МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1977

УДК 541.124:532.5

УРАВНЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ РЕЛАКСИРУЮЩИХ СМЕСЕЙ

А. Л. НИ, О. С. РЫЖОВ

(Москва)

Рассматриваются трансзвуковые течения химически активных газовых смесей, состав которых определяется произвольным числом реакций. На уравнения состояния смеси налагаются условия, обеспечивающие близость замороженной и равновесной скоростей звука. В результате асимптотического анализа системы уравнений Эйлера с присоединенными к ним уравнениями химических реакций получена приближенная система уравнений для векторов скорости частиц и полноты реакций. Эта система сводится к двум уравнениям, в которые входят только составляющие скорости частиц; порядок одного из них равен увеличенному на единицу числу реакций, второе уравнение выражает условие безвихренности потока. Указаны различные предельные случаи, зависящие от величины собственных чисел релаксационной матрицы.

Параметр $\nu=1$ для плоскопараллельных течений, $\nu=2$ для течений с осевой симметрией.

Согласно соотношению Гиббса компоненты вектора сродства химических реакций, давление и температура выражаются через первые частные производные

$$\omega_i=\left(\frac{\partial e}{\partial q_i}\right)_{q_1,\ldots,q_{i-1},q_{i+1},\ldots,q_N,V,s}=\left(\frac{\partial e}{\partial q_i}\right)_{q_j,V,s}$$

$$-p=\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_{q_1,\ldots,q_N,s}=\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_{q_j,s}$$

$$T=\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_{q_1,\ldots,q_N,V}=\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_{q_j,V}$$

от удельной внутренней энергии e. Рассматриваемые в качестве функций компонентов вектора $\mathbf{q}$, удельного объема $V=1/\rho$ и удельной энтропии s, эти производные представляют собой $N+2$ недостающих уравнения состояния среды.

Как известно [1], в состоянии равновесия вектор $\boldsymbol{\omega}=0$. Вместе с ним при равновесии обращается в нуль вектор $\dot{\mathbf{q}}$ скорости химических реакций. Ограничимся изучением слабо возмущенных движений, для которых справедливы линейные законы для скоростей химических реакций

1. Будем считать, что в потоке газовой смеси происходит N релаксационных процессов. Изменение состава смеси характеризуется вектором $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_N)$ полноты реакций. Введем систему декартовых или цилиндрических координат x, r, в которой составляющие скорости частиц v_x, v_r. Обозначим через ρ плотность, через p давление, через T температуру, через s удельную энтропию, через $\dot{\mathbf{q}}=(\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_N)$ и $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\ldots,\omega_N)$ векторы, задающие скорость и сродство химических реакций. Уравнения движения смеси возьмем в виде [1]

$$
(1.1)\qquad v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_r\frac{\partial v_x}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad v_x\frac{\partial v_r}{\partial x}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}
$$

$$
\frac{\partial\rho v_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho v_r}{\partial r}+\frac{(\nu-1)\rho v_r}{r}=0,\qquad v_x\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial x}+v_r\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial r}=\dot{\mathbf{q}}
$$

$$
\boldsymbol{\omega}\left(v_x\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial x}+v_r\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial r}\right)+T\left(v_x\frac{\partial s}{\partial x}+v_r\frac{\partial s}{\partial r}\right)=0
$$

$$
(1.2)\qquad \dot{\mathbf{q}}=-\mathbf{H}(V,s)\boldsymbol{\omega}
$$

В силу принципа взаимности Онзагера матрица $\mathbf{H}=\|h_{il}\|$ симметрична. Из второго закона термодинамики следует ее положительная определенность.

Введем в рассмотрение M-кратно замороженную в $(N-M)$-кратно равновесную скорость звука

$$
(1.3)\qquad a_{fe}^{(M)}=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,s}\right]^{1/2}
$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс в обозначениях термодинамических производных указывает, что к независимым переменным отнесены M составляющих вектора $\mathbf{q}$ и $N-M$ составляющих вектора $\boldsymbol{\omega}$. В соответствии со сказанным $j=1,\ldots,M$; $k=M+1,\ldots,N$.

