

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ РАЗВИТЫХ КАВЕРН С УЧЕТОМ СИЛ ТЯЖЕСТИ И ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

В. Н. БУЙВОЛ, Ю. Р. ШЕВЧУК

(Киев)

В развитых кавитационных течениях силами поверхностного натяжения, как правило, пренебрегают, поскольку их влияние на основные размеры развитой каверны незначительно. Это показывают как эксперименты [1, 2], так и некоторые теоретические исследования [3, 4]. Однако последние экспериментальные исследования, специально поставленные для выявления влияния поверхностного натяжения на размеры каверны, показали, что не всегда этим влиянием можно пренебречь [5]. Так как силы поверхностного натяжения существенно зависят от кривизны поверхности, а силы тяжести эту кривизну значительно меняют, то целесообразно провести более подробное исследование формы каверны в несомой жидкости с учетом поверхностного натяжения.

Пусть диск радиуса  $R_n^*$  движется с постоянной скоростью  $V_0^*$  вдоль отрицательной оси  $x^*$  цилиндрической системы координат  $x^*, r^*, \theta$ , которая неподвижно связана с покоящейся идеальной несомой жидкостью. Здесь и ниже звездочкой отмечаются размерные величины. Масштабами обезразмеривания служат полуудлина  $L_k^*$  каверны, скорость  $V_0^*$  и плотность  $\rho^*$ . Предполагаем, что в момент  $t=0$  движущийся диск, за которым образовалась развитая тонкая каверна, находится в координатной плоскости  $x=0$ , являющейся в дальнейшем плоскостью наблюдения. В следующие моменты времени в эту плоскость будут непрерывно входить последующие поперечные сечения каверны, динамика которых будет в дальнейшем изучаться, основываясь на уравнениях гидродинамики тонкого тела. Пусть  $R_0(t)$  — радиус поперечного сечения каверны за диском в несомой жидкости, а  $\xi(t, \theta)$  — изменение этого радиуса, вызванное силами тяжести и поверхностного натяжения. Поскольку функция  $\xi$  всегда может быть представлена рядом Фурье, то радиус деформированного поперечного сечения можно представить в виде

$$(1) \quad R(t, \theta) = R_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(t) \cos n\theta, \quad n=1$$

Слагаемое  $\xi_1(t) \cos \theta$  описывает всплывание центров поперечных сечений без деформации их и в построении формы сечений не участвует. По величине это слагаемое становится весьма значительным в хвостовой части каверны.

Потенциал рассматриваемого течения тоже можно искать в виде

$$\Phi(t, r, \theta) = \Phi_0(t, r) + \varphi(t, r, \theta)$$

где  $\varphi$  — потенциал возмущенного течения около тонкого тела. Возмущения  $\varphi$  и  $\xi$  считаем малыми. Тогда, удовлетворяя условиям непротекания и постоянства давления на деформированной поверхности каверны и считая, что  $\xi_1 \gg \xi_n$  ( $n \geq 2$ ), можно показать, что возмущения  $\xi_n$  определяются решениями следующей нелинейной системы дифференциальных уравнений:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d^2(R_0 \xi_0)}{dt^2} \ln R_0 + \frac{d(R_0 \dot{\xi}_0)}{dt} + \Delta P_0 + U_0 + \frac{1}{2} (\dot{\xi}_1^2 + \xi_1 \ddot{\xi}_1) &= 0 \\ - \frac{1}{R_0} \frac{d(R_0 \dot{\xi}_1)}{dt} + \dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2 + \Delta P_1 + U_1 &= 0 \\ - \frac{1}{n R_0} \frac{d(R_0^2 \dot{\xi}_n)}{dt} + \frac{n-1}{n} R_0 \dot{\xi}_n - \dot{\xi}_1 (\dot{\xi}_{n-1} - \dot{\xi}_{n+1}) + \Delta P_n + U_n &= 0 \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \Delta P = P_n - P_{k0}, \quad U = \frac{\xi_1 + R_0 \cos \theta}{Fr^2}$$

Здесь  $\Delta P_n$  и  $U_n$  — коэффициенты Фурье-функций;  $P_k, P_{k0}$  — давления (отнесенные к скоростному напору  $\rho^* V_0^{*2}$ ) в возмущенной и невозмущенной кавернах, а  $Fr_l$  — число Фруда по полудлине каверны. Точка обозначает дифференцирование по времени.

