

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ  
С ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ**

**В. А. КОНДРАШЕВ**

(Москва)

Изучается характер неустойчивости собственных колебаний плазмы при взаимодействии с пучком электронов [1]. Дисперсионные уравнения подобного типа имеют место также для целого ряда физических явлений. Находятся скорости, с которыми распространяется первоначально локализованное возмущение в неограниченной системе. Показано, что система глобально неустойчива [2].

1. При рассмотрении линейных колебаний однородной плазмы собственные частоты  $\omega$  связаны с волновым вектором  $k$  дисперсионным соотношением [1]

$$(1.1) \quad 1 + \frac{4\pi e^2}{mk^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(\partial f_0/\partial v) dv}{\omega - kv} = 0$$

Ниже будет рассмотрен одномерный случай. Система координат выбрана таким образом, чтобы

$$(1.2) \quad \mathbf{k} = k \cdot \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v} = v \cdot \mathbf{e}_1$$

Если по отношению к возмущению с некоторым действительным  $k$  из (1.1) следует, что  $\text{Im } \omega(k) > 0$ , то имеет место рост синусоидальных возмущений.

Рассмотрим максвелловскую плазму плотности  $n_0$ , температуры  $T$ , пронизанную холодным пучком электронов плотности  $n_b$  и скорости  $V_b$ .

Функция распределения запишется в виде

$$(1.3) \quad f_0(v) = n_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right) + n_b \delta(v - V_b)$$

Для высокочастотных колебаний  $|\omega| \gg |k|v_T$ , где  $v_T = \sqrt{2T/m}$ , в случае  $|\text{Im } \omega| \ll |\text{Re } \omega|$  дисперсионное уравнение (1.1) с  $f_0(v)$ , определяемой (1.3), может быть приближенно представлено в виде [1]

$$(1.4) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{m\omega_0^2 \omega}{k^3 T} \sqrt{\frac{m}{2T}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{z} \left( 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \dots \right) + \pi i e^{-z^2} \right) -$$

$$- \frac{\omega_0^2 m}{k^2 T} + \frac{\omega_b^2}{(\omega - kV_b)^2} = 1, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m}}$$

$$\omega_b = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_b}{m}}, \quad z = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{m}{2T}}$$

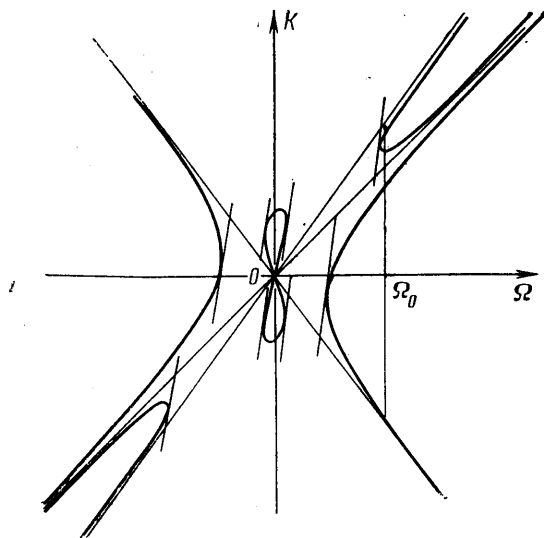
Пренебрегая экспоненциальными членами, можно перейти к уравнению [4]

$$(1.5) \quad \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - k^2 s^2} + \frac{\omega_b^2}{(\omega - k V_b)^2} = 1, \quad s = v_T \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Уравнения, подобные (1.5), имеют место для целого ряда физических явлений, в том числе для распространения волн в плоском волноводе [3].

2. Возмущения типа плоских волн в действительности лишь приближают пространственно-локализованные возмущения. Поле первоначально локализованного возмущения может убывать со временем в некоторых точках, хотя амплитуды составляющих это возмущение плоских волн растут. Соответствующая неустойчивость называется «конвективной» [4], так как область роста возмущения сносится с некоторой скоростью. Если же имеет место нарастание по  $t$  при всех фиксированных  $x$ , то неустойчивость называется «абсолютной» в данной системе отсчета.

