотя масштаб возмущений в рассматриваемой модели ограничен с двух сторон, соответствующий диапазон изменения l может быть достаточно широким для проявления дисперсионных эффектов.

2. Нахождение критерия устойчивости эквивалентно определению условий, при которых все корни полинома $P^*(z) = P(-iz)$ при $\text{Im } k = 0$, $\text{Re } k > 0$ лежат в левой полуплоскости $\text{Re } z < 0$. Поскольку полином $P^*(z)$ имеет комплексные коэффициенты, приходим к обобщенной задаче Рауса — Гурвица. Метод ее решения, изложенный в [12], позволяет найти как условия устойчивости, так и число корней с $\text{Re } z > 0$, т. е. число независимых нарастающих волн при потере устойчивости. Критерий устойчивости состоит в выполнении следующих неравенств:

$$(2.1) \quad a_3 < 0, F_{\pm} = a_1 \mp a_2 M + a_3 M^2 > 0$$

Условия (2.1) определяют область устойчивости в пространстве параметров, характеризующих невозмущенное течение. Неравенство $a_3 < 0$ эквивалентно условию

$$(2.2) \quad (\partial \sigma / \partial T)_{\rho_0} < 0$$

В дальнейшем будем считать условие (2.2) выполненным, так как оно соответствует экспериментальным данным для плазмы плотных металлических паров в той области, где обнаружен рост $\sigma(\rho)_T$ [2-5]. Поэтому в рассматриваемой среде (в отличие от продуктов сгорания [8]) число неустойчивых газодинамических мод не может быть больше двух. Ввиду того что

условия (2.1) не зависят от k , для определения типа возбуждаемых волн можно использовать коротковолновые асимптотики корней уравнения (1.7). При $k \rightarrow \infty$ получим

$$(2.3) \quad \omega_{\pm} = (1 \pm M^{-1})k^{-1/2}F_{\pm}i + O(k^{-1}), \quad \omega_s = k + a_3 M^2 i + O(k^{-1})$$

Значения ω_+ , ω_- и ω_s отвечают быстрой акустической, медленной акустической и энтропийной ветвями функции $\omega(k)$. Названия ветвей приняты в соответствии с предельными при $k \rightarrow \infty$ значениями фазовых скоростей волн. Как следует из (2.3), при $F_+ < 0$ неустойчива быстрая, а при $F_- < 0$ — медленная волна. Энтропийная волна устойчива в силу неравенства (2.2). Из (2.1) и выражений для величин a_i , данных в (1.7), следует, что параметр λ_s фактически не входит в выражения для F_+ и F_- . Поэтому влияние термодинамической зависимости σ на устойчивость звуковых волн определяется только параметром λ_p .

В дальнейшем предполагается $\lambda_p > 0$, что соответствует широкой области параметров плотной плазмы [2-5]. Для плотных паров металлов второе слагаемое в правой части формулы (1.6.1) обычно положительно и меньше первого. Существует также диапазон, в котором зависимостью $\sigma(T)_p$ можно пренебречь и принять $\lambda_p \approx (\partial \ln \sigma / \partial \ln \rho)_T$, $\lambda_s \approx 0$.

Конкретный вид областей устойчивости зависит от режима фонового течения. Однако, если учесть, что градиенты фона не содержат величин λ_p , можно получить простые асимптотические формулы при $\lambda_p \gg 1$

$$F_{\pm} = -M[M(\gamma-1)(1-K_0) \mp 1]\lambda_p + O(1)$$

Отсюда следует, что при фиксированном M и достаточно больших значениях λ_p медленная волна всегда неустойчива, а быстрая волна неустойчива при $M > (\gamma-1)^{-1}(1-K_0)^{-1}$.

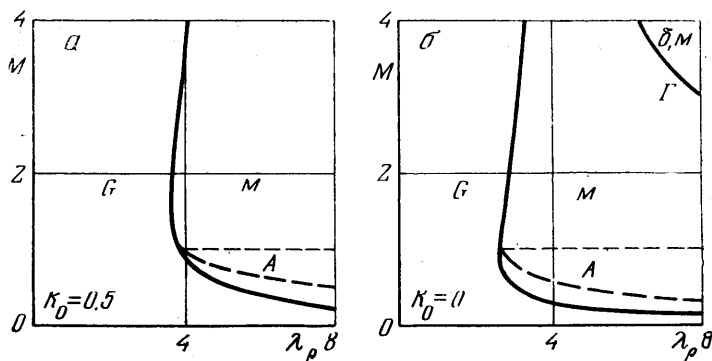
На фиг. 1, a и b изображены области устойчивости G и области неустойчивости на плоскости параметров λ_p, M при $\gamma = 5/3$ для случая течения с постоянной скоростью u_0 при $K_0 = 0.5$ и 0 соответственно. Обозначения b и m — начальные буквы названий имеющих нарастающих волн. Аналогичные области при $\gamma = 5/3$ для случая невозмущенного течения с постоянной плотностью ρ_0 при $K_0 = 0.5$ и 0 показаны на фиг. 2, a и b соответственно. Для рассмотренных стационарных течений производные $(\ln \rho_0)_x$ и $(\ln u_0)_x$, входящие в коэффициенты a_i , выражались непосредственно через правые части системы (1.1).

