

## РАСЧЕТ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ В ГИПЕРЗВУКОВОМ СОПЛЕ

В. Н. ВЕТЛУЦКИЙ, М. И. МУЧНАЯ

(Новосибирск)

Особенностью течения в сопле гиперзвуковой аэродинамической трубы является наличие толстого пограничного слоя, что не позволяет рассчитывать все течение в сопле как невязкое, делая поправку на пограничный слой, как в обычных сверхзвуковых соплах. В настоящее время для гиперзвукового сопла наиболее распространенной является обратная задача [1], в которой для заданных условий невязкого течения находится изэнтропический контур, а затем рассчитывается пограничный слой. Изэнтропический контур наращивается на толщину вытеснения и принимается за искомый контур сопла. Такой подход дает хорошие результаты в случае относительно тонкого пограничного слоя и не может обеспечить высокой точности, когда толщина пограничного слоя порядка размера невязкого ядра. Само разбиение на невязкое ядро и пограничный слой в последнем случае чисто условное.

В настоящей работе решается прямая задача о течении в гиперзвуковом сопле. Все поле течения полагается вязким и описывается уравнениями «узкого канала» [2-4]. Алгоритм нахождения расхода и давления в каждом сечении взят за основу из работы [2]. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

1. Уравнения «узкого канала» могут быть получены из уравнений Навье — Стокса в предположении, что отношение радиальной скорости к осевой и отношение осевых градиентов к радиальным много меньше единицы [3]

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial(\rho ur^v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vr^v)}{\partial r} = 0 \\
 (1.1) \quad & \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}_0} \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^v \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\
 & \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial x} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial r} = \\
 & = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} u \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}_0 \text{Pr}_0} \frac{1}{r^v} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^v \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{2}{\text{Re}_0} \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \\
 & p = \rho T, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0
 \end{aligned}$$

В уравнениях (1.1) координаты обезразмерены по радиусу критического сечения сопла  $r_*$ , а зависимые переменные отнесены к их значениям в форкамере. За характерное значение скорости в форкамере берется величина  $\sqrt{2c_{p0}T_0}$ . Коэффициенты переноса  $\mu = \mu(T, p)$ ,  $\lambda = \lambda(T, p)$  и удельная теплоемкость  $c_p = c_p(T, p)$  заданы,  $\gamma_0$  и  $\text{Pr}_0$  — отношение удельных теплоемкостей и число Прандтля в форкамере. Число Рейнольдса рассчитано по условиям в форкамере и радиусу критического сечения сопла:  $\text{Re}_0 = \rho_0 r_* \sqrt{2c_{p0}T_0} \mu_0^{-1}$ . Параметр  $v$  равен нулю в плоском случае и единице в осесимметричном.

Уравнения (1.1) совпадают с уравнениями пограничного слоя для вязкого течения, а невязкое ядро описывают не хуже, чем в одномерном приближении.

Граничные условия задаются на стенке сопла и на оси

$$(1.2) \quad T=T_w(x), u=v=0 \quad (r=R(x))$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}=0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}=0, \quad v=0 \quad (r=0)$$

Контур сопла  $R(x)$  и температура стенки  $T_w(x)$  заданы.

Начальные условия ставятся в некотором сечении в дозвуковой части сопла

$$(1.3) \quad u=u_0(x), T=T_0(x), p=1 \quad (x=x_0)$$

Как показано в работе [4], этих условий достаточно для корректной постановки задачи. Последнее граничное условие в (1.2) может быть заменено условием сохранения расхода

$$(1.4) \quad \int_0^{R(x)} r^\nu \rho u \, dr = Q = \text{const}$$

Это условие использовалось для вычисления градиента давления, необходимость нахождения которого отличает эту задачу от обычной задачи пограничного слоя.

Для расчета течения в канале потребуется уравнение трубки тока. Это уравнение для плоского течения получено в [5], а для осесимметричного — в [2]. Если объединить оба результата и учесть зависимость удельной теплоемкости  $c_p$ , отношения удельных теплоемкостей  $\gamma$  и числа Прандтля от температуры и давления, то уравнение трубки тока, разрешенное относительно градиента давления, запишется в виде

$$(1.5) \quad \frac{dp}{dx} = \left\{ pR' + \frac{2\gamma_0}{\text{Re}_0(\gamma_0-1)} \int_0^R \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{u}{c_p T} \left( \frac{1}{\text{Pr}_0} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^\nu \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 2r^\nu \mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \right) \right] (\gamma M^2)^{-1} dr \right\} / \int_0^R \frac{1-M^2}{\sqrt{M^2}} r^\nu \, dr$$

$$M^2 = \frac{2\gamma_0}{\gamma_0-1} \frac{u^2}{\gamma T}$$

Здесь  $R'$  — производная  $R$  по  $x$ ,  $M$  — местное число Маха. Поскольку интегралы вблизи стенки расходятся, было использовано упрощение Лайтхилла, упомянутое в [2], в котором интегрирование вблизи стенки обрывается.