Полностью равновесная a_e и полностью замороженная a_f скорости звука задаются формулой (1.3) с $M=0$ и $M=N$ соответственно. Таким образом, $a_e=a_{fe}^{(0)}$, $a_f=a_{fe}^{(N)}$. С первой из этих скоростей в релаксирующей смеси распространяются возмущения, которые практически не выводят ее из состояния полного термодинамического равновесия. Распространение малых колебаний со второй из названных скоростей происходит, когда химический состав смеси остается постоянным. Наличие релаксационных процессов ведет к тому, что прохождение звука через газовую смесь сопровождается дисперсией, причем скорость передачи сигналов меняется от a_e до a_f в зависимости от их частоты [1-3].

Положив для простоты

$$
\left(\frac{\partial}{\partial q_m}\right)^{(N)}_{q_j,\omega_k,\rho,s}=\left(\frac{\partial}{\partial q_m}\right)_{q_j,\rho,s},\qquad \left(\frac{\partial}{\partial\omega_n}\right)^{(0)}_{q_j,\omega_k,\rho,s}=\left(\frac{\partial}{\partial\omega_n}\right)_{\omega_k,\rho,s}
$$

из формулы (1.3) выводим [4]

$$
(1.4)\qquad a_f^2-(a_{fe}^{(M)})^2=\frac{1}{\rho^2}\sum_{l,n=M+1}^{N}\left(\frac{\partial q_l}{\partial\omega_n}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,\rho,s}\left(\frac{\partial p}{\partial q_l}\right)_{q_j,\rho,s}\left(\frac{\partial p}{\partial q_n}\right)_{q_j,\rho,s}
$$

При $M=0$ последнее равенство определяет разность $a_f^2-a_e^2$ квадратов замороженной и равновесной скоростей звука. Симметричная матрица $\|(\partial\omega_l/\partial q_n)_{q_j,\rho,s}\|$ является в силу требования термодинамической устойчивости системы положительно определенной [1,3]. Вместе с ней положительно определенной будет и симметричная матрица коэффициентов $\|(\partial q_l/\partial\omega_n)_{\omega_k,\rho,s}\|$. Отсюда ясно, что $a_f^2-a_e^2\geqslant0$.

Преобразуем четвертое из уравнений (1.1), следующее из закона сохранения энергии. Выразив приращение удельной энтропии через приращения давления, плотности, M составляющих вектора полноты реакций и $N-M$ составляющих вектора, задающего химическое сродство, находим

$$v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} - (a_{fe}^{(M)})^2 \left(v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = L_{fe}^{(M)} =$$

$$= -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)^{(M)}_{q_j, \omega_k, \rho} \sum_{i=1}^{N} \omega_i \left(v_x \frac{\partial q_i}{\partial x} + v_r \frac{\partial q_i}{\partial r} \right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \left(\frac{\partial p}{\partial q_m} \right)^{(M)}_{q_j, \omega_k, \rho, s} \left(v_x \frac{\partial q_m}{\partial x} + v_r \frac{\partial q_m}{\partial r} \right) +$$

$$+ \sum_{n=M+1}^{N} \left(\frac{\partial p}{\partial \omega_n} \right)^{(M)}_{q_j, \omega_k, \rho, s} \left(v_x \frac{\partial \omega_n}{\partial x} + v_r \frac{\partial \omega_n}{\partial r} \right)$$

Комбинирование полученного соотношения с уравнением неразрывности и проекциями уравнения Эйлера на оси x и r дает

$$[(a_{fe}^{(M)})^2 - v_x^2] \frac{\partial v_x}{\partial x} + [(a_{fe}^{(M)})^2 - v_r^2] \frac{\partial v_r}{\partial r} - \tag{1.5}$$

$$- v_x v_r \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) + (\nu - 1)(a_{fe}^{(M)})^2 \frac{v_r}{r} = \frac{1}{\rho} L_{fe}^{(M)}$$

По своей форме уравнение (1.5) аналогично соотношению, часто используемому в теории течений инертных газов [2], и переходит в него при

$$\omega_i = (\partial p / \partial q_m)^{(M)}_{q_j, \omega_k, \rho, s} = (\partial p / \partial \omega_m)^{(M)}_{q_j, \omega_k, \rho, s} = 0$$

В этом случае оператор $L_{fe}^{(M)}$ в правой части тождественно обращается в нуль. Кроме того, M-кратно замороженные и $(N-M)$-кратно равновесные скорости звука совпадают друг с другом при любом $M=0, 1, \ldots, N$ и равны единственной скорости $a = (\partial p / \partial \rho)_s^{1/2}$ распространения малых возмущений.