Критерием абсолютной неустойчивости служит: во-первых, рост синусоидальных возмущений, во-вторых, наличие в верхней полуплоскости  $\omega$



Фиг. 1

точки ветвления  $\omega_0$  корней дисперсионного уравнения (1.1), такой, что совпадающие в этой точке корни  $k_i(\omega)$  и  $k_j(\omega)$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$  оказываются по разные стороны от оси  $\text{Im } k = 0$  на плоскости переменного  $k$ . Если выполнено только первое условие, то неустойчивость конвективна. Если же синусоидальные возмущения не нарастают, то система устойчива.

Ранее было показано [3], что для уравнения (1.5) при условии  $n_b/n_0 > (V_b^2 - s^2)/s^2$  имеется конвективная неустойчивость. Условием устойчивости является  $V_b < s$ , поэтому в дальнейшем всегда будет предполагаться, что  $V_b \geq s$ .

Установлено, что первоначально локализованные возмущения нарастают при  $t \rightarrow \infty$  на прямых  $x = Ut$ , где  $V_1 < U < V_2$ , и найдены скорости переднего и заднего фронтов  $V_1$  и  $V_2$ . Аналогичная задача решена для другого уравнения в [5].

3. Для удобства обозначений перейдем в (1.5) к безразмерным величинам по формулам

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad K = \frac{k V_b}{\omega_0}, \quad \alpha = \frac{\omega_b^2}{\omega_0^2}, \quad \beta = \frac{s}{V_b}, \quad \alpha^* = \frac{1 - \beta^2}{\beta^2}$$

Дисперсионное уравнение примет вид

$$(3.1) \quad \frac{1}{\Omega^2 - \beta^2 K^2} + \frac{\alpha}{(\Omega - K)^2} = 1$$

На фиг. 1 построен график  $K=K(\Omega)$ , отвечающий действительным  $\Omega$  и  $K$ . Он пересекает начало координат со значением производных  $d\Omega/dK = t_{1,2}$ . Совершая подстановку  $\Omega = i\Omega_1$ ,  $K = iK_1$ , можно построить кривую  $K_1=K_1(\Omega_1)$ , изображенную на фиг. 2.

Ветви кривой  $LO$  и  $NO$  пересекают начало координат со значением производных  $d\Omega_1/dK_1 = t_{1,2}$ . Отметим, что при  $|\Omega| \rightarrow \infty$  для ветвей комплексной многозначной функции  $K=K(\Omega)$  выполнено равенство

$$(3.2) \quad K = \Omega / (A + o(1)), \quad |\Omega| \rightarrow \infty$$

где  $A=1$  для двух ветвей и  $A=\pm\beta$  для двух других. В системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью  $V$  волновое число  $K'$  и частота  $\Omega'$  связаны соотношениями

$$(3.3) \quad \Omega' = \Omega - KV, \quad K' = K$$

с аналогичными величинами в неподвижной системе.

При этой замене в уравнении (3.1) получаем дисперсионные соотношения для возмущений в новой системе отсчета. Неустойчивость при некотором  $V$  становится абсолютной, а при большем значении скорости снова конвективной. Пороговые значения определяют величину скоростей переднего и заднего фронтов возмущения.

Формулы (3.3) можно понимать как переход к косоугольным координатам  $\Omega'$ ,  $K'$  на плоскости  $(\Omega, K)$ . При этом новым точкам ветвления соответствует касание кривой (3.1) с направлением  $K'$ , а в комплексном случае — выполнение условия  $d\Omega/dK = V$ . Обозначим величину  $d\Omega/dK$  в точке  $P$  через  $V(P)$ ;  $P$  — точка ветвления при  $V=V(P)$ . Полагая в (3.1),  $\Omega = Kt$ , получим отсюда

$$(3.4) \quad \Omega^2 = \frac{t^2}{t^2 - \beta^2} + \frac{\alpha t^2}{(t-1)^2}, \quad K^2 = \frac{1}{t^2 - \beta^2} + \frac{\alpha}{(t-1)^2}$$

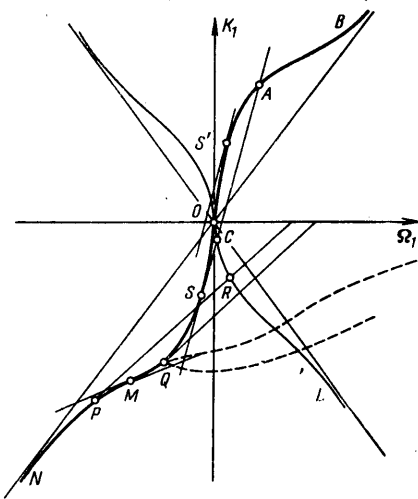
$$V = \frac{[\beta^2(t-1)^3 + \alpha(t^2 - \beta^2)^2]}{[t(t-1)^3 + \alpha(t^2 - \beta^2)^2]}$$