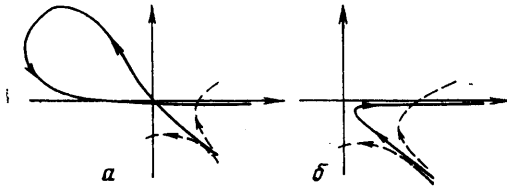
2. Задача решается методом конечных разностей с использованием итераций. Вся область покрывается равномерной сеткой по  $x$  и независимой переменной  $\eta = \ln(1 + \Delta - r/R(x))$ , введенной для растяжения пристеночной области с большими градиентами искомых функций ( $\Delta$  — параметр растяжения). Уравнения неразрывности, движения и энергии расписаны по двухслойной неявной разностной схеме. Интегралы в уравнении сохранения расхода и в уравнении трубки тока заменены суммой по трапециям.

Для расчета градиента давления в докритической части сопла используется метод одновременного нахождения градиента давления и продольной скорости из уравнения движения и уравнения сохранения расхода [6], обобщенный на случай сжимаемого течения. Однако в окрестности критического сечения и в расширяющей-

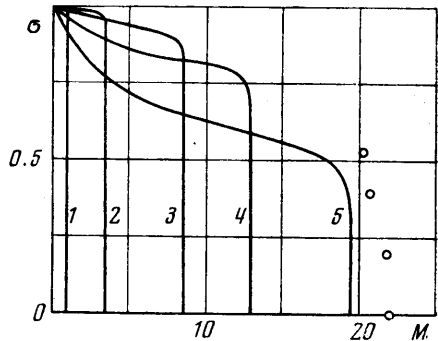
ся области, где давление резко падает, этот метод неприменим. О нахождении градиента давления в окрестности критического сечения будет сказано ниже. Вниз по потоку от области критического сечения  $dp/dx$  ищется с помощью уравнения сохранения расхода с использованием итераций по  $p$ , как, например, в [2] в сужающейся части сопла.

В процессе счета по рассчитанным параметрам течения определялся градиент давления из уравнения трубки тока (1.5). Хорошее его совпадение со значением  $dp/dx$ , полученным из условия сохранения расхода, подтверждает справедливость упрощения Лайтхилла. Однако попытка использования уравнения (1.5) в основном расчете приводит к значительному нарушению условия сохранения расхода, и решение расходится.

3. Наиболее важные моменты алгоритма расчета — выбор расхода и прохождение критического сечения. При малых расходах давление уменьшается вдоль сужающейся части сопла, достигая минимума в окрестности критического сечения и далее градиент давления становится положительным, поток тормозится. Для сравнительно больших расходов отрицательный градиент давления уменьшается до тех пор, пока не будет достигнута точка, в которой невозможно удовлетво-



Фиг. 1



Фиг. 2

рить уравнению трубки тока (1.5). Эти два режима течения соответствуют обращению в нуль в некотором сечении числителя или знаменателя в уравнении (1.5). При больших числах Рейнольдса для некоторой промежуточной величины расхода имеет место седловая точка, в которой числитель и знаменатель уравнения (1.5) одновременно обращаются в нуль. Это значение расхода является единственным физически приемлемым, при котором в расширяющейся части сопла имеет место сверхзвуковое в интегральном смысле течение, т. е.

$$\int_0^R (1-M^2)(\gamma M^2)^{-1} r^2 dr < 0$$

Процедура выбора расхода схематически изображена на фиг. 1, а. Пунктирные линии соответствуют заниженным (верхняя) и завышенным (нижняя) значениям расхода.