2. Предположим, что хотя величины всех M-кратно замороженных и $(N-M)$-кратно равновесных скоростей звука различаются между собой, это различие мало. Пусть газ в набегающем из бесконечности равномерном потоке находится в состоянии полного термодинамического равновесия. Параметры невозмущенного потока пометим индексом ∞. Положим

$$\left(\frac{\partial p}{\partial q_{i\infty}} \right)_{q_j, \rho, s} = -\left(\frac{\partial^2 e}{\partial q_{i\infty} \partial V_\infty} \right)_{q_j, s} = -\varepsilon_a \frac{p_\infty}{q_{i\infty}} e'_{iv\infty}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.1}$$

Здесь ε_a — малый положительный параметр, $e'_{iv\infty}$ — безразмерная величина порядка единицы. Как видно из формулы (1.4), ограничения (2.1) обеспечивают близость всех M-кратно замороженных и $(N-M)$-кратно равновесных скоростей звука в набегающем потоке. При изменении векторов полноты реакций и химического сродства эти скорости меняются слабо [4]

$$\left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial q_{m\infty}} \right)^{(M)}_{q_j, \omega_k, \rho, s} \sim \varepsilon_a, \quad \left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial \omega_{n\infty}} \right)^{(M)}_{q_j, \omega_k, \rho, s} \sim \varepsilon_a \tag{2.2}$$

$$m = 1, \ldots, M; \quad n = M+1, \ldots, N$$

На основании определения (1.3) имеем

$$\left(\frac{\partial a_{fe}^{(M)}}{\partial \rho_\infty}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,s} = \frac{a_{fe\infty}^{(M)}}{\rho_\infty}(m_{fe\infty}^{(M)}-1), \tag{2.3}$$

$$m_{fe\infty}^{(M)} = \frac{1}{2\rho_\infty{}^3(a_{fe\infty}^{(M)})^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_\infty{}^2}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,s}$$

причем при любом M термодинамические коэффициенты $m_{fe\infty}^{(M)}$ с точностью до величин порядка $\varepsilon_a{}^2$ можно отождествить с $m_\infty = m_{fe\infty}^{(M)}$.

Соотношения (2.1) позволяют выбрать скорость v_∞ набегающего потока близкой к любой из M-кратно замороженных и $(N-M)$-кратно равновесных скоростей звука

$$v_\infty - a_{fe\infty}^{(M)} = \varepsilon_a{}^2\beta^{(M)}v_\infty, \quad \beta^{(0)}=\beta_e, \quad \beta^{(N)}=\beta_f \tag{2.4}$$

с постоянными $\beta^{(M)}$ в правых частях порядка единицы. Рассматриваемый режим течения называется собственно трансзвуковым [5–8].

Пусть величины скоростей частиц в каждой точке пространства мало отличаются от v_∞, а их направления близки к направлению оси x. Ориентированный вдоль нее равновесный набегающий поток примем в качестве основного. Обозначим буквами ε и Δ малые числовые параметры, буквой L характерную длину, отложенную по оси x. Введем новые независимые переменные и компоненты вектора скорости потока

$$x = Lx', \quad r = \frac{L}{\Delta}r'; \quad v_x = v_\infty(1+\varepsilon v_x'), \quad v_r = \varepsilon\Delta v_\infty v_r' \tag{2.5}$$

Существенно подчеркнуть, что согласно формулам (2.5) координаты x, r неравноправны, а протяженность возмущенной области в поперечном направлении намного превышает ее продольные размеры. В собственно трансзвуковом режиме возмущения плотности, давления, температуры, энтропии и всех рассматривавшихся выше скоростей звука пропорциональны ε:

$$\rho = \rho_\infty(1+\varepsilon\rho'), \quad p = p_\infty(1+\varepsilon p'), \quad T = T_\infty(1+\varepsilon T'), \quad s = s_\infty(1+\varepsilon s'), \tag{2.6}$$

$$a_{fe}^{(M)} = a_{fe\infty}^{(M)}[1+\varepsilon(a_{fe}^{(M)})']$$

в то время как отклонения составляющих векторов полноты реакций и химического сродства от соответствующих значений в основном потоке задаются произведением $\varepsilon\varepsilon_a$ [5–8]

$$q_i = q_{i\infty}(1+\varepsilon\varepsilon_a q_i'), \quad \omega_l = \varepsilon\varepsilon_a\frac{p_\infty}{q_{l\infty}\rho_\infty}\omega_l', \quad i,l=1,\ldots,N \tag{2.7}$$

