

$$= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{w}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = y \zeta$$

В системе (2) для безразмерных скоростей сохранены прежние обозначения,  $x=z/R$ ,  $y=r/R$ .

Предположим, что в отсутствие препятствий профиль осевой скорости в трубе был бы равномерным. Это дает граничное значение для функции тока на поверхности трубы:  $\psi_1 = \frac{1}{2} Ro (R_1/R)^2$  ( $y=R_1/R$ ).

Задача решалась методом установления аналогично тому, как это сделано в [1].

Результаты, отраженные на фиг. 1–4, показывают стационарные картины течения, полученные при следующих геометрических характеристиках области:  $R_1/R = \frac{3}{2}$ ,  $L/R = 20$ . Здесь  $R_1$  – радиус трубы,  $R$  – радиус цилиндра,  $h$  – высота цилиндра,  $L$  – длина рассматриваемого участка трубы. Величина  $L/R$  при фиксированном значении величины  $h/R$  выбиралась так, чтобы ее дальнейшее увеличение в отсутствие вращения не сказывалось на картине обтекания. На фиг. 1 показаны результаты такого расчета при  $Re=100$ ,  $\psi_1=0.28$ . Видно, что за цилиндром возникает зона рециркуляционного движения. При уменьшении расхода эта зона сокращается и движение приближается к симметричному относительно препятствия.

Если на это движение наложено твердотельное вращение, картина течения существенно изменяется (фиг. 2). Основное течение происходит выше препятствия, а по высоте препятствия возникает зона блокировки потока, в которой существуют медленные движения, связанные с вязким взаимодействием. При этом для вращательного параметра принято значение  $Ro=0.25$ .

Движение в области блокировки потока оказывается весьма чувствительным к воздействию дифференциального вращения, когда угловые скорости вращения цилиндра и трубы различны.

На фиг. 3 показана картина течения, когда цилиндр вращается медленнее окружающей жидкости ( $Re=100$ ,  $Ro=0.0078$ ,  $\omega_1/\omega=0.9$ ), а на фиг. 4, когда быстрее ( $Re=100$ ,  $Ro=0.0078$ ,  $\omega_1/\omega=1.1$ ). Изменение характера течения объясняется тем, что слабое движение в области блокировки подавляется движением, связанным с дифференциальным вращением.

Профили осевой скорости для течения, изображенного на фиг. 2, близки к симметричным для точек перед цилиндром и за ним.

Поступила 3 I 1977

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Симуни Л. М. Численное исследование явления «блокировки» при обтекании препятствия стратифицированной жидкостью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 4.
2. Veronis G. The analogy Between Rotating and Stratified Fluids. Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 2. Palo Alto, Calif., 1970.
3. Гринспен Х. П. Теория вращающихся жидкостей. Л., Гидрометеиздат, 1976.

УДК 532.527

### ФОРМА СВОБОДНЫХ ВИХРЕЙ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

А. А. ГРУЗДЕВ

(Москва)

Форма свободных вихрей (нелинейная теория) представляет интерес для расчета «тяжелонагруженных» крыльев и винтов. В последнее время этот вопрос приобрел особую актуальность в связи с воздействием следа, остающегося за тяжелым самолетом, на попадающий в него летательный аппарат [1].

Отдельные аспекты этой проблемы развиты в [2–9]. В [2] сделан вывод о локальных причинах неустойчивости тангенциальных разрывов. Видно, что вихревая нить, имеющая в рассматриваемой точке на оси диаметр  $\delta$ , индуцирует в этой точке локальную скорость, вектор которой направлен по бинормали к плоскости нити, величина изменяется асимптотически как  $\ln \delta^{-1}$ . Таким образом, идеальная вихревая нить при  $\delta \rightarrow 0$  движется с бесконечной скоростью.

В [3–5] получены общие теоремы движения вращающихся диффундирующих вихрей, а также рассмотрен приближенный процесс сворачивания вихревой поверхности

в пару вихревых жгутов. В [6, 7] исследован процесс деформации вихрей, сбегаящих с концов лопастей несущего винта, на основе уравнения движения поверхности тангенциального разрыва скорости. В [8] рассмотрено взаимодействие пары вихрей в покоящейся атмосфере и отмечено наличие колебательной неустойчивости по отношению к малым синусоидальным возмущениям, причем основное колебание имеет длину волны, в 8.6 раза большую, чем расстояние между вихрями.