Упомянутые выше  $t_{1,2}$  соответствуют  $\Omega=K=0$  и удовлетворяют следующему уравнению:  $(1+\alpha)t^2 - 2t + 1 - \alpha\beta^2 = 0$ . Корни его вещественны, если  $\alpha \geq 1 - \beta^2/\beta^2 = \alpha^*$ . Если  $\alpha < \alpha^*$ , то корни  $t_{1,2}$  становятся комплексными. При этом меняется топологический характер кривой. На плоскости действительных  $\Omega, K$  исчезает «восьмерка», а на соответствующей чисто мнимым  $\Omega$  и  $K$  плоскости  $\Omega_1 K_1$  график не проходит через точку  $O$  (фиг. 3). При таком изменении  $\alpha$  уменьшается скорость заднего фронта локализованного возмущения.

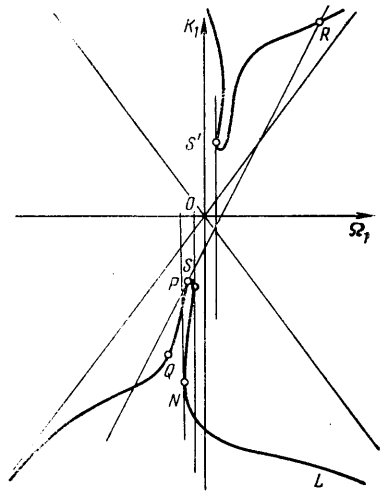
Рассмотрим случай вещественных корней. Для значений  $0 < V < t_1$ , на фиг. 1 видны восемь точек, в которых  $d\Omega/dK = V$ . Обращаясь к выражению (3.4) для  $V$ , заметим, что это уравнение четвертой степени относительно  $t$ , откуда следует, что при  $0 < V < t_1$  найдены все точки ветвления. Их координаты действительны, следовательно,  $\text{Im } \Omega' = 0$  и неустойчивость конвективна.

Для  $\beta > V > t_1$  шесть точек ветвления функции  $K'(\Omega')$  находятся на плоскости  $\Omega K$  (фиг. 1), а две оставшиеся  $S$  и  $S'$  лежат на плоскости  $\Omega_1 K_1$  (фиг. 2). Можно убедиться в том, что в точке  $S$   $\text{Im } \Omega' > 0$ . Проведя касательную к кривой в точке  $S$ , обозначим пересечения ее с другими ветвями точками  $A$  и  $C$ .

Кривые  $AB$  и  $CL$  определяют однозначные ветви функции  $K'=K'(\Omega')$ , вдоль них выполнены оценки  $K'=\Omega'/(\pm\beta-V+o(1))$ , получающиеся при замене в равенствах (3.2)  $\Omega$  и  $K$  по формулам (3.3) на  $\Omega'$  и  $K'$ . Поэтому для оставшихся двух ветвей, отходящих от точки  $S$  в системе  $\Omega', K'$ , необходимо положить в (3.2)  $A=1$  и при  $\text{Im } \Omega' \rightarrow \infty$  получим  $K'=\Omega'/(1-V+o(1))$ . Отсюда вытекает, что корни  $K'=K'(\Omega')$ , соответствующие  $S$  при увеличении  $\text{Im } \Omega'$ , остаются в верхней полуплоскости, т. е. неустойчивость конвективна.



Фиг. 2



Фиг. 3

При  $V > \beta$  на плоскости  $\Omega_1 K_1$  (фиг. 2) найдутся точки ветвления  $P$  и  $Q$ , для которых, как можно показать,  $\text{Im } \Omega' > 0$ . Кривые  $PN$  и  $RL$  определяют однозначные ветви функции  $K'=K'(\Omega')$ , такие, что

$$(3.5) \quad K' = \Omega' / (\pm\beta - V + o(1)), \quad \text{Im } \Omega' \rightarrow \infty$$

Следовательно, на двух оставшихся ветвях, отходящих от точки  $Q$  и изображенных условно пунктиром, выполнена асимптотика с  $A=1$

$$(3.6) \quad K' = \Omega' / (1 - V + O(1)), \quad \text{Im } \Omega' \rightarrow \infty$$