3. При выводе асимптотических уравнений во всех соотношениях будем удерживать лишь главные члены. Штрихи над безразмерными переменными в дальнейшем опустим. После линеаризации первого и третьего уравнений системы (1.1) их интегрирование приводит к соотношениям

$$\rho = \frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty{}^2} = -v_x \tag{3.1}$$

Первое из них выражает тот факт, что в рассматриваемом приближении сжатие газа совершается адиабатически, согласно второму — интеграл Бернулли имеет место для всего течения.

Переходя к проекции уравнения Эйлера на ось r, имеем условие

$$\frac{\partial v_x}{\partial r}=\frac{\partial v_r}{\partial x} \tag{3.2}$$

означающее отсутствие вихрей в потоке.

Принимая во внимание разницу в порядках возмущений искомых термодинамических функций, которая задается формулами (2.6) и (2.7), при помощи последнего уравнения системы (1.1) находим оценку $s\sim\varepsilon\varepsilon_a^2$, т. е. с принятой точностью $s=0$. Этот вывод подтверждает заключение об адиабатическом характере сжатия газа.

Напишем общее выражение для отклонения давления от равновесного значения

$$p_\infty p=(a_{fe\infty}^{(M)})^2\rho_\infty\rho+\left(\frac{\partial p}{\partial s_\infty}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,\rho}s_\infty s+\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{\partial p}{\partial q_{m\infty}}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,\rho,s}\times$$

$$\times q_{m\infty}\varepsilon_a q_m+\sum_{n=M+1}^{N}\left(\frac{\partial p}{\partial \omega_{n\infty}}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,\rho,s}\frac{p_\infty}{q_{n\infty}\rho_\infty}\varepsilon_a\omega_n$$

Перейдем от M-кратно замороженных и $(N-M)$-кратно равновесных скоростей звука $a_{fe\infty}^{(M)}$ к скорости набегающего потока v_∞ согласно равенству (2.4) и воспользуемся оценками (2.1) для термодинамических производных. Пренебрегая теперь в последнем соотношении пропорциональными ε_a^2 членами, возвращаемся к первой из формул (3.1).

Обратимся к уравнению для вектора скорости химических реакций. Пусть

$$h_{il\infty}=\frac{q_{i\infty}q_{l\infty}\rho_\infty}{\tau_{il}p_\infty}h'_{il\infty},\qquad \tau_{il}=\tau_{li}$$

где τ_{il} имеет смысл времени релаксации i-го элемента, которое обусловлено величиной химического сродства l-го элемента. Подставляя формулы (2.5)—(2.7) в четвертое из уравнений (1.1), в котором вектор $\dot{\mathbf{q}}$ заменен его выражением (1.2), в первом приближении находим

$$\frac{\partial q_i}{\partial x}=-\sum_{l=1}^{N}N_{il}h_{il\infty}\omega_l,\qquad N_{il}=\frac{L}{v_\infty\tau_{il}},\qquad i=1,\ldots,N \tag{3.3}$$

В уравнении (3.3) появились дополнительные числовые параметры N_{il}, отношения макроскопического времени $\tau=L/v_\infty$ к временам релаксации τ_{il}. Когда все они стремятся к нулю, состояние течения близко к замороженному; если же эти параметры неограниченно возрастают, поток носит квазиравновесный характер.

Для компонентов вектора химического сродства верно разложение

$$\omega_i=-e_{iv\infty}\rho+\frac{\rho_\infty}{p_\infty}\sum_{l=1}^{N}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial q_l}\right)_{q_j,v,s}q_{i\infty}q_{l\infty}q_l,\qquad i=1,\ldots,N \tag{3.4}$$