В настоящей работе исследуется форма пары свободных диффундирующих вихрей крыла конечного размаха. Кроме самоиндукции и взаимной индукции учитывалось влияние присоединенного вихря и экрана. Предполагалось, что на больших расстояниях от крыла отсутствуют малые периодические возмущения и система свободных вихрей сносится вниз по потоку со скоростью  $\Gamma/2\pi b_\infty$ , где  $b_\infty$  — расстояние между вихрями. Результаты показали, что численная неустойчивость, отмеченная в [8, 9], зависит не только от метода нахождения главного значения (в смысле Коши) сингулярного интеграла, выражающего скорость на оси вихревого жгута, но и от способа аппроксимации решения. С уменьшением диаметра ядра вихря  $\delta$  не удается получить устойчивого решения в случае замены вихревой нити системой прямолинейных отрезков. Данный метод, использующий аппроксимацию формы вихрей методом наименьших квадратов, позволяет получить устойчивое решение для весьма малых значений  $\delta$ , а также в том случае, когда понижение порядка сингулярности проводится более грубым методом «усечения» [9].

Криволинейный П-образный вихрь оказывается очень полезным в качестве тематической модели летательного аппарата с большой подъемной силой для корректного и достаточно простого представления влияния исследуемого объекта на внешнее течение на расстояниях, где определяющее значение имеют характерные размеры и суммарная подъемная сила. При этом распределение подъемной силы играет второстепенную роль.

**1. Постановка задачи.** Пусть поле вихрей  $\omega$  замкнутой или бесконечной вихревой линии  $L$ , имеющей циркуляцию  $\Gamma$ , в начальный момент времени  $t=0$  заключено внутри нити, а затем диффундирует по пространству совместно с переносом вихрей согласно уравнению Гельмгольца.

$$(1.1) \quad d\omega/dt = \nu \Delta \omega + (\omega \nabla) \omega$$

На формирование вихревого следа основное влияние оказывает явление переноса элементов вихрей с жидкими частицами. Диффузия вихрей менее существенна, но, как отмечено в [7], необходимо, чтобы система вихрей имела пространственный характер, иначе на ядре возникнут бесконечные скорости. Влияние турбулентной конвекции на диффузию вихрей учтем заменой действительного коэффициента вязкости  $\nu$  некоторым эквивалентным коэффициентом турбулентной вязкости  $\nu_*$ .

Будем считать, что перенос вихревых жгутов удовлетворяет следующему уравнению, полученному из (1.1) отбрасыванием конвективных членов и заменой  $\nu$  на  $\nu_*$ :

$$(1.2) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu_* \Delta \omega$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$(1.3) \quad \omega(\mathbf{r}, t) = \int_L \frac{\Gamma}{2(\sqrt{\nu_* \pi t})^3} e^{-l^2/4\nu_* t} dL$$

$$l = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

Как показано в [6], поле скоростей, соответствующее полю вихрей  $\omega(\mathbf{r}, t)$ , определяется выражением

$$(1.4) \quad \mathbf{W} = \int_L \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{l} \times dL}{l^3} K(l)$$

$$(1.5) \quad K(l) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l/\delta} x^2 e^{-x^2} dx = \Phi(l/\delta) - \frac{2l}{\sqrt{\pi} \delta} e^{-(l/\delta)^2}$$

$$\Phi(l/\delta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l/\delta} e^{-x^2} dx, \quad \delta = \sqrt{4\nu_* t}$$

Точка  $P(\xi, \eta, \zeta) \in L$ . Формула (1.4) отличается от формулы Био – Савара наличием скалярной функции  $K(l)=0$ , если  $l=0$  и 1, если  $l>\sigma$ , где  $\sigma$  – радиус окружности с центром на  $L$ ;  $\sigma \approx 3\delta$ . При этом ядро интеграла в формуле (1.4) становится регулярным

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{K(l)}{l^2} = 0$$

Свяжем декартову систему координат с П-образным вихрем, движущимся вдоль оси  $x$  со скоростью  $V_\infty$  в потоке идеальной несжимаемой жидкости, свободные вихревые жгуты которого взаимодействуют между собой и с присоединенным вихрем.