В парах металлов, где достижимы значения $\lambda_p \gg 4$ [3, 5], наиболее опасной будет медленная волна, раскачка которой возможна уже в дозвуковом режиме течения. Область неустойчивости расширяется при уменьшении коэффициента нагрузки.

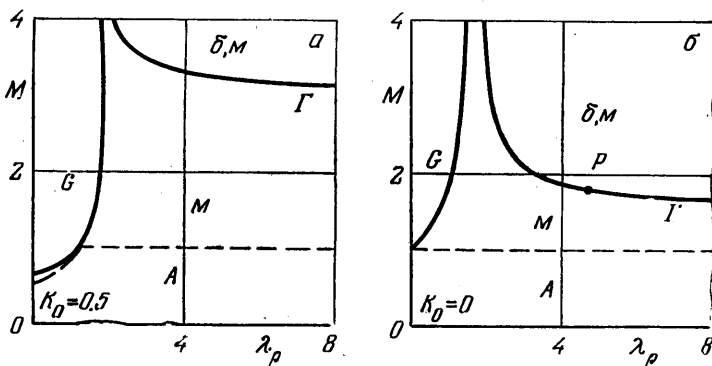
3. При движении плотной плазмы в магнитном поле может возникать как конвективная, так и абсолютная неустойчивость. Применительно к плазме продуктов сгорания в генераторах открытого цикла тип неустойчивости рассматривался в [9].

Определение типа неустойчивости основывается на рассмотрении всех ветвей комплексной функции $k(\omega)$, определяемой из дисперсионного уравнения для комплексных значений ω . Критерием абсолютной неустойчивости является существование в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$ точки ветвления ω^* , в которой совпадают две ветви функции $k(\omega)$, отвечающие волнам с разными направлениями распространения [13]. При этом одна из ветвящихся в точке ω^* волн является неустойчивой [14].

При $M > 1$ все волны распространяются в одну сторону, поэтому неустойчивость сверхзвукового потока плазмы всегда конвективная. Локализованное возмущение, наложенное на сверхзвуковой поток, существует в



Фиг. 1



Фиг. 2

канале конечной длины конечное время. Если, например, на входе в канал ($\xi=0$) применен прямоугольный импульс давления единичной амплитуды с длительностью τ_e , то в сечении $\xi>0$ возмущение исчезает при $\tau > \tau_e + (1-M^{-1})^{-1}\xi$. Амплитуда возмущения $A(\xi)$ (коэффициент усиления) в момент достижения задним фронтом импульса сечения ξ определяется выражением

$$(3.1) \quad A = \exp(N\vartheta), \quad N = \frac{\sigma_0 B^2 (1-K_0)x}{\rho_0 c_0}, \quad \vartheta = \frac{-F}{2(M-1)}$$

Здесь N — параметр МГД взаимодействия, определенный по размерной длине x и невозмущенной скорости звука c_0 . Существует значение λ_0 , такое, что полупрямая ($M=1, \lambda_\rho > \lambda_0$) лежит в области неустойчивости медленной волны (см. фиг. 1, 2). Тогда при $\lambda_\rho > \lambda_0$ в области $M > 1$ существует оптимальное число Маха $M_*(\lambda_\rho)$, минимизирующее коэффициент усиления. Наличие оптимума следует из того, что величина ϑ при $M \rightarrow 1$ растет за счет уменьшения скорости медленной волны, а при $M \gg 1$ — за счет возрастания инкремента.