Чтобы написать равенство для приращения M-кратно замороженной и $(N-M)$-кратно равновесной скорости звука, необходимо вспомнить оценки (2.2) и формулу (2.3) для ее частных производных. С точностью до величин порядка ε_a^2 имеем

$$a_{fe}^{(M)}=(m_\infty-1)\rho$$

Теперь можно упростить уравнение (1.5) и получить недостающее соотношение, связывающее составляющие вектора скорости частиц с компонентами вектора полноты химических реакций. Результат подстановки формул (2.5)–(2.7) в уравнение (1.5) дает

$$(3.5)\qquad 2(\varepsilon m_\infty v_x+\varepsilon_a{}^2\beta^{(M)})\frac{\partial v_x}{\partial x}-\Delta^2\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}+(\nu-1)\frac{v_r}{r}\right]=$$

$$=-\frac{\varepsilon_a}{\rho_\infty v_\infty{}^2}\left[\sum_{m=1}^{M} q_{m\infty}\left(\frac{\partial p}{\partial q_{m\infty}}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,\rho,s}\frac{\partial q_m}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\sum_{n=M+1}^{N}\frac{1}{q_{n\infty}}\left(\frac{\partial p}{\partial\omega_{n\infty}}\right)^{(M)}_{q_j,\omega_k,\rho,s}\frac{\partial\omega_n}{\partial x}\right]$$

Нетрудно убедиться в том, что при любом выборе независимых термодинамических переменных все формы уравнения (3.5) эквивалентны и переходят друг в друга, каково бы ни было число M. Наиболее простая по записи форма соответствует $M=N$, тогда вторая сумма в правой части исчезает, а постоянная $\beta^{(N)}=\beta_f$.

4. Введем в рассмотрение вектор

$$(4.1)\qquad \mathbf{e}=(e_1,\ldots,e_N),\quad e_i=e_{i\nu\infty}$$

кинетическую матрицу $\mathbf{F}=\|f_{il}\|$ и матрицу $\mathbf{G}=\|g_{il}\|$ термодинамической устойчивости, элементы которых зададим соответственно формулами

$$(4.2)\qquad f_{il}=N_{il}h_{il\infty},\qquad g_{il}=\frac{\rho_\infty}{p_\infty}q_{i\infty}q_{l\infty}\left(\frac{\partial\omega_l}{\partial q_{i\infty}}\right)_{q_j,\rho,s}$$

На основании изложенного выше обе эти матрицы симметричны и положительно определенны.

Запишем уравнения (3.3) и (3.4) в матричной форме

$$(4.3)\qquad \frac{\partial q}{\partial x}=-\mathbf{F}\boldsymbol{\omega},\qquad \boldsymbol{\omega}=\mathbf{G}\mathbf{q}-\mathbf{e}\rho=\mathbf{G}\mathbf{q}+\mathbf{e}v_x$$

Всегда найдутся такая матрица $\mathbf{C}$ и такая унитарная матрица $\mathbf{U}$, что линейное преобразование

$$(4.4)\qquad \mathbf{q}_2=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}^*\mathbf{q},\qquad \boldsymbol{\omega}_2=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\omega}$$

в котором $\mathbf{C}^{-1}$ и $\mathbf{U}^{-1}$ – обратные матрицы, а $\mathbf{C}^*$ – транспонированная к $\mathbf{C}$ матрица, позволяет привести систему (4.3) к виду [4]

$$(4.5)\qquad \frac{\partial\mathbf{q}_2}{\partial x}=-\mathbf{E}\boldsymbol{\omega}_2,\qquad \boldsymbol{\omega}_2=\mathbf{D}\mathbf{q}_2+\mathbf{e}_2v_x$$

Здесь через $\mathbf{E}$ обозначена единичная матрица, через $\mathbf{D}$ – диагональная матрица с элементами d_{ii}, равными характеристическим числам λ_i релаксационной матрицы $\mathbf{R}=\mathbf{F}\mathbf{G}$, через $\mathbf{e}_2$ – вектор

$$(4.6)\qquad \mathbf{e}_2=\mathbf{U}^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}$$

Положим в уравнении (3.5) $M=N$. Учитывая инвариантность скалярного произведения $\mathbf{e}\partial\mathbf{q}/\partial x$ по отношению к линейному преобразованию

(4.4), запишем его как

$$(4.7) \qquad 2(\varepsilon m_\infty v_x+\varepsilon_a^2\beta_f)\frac{\partial v_x}{\partial x}-\Delta^2\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}+(\nu-1)\frac{v_r}{r}\right]=\varepsilon_a^2\frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2}\mathbf{e}_2\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x}$$