Уравнения (2) необходимо дополнить начальными условиями. Так как скорость в месте схода струй с диска постоянна и равна  $V = \sqrt{1 + \sigma}$ , где  $\sigma$  — число кавитации, то

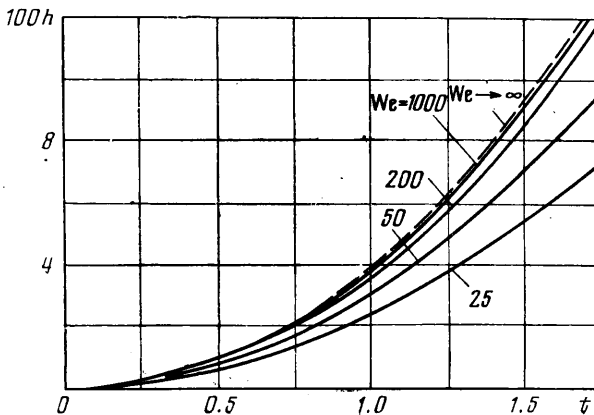
$$(4) \quad \xi_n(0) = \dot{\xi}_n(0) = 0$$

Функцию  $R_0(t)$ , описывающую невозмущенную каверну, возьмем в виде [1]

$$(5) \quad R_0^2(t) = R_k^2 [1 - (1 - \lambda^2)(1 - t)^2]$$

$$R_k = \frac{\sqrt{0.84(1 + \sigma)\sigma}}{1.92 - 3\sigma}, \quad \lambda^2 = \frac{4.39\sigma}{1 + \sigma}$$

где  $R_k$  — радиус миделевого сечения каверны, а  $\lambda^2$  — известный коэффициент. Они зависят от числа кавитации  $\sigma$ . Обозначим через  $\tau^*$  коэффициент поверхностного на-



Фиг. 1

тяжения. Если  $P^*$  — давление, создаваемое в каверне насыщенными парами или газом, то с учетом поверхностного натяжения давление на стенки каверны выразится соотношением

$$P_k^* = P^* - \tau^* \left( \frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*} \right)$$

где  $R_1^*$  и  $R_2^*$  — главные радиусы кривизны поверхности каверны. Отсюда следует, что поверхностное натяжение можно интерпретировать как некоторое уменьшение давления в каверне и, следовательно, увеличение числа кавитации  $\sigma$

$$(6) \quad \sigma_1 = \sigma + \frac{2\tau^*}{\rho^* V_0^{*2}} \left( \frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^*} \right) = \sigma + \Delta\sigma$$

$$\Delta\sigma = \frac{4}{We} \left( \frac{R_n}{R_1} + \frac{R_n}{R_2} \right), \quad We = \frac{\rho^* V_0^{*2} d_n^*}{\tau^*}$$

Здесь  $We$  — число Вебера. Отсюда вытекает, что расчет кавитационного течения при заданном числе кавитации  $\sigma$ , числа Фруда  $Fr$  (по диаметру диска) и числе Вебера  $We$  эквивалентен расчету кавитационного течения при том же числе Фруда, но при числе кавитации  $\sigma_1$ .

Аналогично учитывалось влияние сил поверхностного натяжения на форму каверны при обработке экспериментов [5]. При этом радиусом меридиональных сечений авторы фактически пренебрегали, а второй радиус кривизны заменяли некоторым средним значением. Такое приближение вполне оправдано при определении основных размеров каверны. При исследовании локальной структуры поверхности каверны правильнее будет вычислять оба радиуса в каждом из сечений, причем, не внося существенных погрешностей, форму каверны для этой цели можно принимать недеформированной.