Области существования абсолютной неустойчивости могут содержать только внутри неустойчивых дозвуковых областей. При рассмотрении функции $k(\omega)$ дисперсионное уравнение (1.7) удобно представить в виде

$$(3.2) \quad Q(\chi) = (1-M^2)\chi^3 + 2\chi^2 + \chi - (i\omega)^{-1}(g_1\chi^2 + g_2\chi + g_3) = 0 \\ \chi = k/\omega - 1, \quad g_1 = M^2(a_1 + a_2 + a_3), \quad g_2 = M^2(a_2 + 2a_3), \quad g_3 = M^2a_3$$

Если при $M < 1$ неустойчива только медленная волна или обе акустические волны, то критерием абсолютной неустойчивости будет существо-

вание у одного из уравнений $\chi_-(\omega) = \chi_+(\omega)$, $\chi_-(\omega) = \chi_s(\omega)$ корня $\omega = \omega^*$ с $\text{Im } \omega^* > 0$. Если же неустойчива только быстрая волна, то критерием абсолютной неустойчивости будет наличие такого корня у уравнения $\chi_-(\omega) = \chi_+(\omega)$.

Полное аналитическое исследование данного вопроса можно провести для случая $a_3 = 0$, отвечающего условию $(\partial \sigma / \partial T)_{p_0} = 0$. Область параметров, в которой

$$|a_3| \leq (\gamma - 1) |(\partial \ln \sigma / \partial \ln T)_p| \ll \lambda_0$$

существует в плотной плазме [3, 5] (хотя и является сравнительно узкой), и анализ указанного предельного случая представляет определенный интерес. При $a_3 = g_3 = 0$ уравнение (3.2) точно разрешимо и энтропийная волна является нейтрально устойчивой ($\chi_s = 0$). Критерием абсолютной неустойчивости в этом случае будет выполнение неравенства $a_1 + M^2 a_2 < 0$.

При этом условии в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$ всегда имеются две точки ветвления быстрой и медленной волн, а при выполнении неравенств $a_1 < a_2 < 0$ — еще и точка ветвления энтропийной и медленной волн.

Границы областей абсолютной неустойчивости A для случая $a_3 = 0$ показаны на фиг. 1 и 2 пунктиром.

Определение границ абсолютной неустойчивости в общем случае $a_3 \neq 0$ связано с весьма громоздким рассмотрением дискриминанта $\Delta(\omega)$ кубического полинома $Q(\chi)$. Пример абсолютной неустойчивости при $a_3 < 0$ приводится в п. 4.

Отметим, что для конвективно-неустойчивых дозвуковых областей специального исследования требует вопрос о глобальной устойчивости [14].

4. Характерной особенностью исследуемых волн является линейное взаимодействие между ними (связанность волн). В рассматриваемом одномерном случае гиперболическую систему уравнений для возмущений можно привести к каноническому виду

$$\frac{D_i \Psi_i}{D\tau} + \sum_j N_{ij} \Psi_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$(4.1) \quad \Psi_{1,2} = u' \pm \frac{\rho'}{M} \pm \frac{S'}{\gamma M}, \quad \Psi_3 = \frac{S'}{\gamma M}$$

$$\frac{D_{1,2}}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + (1 \pm M^{-1}) \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{D_3}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Здесь Ψ_i — инварианты Римана, N_{ij} — недиагональная матрица, элементы которой при $i \neq j$ характеризуют взаимодействие различных волн. При наличии взаимодействия в общем случае нельзя построить решения задачи Коши, для которого хотя бы один из римановых инвариантов остался невозмущенным.

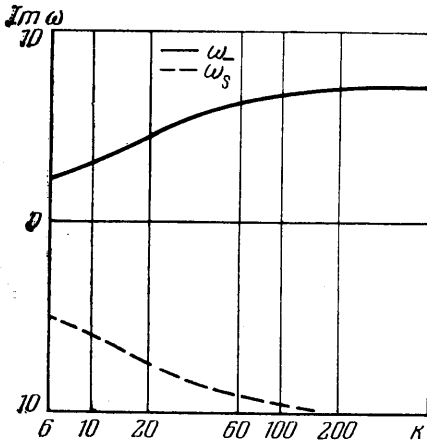
Из независимости критерия устойчивости (2.1) от волнового числа k и вида коротковолновых асимптотик (2.3) следует точная разрешимость кубического дисперсионного уравнения (1.7) при $F_+ = 0$ или $F_- = 0$, т. е. на поверхностях нейтральной устойчивости одной из акустических волн. Наиболее интересен случай $F_+ = 0$, $F_- < 0$, отвечающий кривым типа Γ на фиг. 1 и 2, когда произвольное возмущение содержит нейтральную быструю, неустойчивую медленную и устойчивую энтропийную моды. При этом для ветвей функции $\omega(k)$ имеют место формулы

$$(4.2) \quad \omega_+ = (1 + M^{-1})k, \quad \omega_{-,s} = [1 - (2M)^{-1}]k + 1/2(a_3 M^2 - a_2 M) i \mp \sqrt{d}$$