Итак, в точке  $P$  соединяются корни из разных групп с асимптотикой (3.5) и (3.6), что приводит к абсолютной неустойчивости. Точки  $P$  и  $Q$  существуют на плоскости  $\Omega_1, K_1$ , если соответствующее им  $V=V(P)=V(Q)$  меньше, чем  $V(M)$  в точке перегиба  $M$  (фиг. 2). Однако и при  $V > V(M)$  на листах с асимптотикой (3.6) найдутся две комплексно-сопряженные точки ветвления  $P$  и  $Q$ , одна из них с  $\text{Im } \Omega' > 0$ , такие, что в них соединяются ветви вида (3.5) и (3.6). Это приводит к абсолютной неустойчивости при  $\beta < V < 1$ . Таким образом в случае  $\alpha > \alpha^*$  найдены  $V_1=1$  и  $V_2=\beta$ . Приведенное выше доказательство абсолютной неустойчивости при  $\beta < V < 1$  сохраняется для  $\alpha < \alpha^*$ . Оказывается, однако, что, когда  $\alpha$  становится меньше  $\alpha^*$ , скорость заднего фронта  $V_2$  скачком переходит от значения  $\beta$  к  $\beta^2$ .

Проверим, что  $V=\beta^2$  разделяет области с различными типами неустойчивости. Для этого необходимо, чтобы все восемь точек ветвления дисперсионного уравнения стали вещественны.

Уравнение (3.4) при подстановке  $V=\beta^2$  распадается на два квадратных уравнения, имеющих корни  $t_{1,2}$ , следующего вида:

$$(3.7) \quad (1-t)^2 + \gamma(t^2 - \beta^2) = 0, \quad \gamma = \pm \sqrt{\alpha\alpha^*}$$

$$t_{1,2}^0 = (1 \pm \sqrt{\gamma^2 \beta^2 + \gamma \beta^2 - \gamma}) / (1 + \gamma)$$

В дальнейшем положим  $\gamma > 0$ , так как случай  $\gamma < 0$  для определения характера неустойчивости несуществен: соответствующие ему точки с  $V=\beta^2$  лежат на действительной кривой (фиг. 1). Обозначим  $\rho = \sqrt{\gamma^2 \beta^2 + \gamma \beta^2 - \gamma} = \sqrt{\gamma \beta^2 (\gamma - \alpha^*)}$ . Из неравенства  $\alpha < \sqrt{\alpha\alpha^*} < \alpha^*$  следует, что  $\rho$  чисто мнимое. Воспользуемся уравнением (3.7) и, представив выражение (3.4) для  $K$  в виде  $K = \pm \sqrt{\alpha - \gamma} / (t - 1)$ , вычислим  $\Omega'$

$$(3.8) \quad \Omega' = (t - \beta^2) K = \pm \sqrt{\alpha - \gamma} (1 \pm \rho - \beta^2 - \beta^2 \gamma) / (\pm \rho - \gamma) = \mp \frac{\rho \sqrt{\alpha - \gamma}}{\gamma}$$

Итак, при  $V=\beta^2$ ,  $\Omega' = \mp \rho \sqrt{\alpha - \gamma} / \gamma$  и  $\text{Im } \Omega' = 0$ .

При движении со скоростью  $V$ , равной значению  $d\Omega_1/dK_1$  в точках  $P$  и  $Q$  (фиг. 3) с  $\text{Im } \Omega' > 0$ , имеет место абсолютная неустойчивость, поскольку для кривой  $PL$  выполнено равенство

$$(3.9) \quad K_1' = \Omega_1' / (-\beta - V + o(1)), \quad \text{Im } \Omega' \rightarrow \infty$$

а для ветви  $PQ$  очевидна оценка (3.6).

Уменьшая значение  $V$ , получим точки ветвления корней вида (3.9) и (3.6) с  $\text{Im } \Omega' > 0$  вплоть до указанного значения  $V_2 = \beta^2$ . Меньшим значениям скорости соответствуют точки ветвления с  $\text{Im } \Omega' < 0$ .

На фиг. 3 такой точкой является  $N$ , для которой выполнены оценки (3.9) и (3.6); однако в этом случае они не обеспечивают абсолютной неустойчивости.