Поскольку каверна достаточно хорошо аппроксимируется эллипсоидом вращения, получающимся от вращения вокруг большой оси  $L_k$  эллипса  $(x^*/L_k^*-1)^2 + (y^*/R_k^*)^2 = 1$ , лежащего в плоскости  $xy$  подвижной системы координат, то ее радиусы кривизны  $R_1^*$  и  $R_2^*$  можно найти как радиусы кривизны этого эллипсоида. Радиус кривизны меридиональных сечений  $R_1$  является радиусом поперечных сечений осесимметричной каверны и определяется формулой (5). Радиус  $R_2^*$  — радиус кривизны вышеуказанного эллипса, который после обезразмеривания и некоторых преобразований представим в виде

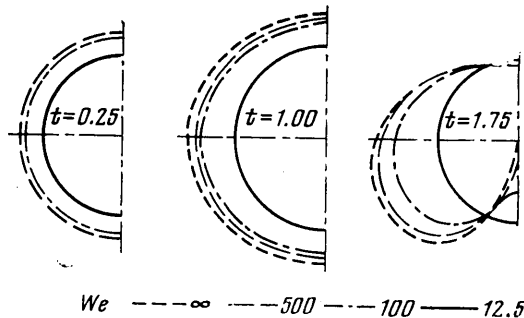
$$(7) \quad R_2 = \frac{1}{R_k} \left[ \frac{R_1^2}{R_k^2} + R_k(1-t)^2 \right]^{3/2}$$

Для решения задачи был разработан численный метод на основе процедуры Рунге — Кутты, который реализовался на ЭВМ БЭСМ-4М. Сама система была ограничена  $n=7$ : добавление большего числа уравнений приводило к уточнениям, не превышающим одного процента даже для сравнительно больших возмущений.

В качестве примера исследовалось течение при  $\sigma=0.08$  и  $Fr=10$ . Это течение отличается существенным, хотя и не слишком большим действием сил весомости, а расчет подобных течений без учета поверхностного натяжения очень хорошо был подтвержден экспериментально [7].

Некоторые результаты расчетов приведены в виде графиков на фиг. 1 и 2, на которых показаны величины всплываний и характерные формы поперечных сечений  $t=0.25, 1.00, 1.75$  при различных числах Вебера. (Так как каверна симметрична, то изображена только половина ее сечения.)

В домицельной части каверны, где силы тяжести еще не успевают преодолеть сил дисперсия каверны, по мере уменьшения числа Вебера поперечные сечения сжимаются в полном соответствии с природой действия сил поверхностного натяжения. Так, при  $We=500$  площадь миделевого сечения уменьшается по сравнению с  $We \rightarrow \infty$  приблизительно на 10%. Если  $We=100$ , то практически все сечения уменьшаются на 15%. При этом значительно ослабляется действие на каверну сил тяжести: высота водяного гребня в хвосте каверны уменьшается почти вдвое. При  $We=25$  площадь миделя уменьшается без малого вдвое, влияние сил тяжести даже в самом хвосте каверны становится очень слабым. А при  $We=12.5$  влияние сил тяжести на форму поперечных сечений каверны уничтожается практически совсем. Они только слегка всплывают, уменьшаясь по площади более чем на половину. Величины



Фиг. 2

всплывания в средней части уменьшаются вдвое, а в хвостовой части это уменьшение достигает трехкратных величин.

В этом расчете число Вебера  $We=12$  граничное: при его уменьшении силы поверхностного натяжения начинают превалировать над силами тяжести в формировании вида поперечных сечений каверны. Ясно, что при меньших числах кавитации и Фруда величина граничного значения числа Вебера уменьшается.

Анализ форм поперечных сечений каверны показывает, что поверхностное натяжение следует учитывать, если число Вебера меньше 100. Это же значение числа Вебера  $We=100$  следует и из рассмотрения зависимостей искривления оси каверны силой тяжести (фиг. 1). Попутно заметим, что в опытах [5] применялся диск диаметром  $d_n^*=2$  мм, что соответствует числу Вебера  $We=53$  при  $Fr=10$ .

Фиг. 1 показывает и характер действия поверхностного натяжения на поведение искривления оси: при уменьшении числа Вебера зависимость искривления оси от продольной координаты (если рассматривать подвижную, связанную с диском систему координат) все лучше описывается линейной функцией. Это обстоятельство удобно использовать при построении приближенных аналитических решений системы (2).