Согласно [7] и в силу симметрии относительно плоскости  $z=0$  движение свободных вихрей описывается интегродифференциальным уравнением вида

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r}_1(s, t) = - \frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{L_j(t)} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial s_j'} \times \frac{\mathbf{l}_j}{l_j^3} K(l_j) ds_j' + \mathbf{V}$$

В качестве начального условия для уравнения (1.6) в момент времени  $t=0$  задается форма свободных вихрей  $L_j(0)$ . Интегродифференциальное уравнение (1.6) представляет собой предельный случай бесконечного множества дифференциальных уравнений в форме Коши, записанных для точек оси вихревого жгута. Здесь  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}^*$ ;  $\mathbf{V}^*$  – поле скоростей, вызванное присоединенным вихрем;  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  – векторы точек оси вихревых жгутов в момент времени  $t$ ;  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$  – векторы, соединяющие текущую точку интегрирования с точкой оси жгута, в которой вычисляется скорость. Индексы 1 и 2 относятся к вихревым жгутам, расположенным симметрично относительно плоскости  $z=0$ .

На достаточно большом удалении от крыла элементы вихрей движутся поступательно вниз по потоку до тех пор, пока не выполнится условие  $\omega \times \mathbf{W} = 0$ , где  $\mathbf{W}$  – вектор скорости, вычисленный на оси вихря. Это соответствует наклону вихревых нитей с углом  $\alpha = \arcsin \Gamma / (2\pi V_\infty b_\infty)$ . Здесь  $b_\infty$  – расстояние между вихрями при  $x \rightarrow \infty$ . Выделив на  $L_j$  конечный участок кривой  $S_j$  и прямолинейный луч  $L_j - S_j$ , уравнение (1.6) приведем к виду

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{r}_1(s, t) = - \frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{s_j(t)} \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial s'} \times \frac{\mathbf{l}_j}{l_j^3} K(l_j) ds' + \mathbf{V} + \mathbf{V}_1$$

Здесь  $\mathbf{V}_1$  – скорость от полубесконечных прямолинейных вихревых жгутов; таким образом вместо бесконечной области рассмотрим решение на отрезке  $0 \leq x \leq M$ ,  $M$  – абсцисса конца кривой  $S_j$ .

**2. Численный метод.** Система уравнений (1.7) решалась методом последовательных приближений. В правой части уравнений имеется член, содержащий особенность вида  $1/x$ , которая возникает из-за весьма грубой модели присоединенного вихря, заменяющего несущую поверхность. Поэтому начать интегрирование можно лишь выделив на оси  $x$  от начала координат окрестность  $\epsilon$ , величина которой должна быть задана априорно.

Разобьем отрезок  $\epsilon \leq \xi \leq M$  на  $N$  интервалов и аппроксимируем форму вихревых нитей в виде

$$(2.1) \quad \eta(\xi, t) = \sum_{k=0}^{k_1} A_k(t) f_k(\xi), \quad \zeta(\xi, t) = \pm \sum_{k=0}^{k_2} B_k(t) \varphi_k(\xi)$$

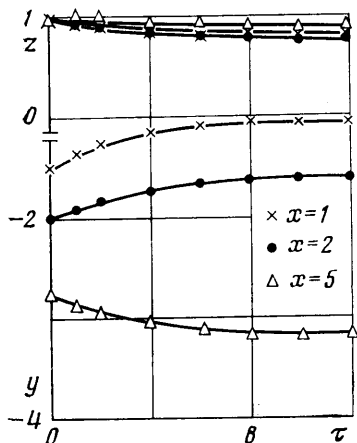
Плюс в формуле (2.1) относится к проекции вихревой нити, лежащей в положительной полуплоскости; минус – к отрицательной,  $k_1, k_2$  – число аппроксимирующих функций.

Вид аппроксимирующих функций  $f_k(\xi), \varphi_k(\xi)$  выбирается в соответствии с характером предполагаемого решения; коэффициенты  $A_k(t), B_k(t)$  определяются для каждого  $i$ -го приближения и зависят от способа аппроксимации. В данной работе аппроксимация проводилась методом наименьших квадратов, а  $f_k(\xi) = \varphi_k(\xi) = \xi^k$ . Следует отметить, что при замене вихревой нити прямолинейными отрезками, составляющими ломаную линию, узлы которой могут двигаться свободно, в отличие от рассматриваемого способа аппроксимации получить устойчивое решение возможно только искусственно увеличивая величину ядра вихря, с уменьшением которого увеличивается время установления, а с некоторого значения диаметра ядра возникает численная неустойчивость.