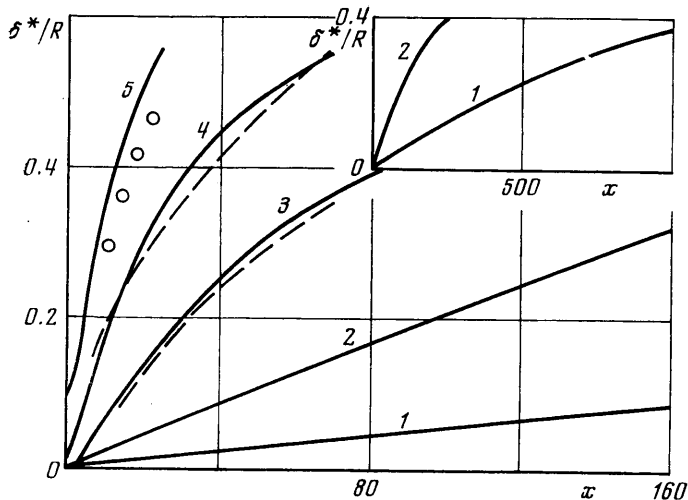
После прохождения седловой точки применяется описанный выше итерационный метод для нахождения  $dp/dx$  из условия сохранения расхода в отличие от [2], где  $dp/dx$  за седловой точкой находится из уравнения трубки тока. По-видимому, в [2] условие  $Q = \text{const}$  не успевало существенно нарушиться, так как объектом исследования были короткие сопла. В настоящей работе продолжение контрольного счета  $dp/dx$  по уравнению трубки тока в расширяющейся части сопла показало, что при достаточном удалении от критического сечения по мере нарастания пограничного слоя кривая на плоскости знаменатель — числитель уравнения (1.5) поворачивает обратно, образуя петлю, и может вторично пройти через начало координат. При этом течение становится дозвуковым в интегральном смысле, хотя числа Маха на оси могут быть велики. Торможение в пограничном слое далее может привести к тому, что градиент давления будет положительным и число Маха на оси начнет падать.

При уменьшении числа Рейнольдса петля в левой верхней четверти плоскости знаменатель — числитель уравнения (1.5) стягивается к началу координат, и при достаточно малых  $Re_0$  кривая вообще не выходит из правой нижней четверти (фиг. 1, б), т. е. течение остается всюду дозвуковым в интегральном смысле.

Необходимо заметить, что влияние числа Рейнольдса следует рассматривать вместе с влиянием геометрии сопла, температуры стенки и свойств газа, от совокупности которых зависит скорость нарастания пограничного слоя.

При отсутствии седловой точки (фиг. 1, б) экстраполяцию все равно приходится проводить, чтобы приблизиться к началу координат на плоскости знаменатель — числитель уравнения (1.5). В этом случае экстраполяция заканчивается там, где отличие расхода от выбранного значения не превышает 0,1% той точности, с которой считаются все параметры течения.

4. Описанным выше методом были проведены расчеты, в результате которых получены профили продольной и поперечной скоростей, температу-



Фиг. 3

ры, числа Маха, распределение статического давления вдоль оси и толщины вытеснения. Во всех вариантах расчетов  $x_0 = -5$ , угол полураствора входного конуса  $\theta_1 = -20^\circ$ . На входе задавались единичный профиль температуры и параболический профиль скорости, соответствующий выбранному расходу. Температура стенки плавно уменьшалась от  $T_0$  до  $T_w$  между  $x = -5$  и  $-4$ . Проверочные расчеты показали, что выбор других значений  $x_0$ ,  $\theta_1$  и более длинного участка перехода от  $T_0$  до  $T_w$  на стенке практически не влияет на течение в сверхзвуковой области.

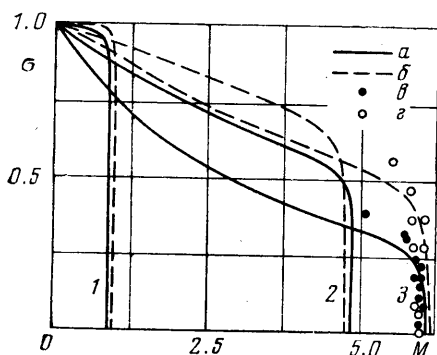
Для всех рассчитываемых газов брались реальные равновесные значения коэффициентов вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости [7, 8]. На фиг. 2 приведены профили чисел Маха в различных сечениях гиперзвукового конического сопла с углом полураствора  $\theta_2 = 10^\circ$  при течении азота с параметрами  $p_0 = 150$  атм,  $T_0 = 1520^\circ$  К,  $T_w = 300^\circ$  К,  $Re_0 \approx 8 \cdot 10^5$  (кривые 1–5 соответствуют сечениям  $x = 0, 10, 100, 300, 1100$ ). Параболический профиль, задаваемый на входе, быстро перестраивается, и в критическом сечении  $M = 1$  всюду, кроме тонкого пограничного слоя. Далее вниз по потоку пограничный слой нарастает и в сечении  $x = 1100$  занимает  $\sim 65\%$  радиуса сопла. Толщина вытеснения  $\delta^*$  в этом сечении, определяемая по формуле