Уравнения (3.2), (4.5) и (4.7) образуют замкнутую систему. Постоянный вектор $\mathbf{e}_2$ определяется формулами (4.1) и (4.6). Равенства (4.2) дают возможность вычислить характеристические числа релаксационной матрицы $\mathbf{R}$, т. е. элементы диагональной матрицы $\mathbf{D}$. Чтобы вернуться к исходным векторам $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\omega}$, после того как уравнения (3.2), (4.5) и (4.7) будут проинтегрированы, необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (4.4). Следует, однако, заметить, что соотношение Гиббса не изменяет своего вида при переходе к новым переменным, поскольку выполняется равенство $\boldsymbol{\omega}d\mathbf{q}=\boldsymbol{\omega}_2 d\mathbf{q}_2$. Векторы $\mathbf{q}_2$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, введенные выше по чисто формальным соображениям, пригодны для задания состояния релаксирующей смеси в качестве новых сопряженных термодинамических параметров; с этой точки зрения они ничем не отличаются от исходных векторов $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\omega}$.

Исключим из рассматриваемой системы уравнений векторы $\mathbf{q}_2$ и $\boldsymbol{\omega}_2$. При помощи m-кратного дифференцирования уравнений (4.5) находим

$$\frac{\partial^{m+1}\mathbf{q}_2}{\partial x^{m+1}}=(-1)^m\mathbf{D}^m\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x}+\sum_{\mu=1}^{m}(-1)^\mu\mathbf{D}^{\mu-1}\mathbf{e}_2\frac{\partial^{m+1-\mu}v_x}{\partial x^{m+1-\mu}}$$

Обозначим

$$\delta_a^2=\varepsilon_a^2\frac{p_\infty}{\rho_\infty v_\infty^2}, \qquad L_f'=-2(\varepsilon m_\infty v_x+\varepsilon_a^2\beta_f)\frac{\partial v_x}{\partial x}+\Delta^2\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}+(\nu-1)\frac{v_r}{r}\right]$$

и опустим в дальнейшем штрих над введенным дифференциальным оператором. Из уравнения (4.7) следует, что

$$(4.8) \qquad \frac{\partial^m L_f}{\partial x^m}+\delta_a^2\sum_{\mu=1}^{m}(-1)^\mu\mathbf{e}_2\mathbf{D}^{\mu-1}\mathbf{e}_2\frac{\partial^{m+1-\mu}}{\partial x^{m+1-\mu}}=(-1)^{m-1}\delta_a^2\mathbf{e}_2\mathbf{D}^m\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x}$$

$$m=1,\ldots,N$$

Пусть теперь

$$Z_i=-\delta_a^2 e_{2i}\lambda_i\frac{\partial q_{2i}}{\partial x}, \qquad W=(-1)^m\left[\frac{\partial^m L_f}{\partial x^m}+\delta_a^2\sum_{\mu=1}^{m}(-1)^\mu\mathbf{e}_2\mathbf{D}^{\mu-1}\mathbf{e}_2\frac{\partial^{m+1-\mu}v_x}{\partial x^{m+1-\mu}}\right]$$

Ввиду диагональности матрицы D имеем

$$\mathbf{e}_2\mathbf{D}^m\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x}=\sum_{i=1}^{N}e_{2i}\lambda_i^m\frac{\partial q_{2i}}{\partial x}$$

Поэтому уравнения (4.8) в новых переменных значительно упрощаются

$$(4.9) \qquad \sum_{i=1}^{N}\lambda_i^{m-1}Z_i=W_m, \qquad m=1,\ldots,N$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений (4.9) дано в работе [9]. Используя его, подсчитаем скалярное произведение $\mathbf{e}_2\partial\mathbf{q}_2/\partial x$, которое фигурирует в правой части уравнения (4.7). В результате имеем

$$\sum_{\mu=0}^{N-1}\sigma_{N-\mu}\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu}\left[L_f+\delta_a^2\frac{\partial v_x}{\partial x}\sum_{m=\mu+1}^{N}(-1)^{m-\mu}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\sigma_{N-m}}{\sigma_{N-\mu}}\mathbf{e}_2\mathbf{D}^{m-\mu-1}\mathbf{e}_2\right]+\frac{\partial^N L_f}{\partial x^N}=0 \tag{4.10}$$

где символ σ_l означает сумму всевозможных произведений, которые составлены из чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$, взятых по l в каждом произведении.