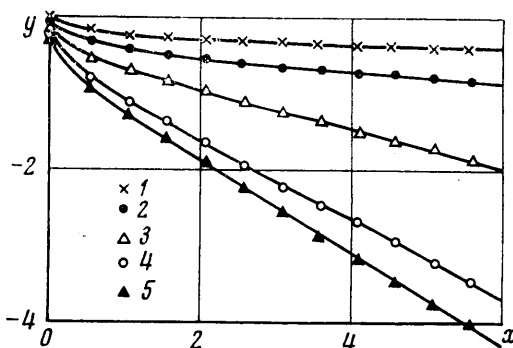
За начальное приближение принималось решение системы дифференциальных уравнений

$$(2.2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{W_y}{W_x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{W_z}{W_x}$$

где  $W_x, W_y, W_z$  — компоненты поля скоростей П-образного вихря с прямолинейными свободными жгутами, вычисленными на оси ядра. Все линейные величины, входящие в уравнения, отнесены к полуразмаху крыла  $H$ , а скорости — к скорости невозмущенного потока  $V_\infty$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Из первого приближения, полученного аналитически, определим коэффициенты  $A_k(0)$  и  $B_k(0)$ , соответствующие  $\tau=0$ . Здесь  $\tau = V_\infty t / H$  — безразмерное время.

Новое значение вектора решения  $\mathbf{r}_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ , характеризующего положение точек оси жгута в момент времени  $\tau$ , смещено относительно  $i-1$ -го приближения на шаг по времени  $\Delta t$ . Смещение вектора решения  $\mathbf{r}_i(x_i y_i z_i)$  в сечениях  $\xi = \xi_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) определялось путем интерполяции вектора  $\mathbf{r}_i$  по схеме Эйткина многочленом второго порядка, причем  $x_i = x_{i-1} = \xi_m$ . Вектор  $\mathbf{r}_i$  аппроксимировался методом наименьших квадратов, откуда определялись коэффициенты  $A_k(\tau)$  и  $B_k(\tau)$ . Значения  $A_k(\tau)$  и  $B_k(\tau)$  засылались в правую часть уравнений и интегрирование продолжалось до тех пор, пока

$$(2.3) \quad |y_i - y_{i-1}| \leq \varepsilon_1, \quad |z_i - z_{i-1}| \leq \varepsilon_2$$

При этом на каждой итерации на оси ядра вихря вычислялось проверочное значение скорости  $U(\xi_m)$ , в плоскостях нормальных оси вихревых жгутов.

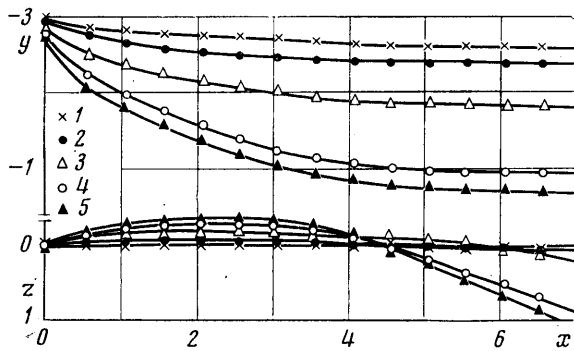
Необходимо отметить, что при достаточно больших значениях  $\delta = 0.2 \div 0.4$  условия (2.3) автоматически ведут к выполнению условия  $|U(\xi_m)| \leq \varepsilon_3$ . С уменьшением размеров ядра время установления возрастает; для очень малых  $\delta$  удается выделить решение по значению скорости  $U(\xi_m)$ , уменьшая величину шага  $\Delta t$ . Это условие служит критерием единственности искомого решения, ввиду того что условия (2.3) при достаточно малом значении  $\Delta t$  могут выполняться в промежуточных приближениях.

**3. Результаты расчетов.** Изложенным выше методом была рассчитана форма вихревых жгутов в неограниченном потоке и вблизи экрана. Расчеты проводились для различных значений параметра  $\Gamma/V_\infty H$  с расстоянием до экрана  $T$ .  $\Gamma/V_\infty H = 0.5, 1, 2, 3.5, 4$ ;  $T = 1, 3, \infty$ . Величина  $\delta = 0.394$  принималась постоянной и была взята из [10];  $N = 9, k_1 = k_2 = 3, \Delta t = 0.2, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.0256, \varepsilon_3 = 0.05, \varepsilon = 0.05$ .