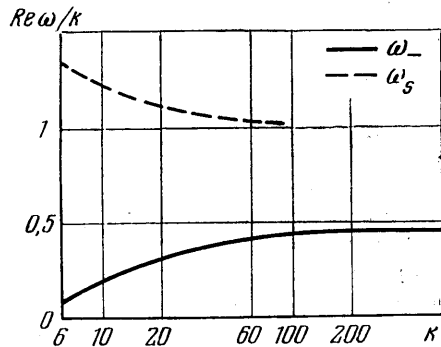
$$d = 1/4 [M^{-2}k^2 - (a_3 M^2 - a_2 M)^2] + 1/2(a_2 + a_3 M)ik \quad (a_2 < 0, a_3 < 0)$$

На фиг. 3 представлены зависимости $\text{Im } \omega_-(k)$ и $\text{Im } \omega_s(k)$ для случая течения с постоянной плотностью ρ_0 при $\gamma=5/3$, $\lambda_s=0$, $\lambda_p=4.6$, $M=1.8$. Этим кривым соответствует точка P на фиг. 2, б). На фиг. 4 для тех же условий приведены зависимости фазовой скорости $V(k)=\text{Re } \omega/k$ медленной и энтропийной волн.

Характер дисперсии в медленной волне аномальный, в энтропийной — нормальный. Поэтому можно ожидать появления осцилляций за энтропийным и перед медленными фронтами при распространении импульсов. Точное решение задачи Коши действительно предсказывает такие осцилляции.



Фиг. 3



Фиг. 4

Отделение быстрой моды $\omega_+(k)$ от двух остальных позволяет построить в замкнутой форме решение задачи Коши для линеаризованной системы. В рассматриваемом случае дисперсионному уравнению (1.7) соответствует следующее дифференциальное уравнение:

$$(4.3) \quad L_1(L_2(U))=0, \quad L_1=\partial/\partial\tau+(1+M^{-1})\partial/\partial\xi$$

$$L_2=\partial^2/\partial\tau^2+(2-M^{-1})\partial^2/\partial\tau\partial\xi+(1-M^{-1})\partial^2/\partial\xi^2+$$

$$+M(a_2-Ma_3)\partial/\partial\tau+M[a_2+(1-M)a_3]\partial/\partial\xi$$

Общее решение уравнения (4.3) можно представить в виде $U=U_1+U_2$, где U_1 и U_2 — общие решения уравнений $L_1(U)=0$ и $L_2(U)=0$ соответственно. Полагая

$$(4.4) \quad U_2=\exp[\theta(\xi, \tau)]W(\xi^*, \tau), \quad \xi^*=\xi-[1-(2M)^{-1}]\tau$$

$$\theta=M^2[(a_2+Ma_3)\xi-(a_2+(M-1)a_3)\tau]$$

придем к «телеграфному» уравнению относительно W

$$(4.5) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \frac{1}{4M^2} \frac{\partial^2}{\partial\xi^{*2}} + M^3 a_2 a_3 \right) W=0$$

решение которого известно (см., например, [15]). Приведем окончатель-

ное выражение для решения уравнения (4.3)

$$(4.6) \quad U(\xi, \tau) = \Phi_1(\xi - c_+ \tau) + \exp[\theta(\xi, \tau)] \left\{ \frac{1}{2} [\Phi_2(\xi - \tau) + \Phi_2(\xi - c_- \tau)] + \right. \\ \left. + \int_{\xi - \tau}^{\xi - c_- \tau} [\Phi_3(\eta) J_0(\alpha \Lambda) - \Phi_2(\eta) M^{3/2} (a_2 a_3)^{1/2} (2\Lambda)^{-1} \tau J_1(\alpha \Lambda)] d\eta \right\} \\ \Lambda = (\xi - \eta - c_- \tau)^{1/2} (\tau - \xi + \eta)^{1/2}, \quad \alpha = 2M^{3/2} (a_2 a_3)^{1/2}, \quad c_{\pm} = 1 \pm M^{-1}$$

Здесь Φ_i — произвольные функции, определяемые начальными условиями. Быстрой волне отвечает первое слагаемое, энтропийной и медленной волнам — остальные члены в (4.6). Медленная и энтропийная волны связаны: при начальных возмущениях, локализованных в ограниченной области, обе волны возбуждаются одновременно. Простейшее связанное состояние соответствует случаю $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = \delta(\eta)$, для которого будет

$$(4.7) \quad U(\xi, \tau) = \exp[\theta(\xi, \tau)] J_0[\alpha \Lambda_*(\xi, \tau)] \quad (c_- \tau < \xi < \tau) \\ U(\xi, \tau) = 0 \quad (\xi < c_- \tau, \xi > \tau), \quad \Lambda_* = (\xi - c_- \tau)^{1/2} (\tau - \xi)^{1/2}$$