Введем промежуточные скорости звука

$$\alpha_{\mu\infty}=a_{f\infty}+\frac{1}{2}\delta_a^2v_\infty\sum_{m=\mu+1}^{N}(-1)^{m-\mu}\frac{\sigma_{N-m}}{\sigma_{N-\mu}}\mathbf{e}_2\mathbf{D}^{m-\mu-1}\mathbf{e}_2 \tag{4.11}$$

для которых справедливы неравенства [9–11]

$$a_{e\infty}=\alpha_{0\infty}<\alpha_{1,\infty}<\ldots<\alpha_{N-1,\infty}<\alpha_{N,\infty}=a_{f\infty} \tag{4.12}$$

По аналогии с $\beta^{(M)}$ определим постоянные $\gamma^{(\mu)}$ как

$$v_\infty-\alpha_{\mu\infty}=\varepsilon_a^2\gamma^{(\mu)}v_\infty \tag{4.13}$$

В предельных случаях $\mu=0$ и $\mu=N$ получим соответственно $\gamma^{(0)}=\gamma_e=\beta_e$, $\gamma^{(N)}=\gamma_f=\beta_f$. Используя соотношения (4.11) и (4.13), подсчитаем выражение, заключенное в квадратные скобки в левой части уравнения (4.10)

$$L_f+\delta_a^2\frac{\partial v_x}{\partial x}\sum_{m=\mu+1}^{N}(-1)^{m-\mu}\frac{\sigma_{N-m}}{\sigma_{N-\mu}}\mathbf{e}_2D^{m-\mu-1}\mathbf{e}_2=$$

$$=-2(\varepsilon m_\infty v_x+\varepsilon_a^2\gamma^{(\mu)})\frac{\partial v_x}{\partial x}+\Delta^2\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}+(\nu-1)\frac{v_r}{r}\right]$$

после чего преобразуем названное уравнение к

$$\sum_{\mu=0}^{N}\sigma_{N-\mu}\frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu}\left\{2(\varepsilon m_\infty v_x+\varepsilon_a^2\gamma^{(\mu)})\frac{\partial v_x}{\partial x}-\Delta^2\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}+(\nu-1)\frac{v_r}{r}\right]\right\}=0 \tag{4.14}$$

Вместе с уравнением (3.2) уравнение (4.14) образует замкнутую систему, куда входят только составляющие вектора скорости частиц.

5. Пусть скорость набегающего потока v_∞ в точности равна одной из промежуточных скоростей звука $\alpha_{M,\infty}$. Тогда $\gamma^{(M)}=0$. На характеристические числа релаксационной матрицы R наложим условия

$$\lambda_1,\ldots,\lambda_M\ll1\ll\lambda_{M+1},\ldots,\lambda_N \tag{5.1}$$

Как видно из неравенств (5.1), «элементы» $q_{21},\ldots,q_{2M}$ изменяются чрезвычайно слабо, в то время как элементы $q_{2,M+1},\ldots,q_{2N}$ релаксируют почти равновесно. Можно показать, что в этом случае имеет место асимптотическое выражение [12]

$$\alpha_{M,\infty}^2=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho_\infty}\right)^{(M)}_{q_{2j},\omega_{2k},s}=a_{f\infty}^2-\varepsilon_a^2\frac{p_\infty}{\rho_\infty}\sum_{n=M+1}^{N}\frac{e_{2n}^2}{\lambda_n} \tag{5.2}$$

Таким образом, в предельном случае (5.1) M-я промежуточная скорость звука $a_{M\infty}$ есть просто M-кратно замороженная и $(N-M)$-кратно равновесная скорость звука $\overset{(M)}{a}_{2fe\infty}$, вычисленная в переменных $q_{21}, \ldots, q_{2M}$, $\omega_{2,M+1}, \ldots, \omega_{2N}$, ρ и s. Придавая M в формуле (5.2) значения $0, 1, \ldots, N$, на основании положительности всех характеристических чисел заключаем, что наряду с неравенствами (4.12) справедливы условия

$$a_{e\infty}=\overset{(0)}{a}_{2fe\infty}<\overset{(1)}{a}_{2fe\infty}<\ldots<\overset{(N-1)}{a}_{2fe\infty}<\overset{(N)}{a}_{2fe\infty}=a_{f\infty}$$