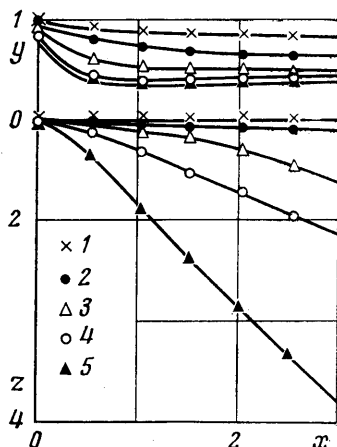
На фиг. 1 приведено поведение точек вихревого жгута в интервалы времени  $\tau = 0, 1, 2, 4, 12$  для  $\Gamma/V_\infty H = 3.5; T = \infty$ .

При  $\tau > 12$  форма вихрей практически не изменялась. На фиг. 2 изображена конфигурация вихревых жгутов для  $\Gamma/V_\infty H = 0.5, 1, 2, 3.5, 4; T = \infty$  после установления. Из полученных результатов видно, что при  $x > 2$  форма вихревых жгутов становится почти прямолинейной и отклоняется вниз тем больше, чем больше  $\Gamma/V_\infty H$ . В горизонтальной плоскости отклонение формы вихрей от прямых  $z = \pm 1$  весьма незначительно по сравнению с деформацией в вертикальном направлении.

На фиг. 3 и 4 учтено влияние экрана, который моделировался зеркально отраженным П-образным вихрем с циркуляцией противоположного знака. Расчеты проводились для тех же значений параметра  $\Gamma/V_\infty H$  с расстоянием до экрана  $T=1, 3$ . Решение устанавливается здесь за большее время  $\tau=40 \div 50$ , если первое приближение — П-образный вихрь с прямолинейными жгутами, а  $\Delta\tau=0.2$ . Как видно на фиг. 3 и 4, форма вихрей в этом случае имеет горизонтальную асимптоту в вертикальной плоскости. Влияние экрана приводит к сильной деформации вихревых жгутов



Фиг. 3



Фиг. 4

в вертикальном и горизонтальном направлениях. Отклонение жгутов от направления невозмущенного потока увеличивается с увеличением  $\Gamma/V_\infty H$  и с уменьшением  $T$ . На фиг. 2—4 цифрам 1—5 соответствуют значения  $\Gamma/V_\infty H=0.5, 1, 2, 3.5, 4$ .

Численные результаты были получены на ЦВМ М-222. Расчет формы для одного значения  $\Gamma/V_\infty H$  без учета экрана требует  $\sim 11$  мин счетного времени с шагом  $\Delta\tau=0.2$ ; с учетом экрана  $\sim 20$  мин. Расчеты проверялись с различными значениями шага  $\Delta\tau=0.05, 0.1, 0.2$ , и указали на практическое совпадение результатов.

Автор благодарит В. Э. Баскина за детальное обсуждение работы и ценные замечания.

Поступила 14 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Rossow V. J. Survey of computational methods for lift-generated wakes. In: Aerodynamic analysis requiring advanced computers, pt 2. Hampton, Virginia, Langley research center, 1975.
2. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта. Собр. соч., т. 4. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
3. Kaden H. Aufwicklung eines unstablen Unstetigkeitsfläche. Ingr. Archiv, 1931, Bd 2, H. 2.
4. Vortex wakes of large aircraft. Princeton, New Jersey, Aeronaut. Res. Associat., 1971.
5. Brashears M. R., Loran N. A., Robertson S. J. Analysis of predicted aircraft wake vortex transport and comparison with experiment. Federal Aviat. Administ. Systems Res. and Develop., 1974, No. 74, pt 1.
6. Баскин В. Э. О движении пространственной диффундирующей вихревой трубки в несжимаемой вязкой жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 165, № 6.
7. Баскин В. Э., Королева К. К. К нелинейной вихревой теории винта вертолета в горизонтальном полете. Тр. ЦАГИ, 1966, вып. 1043.
8. Crow S. C. Stability theory for pair of trailing vortices. AIAA Journal, 1973, vol. 8, No. 12.
9. Hama F. R. Progressive deformation of a curved vortex filament by its own induction. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 10.
10. Spreiter J. R., Sacks A. H. Rolling up of the trailing vortex sheet and its effect on the downwash behind wings. J. Aeronaut. Sci., 1954, vol. 18, No. 1.