В связи с этим можно отметить, что правило Стэррока, позволяющее по наклону асимптот дисперсионных кривых судить о характере неустойчивости [3], не может быть применено в данном случае. Хотя наклон асимптот  $V = \pm \beta$ ,  $V = 1$  при  $\alpha \geq \alpha^*$  не меняется, на участке  $\beta^2 < U < \beta$  возникает диапазон абсолютной неустойчивости, который невозможно предсказать с помощью правила Стэррока.

4. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с коэффициентами, не зависящими от координаты  $x$  и времени  $t$ , вида

$$\sum_{j=1}^n P_{ij}(\partial/\partial t, \partial/\partial x) u_j = 0$$

где  $P_{ij}$  — полиномы от  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial x$ ,  $u_j$  — неизвестные. Ее дисперсионное уравнение имеет вид

$$(4.1) \quad \det \| P_{ij}(-i\Omega, iK) \| = 0$$

Пусть на левом конце  $x = -L$  задано  $s$  однородных граничных условий, а при  $x = L$  соответственно  $N - s$ , где  $s$  равно числу корней (4.1) с  $\text{Im } K > 0$  при  $\text{Im } \Omega \rightarrow \infty$  (условие корректной постановки краевой задачи [2]).

Занумеруем корни  $K_j(\Omega)$  в порядке убывания  $\text{Im } K_j$  при каждом  $\Omega$ , т. е.  $\text{Im } K_j \geq \text{Im } K_i$  при  $i > j$ . Существование собственной функции, нарастающей для всех  $x$  как  $\exp(-i\Omega t)$ , согласно [2] обеспечено, если уравнение, определяющее собственные частоты  $\Omega$  при  $L \rightarrow \infty$

$$(4.2) \quad \text{Im } K_s(\Omega_1) = \text{Im } K_{s+1}(\Omega)$$

имеет решения в верхней полуплоскости  $\text{Im } \Omega > 0$ .

Возникающая при этом «глобальная» неустойчивость не зависит от конкретного вида граничных условий и определяется свойствами самой системы.

Из оценок (3.2) для уравнения (3.1) вытекает, что  $s=3$ . Таким образом, условие (4.2) приобретает вид

$$(4.3) \quad \operatorname{Im} K_1(\Omega) \geq \operatorname{Im} K_2(\Omega) \geq \operatorname{Im} K_3(\Omega) = \operatorname{Im} K_4(\Omega)$$

Можно доказать, что в верхней полуплоскости  $\Omega$  существуют точки, удовлетворяющие условию (4.3). В самом деле, выберем  $\Omega_0$ , как указано на фиг. 1. При этом  $\operatorname{Im} K_j(\Omega_0) = 0$ ,  $j=1, 2, 3, 4$ . Комплексно-аналитические функции  $K_j(\Omega)$  обладают вещественными производными  $dK_j(\Omega)/d\Omega$  в точке  $\Omega_0$ . В силу выбора  $\Omega_0$  можно добиться также выполнения неравенства

$$(4.4) \quad \frac{d}{d\Omega} K_1(\Omega_0) \geq \frac{d}{d\Omega} K_2(\Omega_0) \geq \frac{d}{d\Omega} K_3(\Omega_0) = \frac{d}{d\Omega} K_4(\Omega_0)$$

Тогда уравнение (4.2) имеет решение вида  $\Omega = \Omega_0 + ih + o(h)$  в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} \Omega > 0$ . Подставим указанное выражение для  $\Omega$  в условие (4.3) и воспользуемся разложением Тейлора при малых положительных  $h$ . Отсюда, используя (4.4), легко проверить выполнение уравнения (4.2) и тем самым доказать глобальную неустойчивость при  $1 > \beta > 0$  и  $\alpha > 0$ .

В заключение автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за их ценные советы и внимание к данной работе.

Поступила 2 XII 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б. О высокочастотных колебаниях электронной плазмы. ЖЭТФ, 1951, т. 21, вып. 11.
2. Куликовский А. Г. Об устойчивости однородных состояний. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. Ахиезер А. И., Половин Р. В. Абсолютная, конвективная и глобальная неустойчивость, усиление и непропускание колебаний. Киев, Изд-во АН УССР, 1970.
4. Михайловский А. Б. Теория плазменных неустойчивостей, т. 1. М., Атомиздат, 1970.
5. Weitzner H. The Green's function for the linearized Vlasov equations. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 8.