Наибольшей из всех сумм, содержащихся в уравнении (4.14), будет σ_{N-M}, следующими по величине являются σ_{N-M-1} и σ_{N-M+1}. В первом приближении их можно записать как

$$\sigma_{N-M}=\prod_{N\geqslant i\geqslant M+1}\lambda_i,\quad \sigma_{N-M-1}=\prod_{N\geqslant i\geqslant M+1}\lambda_i\sum_{n=M+1}^{N}\frac{1}{\lambda_n},\quad \sigma_{N-M+1}=\prod_{N\geqslant i\geqslant M+1}\lambda_i\sum_{m=1}^{M}\lambda_m$$

Если оставить в уравнении (4.14) только главные члены, то полученное таким образом соотношение допускает M-кратное интегрирование. В итоге имеем

$$2\varepsilon m_\infty v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}-\Delta^2\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}+(\nu-1)\frac{v_r}{r}\right]+ \tag{5.3}$$

$$+2\varepsilon_a{}^2\gamma^{(M-1)}v_x\sum_{m=1}^{M}\lambda_m=-2\varepsilon_a{}^2\gamma^{(M+1)}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\sum_{n=M+1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}$$

При $M=0$ в левой части уравнения (5.3) исчезает последний член; течение химически активной смеси имеет квазиравновесный характер. Когда $M=N$, в нуль обращается правая часть этого уравнения; релаксационные процессы совершаются квазизамороженным образом. В общем случае $M\neq 0$ и $M\neq N$ постулируем связи

$$m_\infty\varepsilon=\frac{\alpha_{M,\infty}-\alpha_{M-1,\infty}}{\alpha_{M,\infty}}\sum_{m=1}^{M}\lambda_m=\frac{1}{2}\Delta^2$$

между малыми параметрами и обозначим посредством

$$\mathrm{Re}^*=\left[\frac{\alpha_{M+1,\infty}-\alpha_{M,\infty}}{\alpha_{M,\infty}-\alpha_{M-1,\infty}}\sum_{n=M+1}^{N}\frac{1}{\lambda_n}\left(\sum_{m=1}^{M}\lambda_m\right)^{-1}\right]^{-1}$$

эффективное число Рейнольдса. Уравнение (5.3) сводится к

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}-\left[\frac{\partial v_r}{\partial r}+(\nu-1)\frac{v_r}{r}\right]+v_x=\frac{1}{\mathrm{Re}^*}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

Отсюда ясно, что в химически активных смесях роль протекающих квазиравновесным образом «реакций» с пропорциональными характеристическим числам $\lambda_{M+1},\ldots,\lambda_N\gg 1$ скоростями будет такой же, какая принадлежит вязкости и теплопроводности инертных газов. Этой ролью оправдывается введение эффективного числа Рейнольдса как коэффициента при старшей производной $\partial^2 v_x/\partial x^2$.

Поступила 8 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
3. *Barrère M., Prud'homme R.* Equations fondamentales de l'aérothermochimie. Paris, Masson, 1973.
4. *Ни А. Л., Рыжов О. С.* Нелинейное распространение волн в средах с произвольным количеством химических реакций. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.
5. *Napolitano L. G.* Small perturbation theories for singly reacting mixtures. I. A. Rept., 1966, No. 135.
6. *Napolitano L. G.* Transonic approximations for reacting mixtures. Israel J. Technol., 1966, vol. 4, No. 1.
7. *Наполитано Л. Дж., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скоростях. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
8. *Рыжов О. С.* О собственно трансзвуковом режиме в течениях реагирующей смеси. В сб. «Проблемы прикладной математики и механики». М., «Наука», 1971.
9. *Ни А. Л., Рыжов О. С.* О скоростях звука в многокомпонентных химически активных газовых смесях. Вестн. ЛГУ, Матем., механ., астрон., 1976, № 13, вып. 3.
10. *Napolitano L. G.* Generalized velocity potential equation for pluri-reacting mixtures. Arch. Mech. Stosowanej, 1964, vol. 16, No. 2.
11. *Napolitano L. G.* Non-linear non-equilibrium flows. I. A. Rept., 1969, No. 142.
12. *Ни А. Л., Рыжов О. С.* Предельные выражения для промежуточных скоростей звука в неравновесных течениях с произвольным числом химических реакций. ПММ, 1977, т. 41, вып. 1.