Решение (4.7) описывает развитие импульса, который при $\tau = 0$ был сосредоточен в точке $\xi = 0$ и имел единичную амплитуду. При $\tau > 0$ импульс расплывается и его ширина становится равной τM^{-1} . Правый край импульса (энтропийный разрыв) затухает, а левый край (медленный разрыв) нарастает со временем. Для координаты движущейся точки $\xi = \xi'(\tau)$, определяющей границу ($\theta = 0$) между затухающей и нарастающей частями сигнала, получим формулу

$$\xi' = c' \tau, \quad c' = 1 - a_3 / (a_2 + M a_3)$$

При $M > 1$ будет $c_- > 0$ и сигнал (4.7) конвективно-неустойчив. При $M < 1$ и $a_2 < (1 - M) a_3$ неустойчивость будет абсолютной, поскольку $c_- < 0$, $c' > 0$, и с течением времени любая точка $\xi = \text{const}$ попадает в интервал нарастающих возмущений ($c_- \tau$, $c' \tau$). В этом случае абсолютная неустойчивость возникнет благодаря связанности устойчивой энтропийной и неустойчивой медленной волн. (Условие $F_+ = 0$ при $F_- < 0$ и $M < 1$ может выполняться, например, для тормозного режима течения с подводом электрической энергии.)

Для моментов времени $\tau > \tau_* = z_1 M^{-3/2} (a_2 a_3)^{-1/2}$, где z_1 — первый корень функции Бесселя $J_0(z)$, распределение $U(\xi, \tau)$ становится знакопеременным, а при $\tau \gg \tau_*$ импульс приобретает выраженную осциллирующую структуру.

Отметим, что при $a_3 = 0$ также можно получить решение типа (4.7), описывающее две связанные звуковые волны в случае $F_+ F_- \neq 0$. Полное разделение всех трех мод возможно при $a_3 = 0$ и $F_+ F_- = 0$.

Автор признателен Л. М. Биберману, Г. А. Любимову и И. Т. Якубову за полезные обсуждения.

Поступила 10 I 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Iakubov I. T., Vorobjev V. S.* MHD generator on non-ideal plasma. *Astronautica Acta*, 1974, vol. 18 (supplement), p. 79—83.
2. *Кикоин И. К., Сенченко А. П.* Электропроводность и уравнение состояния ртути в области температур 0—2000°С и давлений 200—5000 атмосфер. *Физика металлов и металловедение*, 1967, т. 24, вып. 5.
3. *Hensel F., Franck E. U.* Metal-nonmetal transition in dense mercury vapor. *Rev. mod. phys.*, 1968, vol. 40, No. 4.
4. *Schmutzler R., Hensel F., Franck E. U.* Gasförmiges Quecksilber unter hohem Druck als «Halbleiter». *Ber. Bunsenges. phys. Chem.*, 1968, Bd 72, Nr 9/10.

5. Renkert H., Hensel F., Franck E. U. Elektrische Leitfähigkeit flüssigen und gasförmigen Cäsiums bis 2000° C und 1000 bar. Ber. Bunsenges. physik. Chemie, 1974, Bd 75, Nr 6.
6. Velikhov E. P. Hall instability of current-carrying slightly-ionized plasma. Internat. Sympos. Magnetoplasmodynam. Electr. Power Generation, Newcastle upon Tyne, 1962. Reports. London, Inst Electr. Engrs, 1963.
7. Mc Cune J. E. Wave growth and instability in partially-ionized gases. Proc. 2-nd Internat. Sympos. Magnetohydrodynam. Electr. Power Generation, Paris, 1964, vol. 2, Paris, S. A.
8. Powers W. L., Dicks J. B. Transient wave growth in magnetogasdynamic generators. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 6.
9. Carter C. Convective and absolute instabilities in an open cycle MHD generators. Proc. 10-th Sympos. on engineering aspects of magnetohydrodynamics, Cambridge, Massachusetts, 1969.
10. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
11. Коршунов Ю. С., Сенченков А. П., Асиновский Э. И., Кунавин А. Т. Исследование $p - v - T$ -зависимости для цезия при высоких температурах и давлениях и оценка параметров критической точки. Теплофизика высоких температур, 1970, вып. 6.
12. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
13. Briggs B. J. Electron-stream interaction with plasmas. Mass., M. I. T., 1964.
14. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
15. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.