$$\int_0^R \rho u r dr = \rho_0 u_0 \int_0^{R-\delta^*} r dr$$

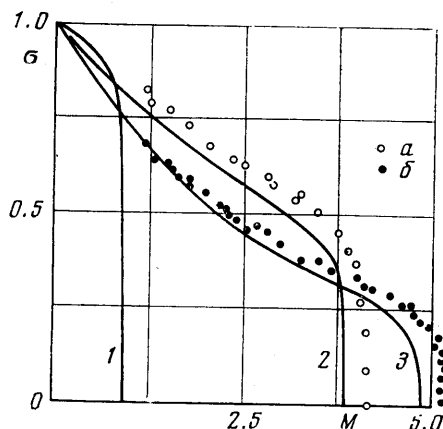
где параметры  $\rho_0$  и  $u_0$  на оси, составляет  $\sim 40\%$  (кривая 1 на фиг. 3). На фиг. 2 для сечения  $x = 1100$  нанесены экспериментальные данные из [9], которые лежат выше расчетных на 7–12%. Следует заметить, что в рас-

четах не была учтена колебательная неравновесность, которая имеет место при данных параметрах течения.

В работе [9] приведены результаты измерений статического давления вдоль сопла от  $x=330$ , где  $p=2.45 \cdot 10^{-6}$ , до  $x=900$ , где  $p=2.40 \cdot 10^{-7}$ . Расчетные значения давления, полученные в настоящей работе, на этом участке лежат выше экспериментальных на 20÷50%. Такое расхождение не следует считать большим, если учесть, что давление по длине сопла падает на семь порядков.



Фиг. 4



Фиг. 5

Два следующих варианта расчетов были выполнены для течения воздуха в двух профилированных осесимметричных соплах. Их контуры были спроектированы на основе расчета методом характеристик изэнтропического контура с последующим добавлением к радиусу этого контура толщины вытеснения [1]. Изэнтропический контур обоих сопел брался одним и тем же, так же как и начальные условия  $p_0=0.05$  атм,  $T_0=450^\circ\text{K}$ ,  $Re_0 \approx 3.75 \cdot 10^3$ . Но для первого сопла  $T_w=290^\circ\text{K}$ , а для второго  $T_w=80^\circ\text{K}$ . Соответственно максимальный угол полуоткрытия  $\theta_2$  сопла 1 составил  $20^\circ$ , сопла 2 —  $14^\circ$ .

На фиг. 4 представлены профили числа Маха в трех сечениях (кривые 1—3 соответствуют сечениям  $x=0, 20, 60$ ;  $a$  и  $b$  обозначают соответственно расчетные профили настоящей работы и экспериментальные данные [1] для сопла 1;  $\beta$  и  $\gamma$  — для сопла 2). В сечении  $x=0$  число Маха на оси меньше единицы, заметен тонкий пограничный слой. В сечении  $x=60$  пограничный слой составляет 80% радиуса для сопла 1 и 60% для сопла 2.

Результаты расчета в этом сечении в ядре хорошо согласуются с экспериментальными данными, но размеры ядра и число  $M$  в пограничном слое несколько меньше экспериментальных. Сравнение результатов на оси сопла дает максимальное расхождение 5% для числа  $M$  при  $x=30$ . На фиг. 3 нанесена толщина вытеснения линией 4 для сопла 1 и линией 3 для сопла 2. Пунктирные кривые, соответствующие экспериментам [1], близки к расчетным. Для сопла 2 толщина вытеснения при  $x=0$  отрицательна, как, например, в [10], что объясняется сильным охлаждением газа вблизи стенки.

Контур сопла 2 был продолжен экстраполяцией за сечение  $x=70$  до  $x=84$ , где он стал параллелен оси. Дальнейшее нарастание пограничного слоя привело к тому, что при  $x=72$  градиент давления стал положительным (кривая на фиг. 1,  $a$  пересекла ось абсцисс), и число Маха на оси стало убывать.

Проведен расчет для течения гелия в коническом сопле с углом полураствора  $\theta_2=10^\circ$  при  $p_0=100$  атм,  $T_0=1000^\circ$  К,  $T_w=290^\circ$  К,  $Re_0 \approx 3 \cdot 10^5$ . Полученные результаты (б) и данные одномерной теории (а) приведены ниже.