В заключение заметим, что учет поверхностного натяжения весьма важен, в частности, для вентилируемых каверн. Количество газа, необходимое для поддержания каверны, сильно зависит от формы ее хвостовой части, которая, как было показано выше, может сильно зависеть от числа Вебера.

Поступила 14 II 1977

## ЛИТЕРАТУРА

1. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
2. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хеммит Ф. Кавитация. М., «Мир», 1974.
3. Кузнецов Б. Г., Шепеленко В. Н., Яненко Н. Н. Расчет формы каверны в поле тяготения с учетом поверхностного натяжения. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1967, № 13, вып. 3.
4. Шепеленко В. Н. К расчету кавитационных течений, ПМТФ, 1968, № 5.
5. Эпштейн Л. А. Методы теории размерностей и подобия в задачах гидромеханики судов. Л., «Судостроение», 1970.
6. Буйвол В. Н. Колебания и устойчивость деформируемых систем в жидкости. Киев, «Наукова думка», 1975.
7. Буйвол В. Н., Лапин В. А., Шевчук Ю. Р. О форме тонких пространственных каверн за круглым диском в несжимаемой жидкости. Прикл. механ., 1976, т. 12, № 6.

УДК 533.6.011.72

**ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МОЩНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ВОЗДУХЕ**

А. А. КОНЬКОВ, А. И. СОКОЛОВ

(Москва)

Важнейшим вопросом, возникающим при использовании ударных труб для аэродинамических и теплофизических исследований, является вопрос о размерах и однородности ударно-нагретой области за ударной волной. Особенно острой становится необходимость решения этого вопроса при высоких числах Маха. Так, например, исследования электроразрядных ударных труб (без диафрагмы) привели к пессимистическим выводам относительно их использования для изучения свойств плазм, поскольку при числах Маха  $\sim 20$  и выше электроразрядная плазма догоняет ударную волну [1]. Основными причинами, ведущими к сокращению размеров ударно-нагретой области и неоднородному распределению параметров в ней, являются мгновенное раскрытие диафрагмы, перемешивание в контактной области, возникновение пограничного слоя за ударной волной, охлаждение излучением. Первая из этих причин приводит к тому, что в ударной трубе возникает начальный участок, на котором происходит формирование и ускорение ударной волны.

В [2] дан обзор работ по этому вопросу и отмечается, что в конце начального участка в ударно-нагретой области имеет место существенная неоднородность параметров, вызванная предысторией распространения ударной волны на этом участке. Перемешивание в контактной области ведет к тому, что длина ударно-нагретой области сокращается примерно вдвое [2]. Кроме того весьма существенное сокращение вызывает и образование пограничного слоя, которое ведет к появлению слабых волн сжатия, а последние обуславливают уменьшение скорости ударной волны. С другой стороны, газ из пограничного слоя попадает в контактную область, что влечет за собой ее ускорение, а следовательно, и уменьшение расстояния между ней и ударной волной. Отметим также, что наличие пограничного слоя приведет к дополнительной неоднородности потока за ударной волной как перпендикулярно направлению потока, так и вдоль по потоку.

Наиболее полно эффекты, обусловленные пограничным слоем, рассмотрены в [3-8], однако принятая в этих работах идеализация серьезно ограничивает область применения и достоверность результатов. Сравнение, приведенное в [2], говорит об удовлетворительном согласии до  $M \leq 10$ , вычисленных согласно [6], и измеренных расстояний между ударной волной и контактной поверхностью. Также находятся в согласии между собой в этом диапазоне чисел Маха расчеты [7] и результаты измерений скорости потока (см., например, [2]). Необходимо отметить, однако, что найденное в [7] увеличение температуры к контактной области не согласуется с измерениями температуры за падающими ударными волнами [9], которые свидетельствуют о том, что температура, совпадая непосредственно за ударными волнами со значениями, рассчитанными по законам сохранения, далее к контактной области не возрастает, а уменьшается.