$M_0$	$p$	$T$	$q$	$x$	
4.25	0.00766	0.142	0.153	—	а
	0.00783	0.142	0.157	10	б
14.25	$0.239 \cdot 10^{-4}$	0.0142	0.00515	—	а
	$0.232 \cdot 10^{-4}$	0.0142	0.00484	110	б
20	$0.478 \cdot 10^{-5}$	0.00744	0.00197	—	а
	$0.497 \cdot 10^{-5}$	0.00748	0.00178	240	б

При одинаковых числах  $M$  на оси сравниваются значения статического давления и температуры на оси, а также приведенный расход  $q=F_1/F_0$ . Здесь  $F_0$  — площадь критического сечения,  $F_1$  — площадь сечения изэнтропического контура для одномерной теории, в настоящем расчете эффективная площадь сечения  $F_1=\pi(R-\delta^*)^2$ . Толщина вытеснения  $\delta^*$  для гелия на фиг. 3 обозначена цифрой 2. Из приведенных данных видно, что лучше всего с одномерной теорией совпадают рассчитанные значения температуры (в пределах 1%), различие в статическом давлении не превышает 4%, а отклонение в приведенном расходе достигает 11%. Хорошее совпадение результатов подтверждает тот факт, что толщина вытеснения является именно той величиной, на которую надо надстраивать изэнтропический контур при решении обратной задачи о течении в сопле. Такой подход дает верные значения параметров на оси, но истинных размеров ядра и профилей параметров течения дать не может. Интересно отметить, что при  $M=20$  гелиевое сопло в 4 раза короче азотного.

Рассмотренные выше варианты расчетов относятся к случаю, когда течение в расширяющейся части сопла сверхзвуковое в интегральном смысле (фиг. 1, а). Приведем результаты расчета, в котором реализуется течение, всюду дозвуковое в интегральном смысле (фиг. 1, б). Форма сопла для этого варианта и экспериментальные данные для сравнения взяты из работы [11]. Сопло коническое с углом полураствора  $\theta_2=21.8^\circ$ ,  $p_0=0.005$  атм,  $T_0=T_w=293^\circ$  К,  $Re_0 \approx 1.3 \cdot 10^3$ , рабочий газ — воздух. На стенке брались обычные условия прилипания и равенства температуры газа и стенки, хотя в этом варианте, по-видимому, более точным был бы учет эффектов проскальзывания.

На фиг. 5 представлены профили числа Маха (кривые 1–3 соответствующих сечениям  $x=0, 11.1, 23.3$ ; а и б — данные эксперимента для двух последних сечений).

В критическом сечении сопла пограничный слой составляет ~40% радиуса, толщина вытеснения 10% (кривая 5 на фиг. 3); в сечении  $x=23.3$  — соответственно 90 и 55%. Как видно из фиг. 5 и 3, полученные значения толщины вытеснения несколько выше экспериментальных.

Сравнение чисел Маха на оси дает максимальное различие в 7%. В то же время рассчитанные значения скорости в ядре с точностью в 2% совпадают с экспериментальными данными. Более заметное расхождение чисел Маха с экспериментом может быть объяснено приближенностью условия  $dp/dt=0$ , что сильнее всего сказывается в области, близкой к критическому сечению.

Поступила 21 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кудрявцева Л. И., Межиров И. И., Пономарев С. П., Якушова В. Л. Экспериментальное исследование осесимметричных профилированных сверхзвуковых сопел при малых числах  $Re$ . Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 3.

2. Рэй. Некоторые результаты численных расчетов вязких течений разреженного газа в соплах в приближении узкого канала. Ракетная техника и космонавтика, 1971, т. 9, № 5.
3. Вильямс Ш. Течения вязкого сжимаемого и несжимаемого газа в узких каналах. Ракетная техника и космонавтика, 1963, т. 1, № 1.
4. Ветлуцкий В. Н., Севастьяненко В. Г. Исследование теплообмена с учетом излучения при течении газа в трубе. ПМТФ, 1968, № 5.
5. Weinbaum S., Garvine R. W. On the two-dimensional viscous counterpart of the one-dimensional sonic throat. J. Fluid Mech., 1969, vol. 39, No. 1.
6. Симуни Л. М. Движение вязкой несжимаемой жидкости в плоской трубе. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 6.
7. Севастьянов Р. М., Здункевич М. Д. Таблицы теплофизических свойств воздуха и азота в диапазоне температур от 100 до 5000—15 000° К. Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 922.
8. Вассерман А. А., Казавчинский Я. З., Рабинович В. А. Теплофизические свойства воздуха и его компонентов. М., «Наука», 1966.
9. Koppewallner G. Der Hypersonische Vakuumwindkanal der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen. DGRR/WGLR-Jahrestagung Bad Godesberg, 1966, X. Nr. 66—113.
10. Whitfield D. Viscous effects in low-density nozzle flows. Arnold Engng Develop. Center, Techn. Rept, 1973, No. 73—52.
11. Есеев Г. А. Экспериментальное исследование течения разреженного газа. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.