МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1977

УДК 532.5.29.5

О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ МЕЛКИЕ ЧАСТИЦЫ

С. В. ИОРДАНСКИЙ, А. Г. КУЛИКОВСКИЙ

(Москва)

Вопрос о замкнутых уравнениях движения жидкости, содержащей частицы другой фазы, обсуждался в ряде работ. При крупномасштабных и медленных движениях, когда частицы находятся в локальном равновесии с жидкостью, можно ввести некоторое эффективное уравнение состояния, так что имеют место обычные уравнения гидродинамики для среднего движения. Для произвольных движений и немалых концентраций задача получения нефеноменологических уравнений для среднего движения чрезвычайно сложна. Однако в случае малых концентраций частиц можно написать эффективные замкнутые уравнения для средних величин в первом порядке по концентрации, считая расстояния между частицами пренебрежимо малыми.

В работе одного из авторов [1] уравнения гидродинамики осреднялись по различным реализациям течения, зависящего от конкретных начальных данных для расположения частиц, которые в этой и в последующих работах [2–4] предполагались сферическими. Наличие частиц в жидкости, движущихся относительно нее, приводит к возмущениям скорости, так что при осреднении возникает дополнительный тензор напряжений, аналогичный тензору напряжений Рейнольдса в теории турбулентности. Однако при вычислении этого тензора напряжений в работе [1] была допущена неточность, связанная с пренебрежением поверхностным натяжением, или другими силами, уравновешивающими распределение давления по поверхности частиц. Эта неточность, не отмеченная последующими авторами (см., например, [2–4]), дала повод к сомнениям в самом методе получения уравнений. В [3], например, ставится под сомнение возможность считать давление на больших расстояниях от частицы равным среднему.

Легко, однако, видеть, что фактический учет отличия этих давлений, имеющего первый порядок по концентрации частиц, требует учета взаимодействия между отдельными частицами в том же порядке по концентрации. В низшем порядке по концентрации это отличие несущественно. В [3] использовался подход, отличающийся от [1], непосредственно учитывающий влияние движения частиц на осредненное поле течения без вычисления дополнительного тензора напряжений. Вычисление тензора напряжений на основании результатов этой работы, проведенное Р. И. Нигматулиным [1] привело к тензору напряжений, отличающемуся коэффициентом от тензора напряжений работы [1] и соответствующему потокам импульса, равным произведениям присоединенной массы на компоненты относительной скорости частиц.

В настоящей работе получены осредненные уравнения движения для жидкости с частицами произвольной формы. В случае сферических частиц тензор напряжений совпадает с тензором, найденным Р. И. Нигматулиным, и не совпадает с результатом [2], который приводит к неправильному полю средней скорости. Для несферических частиц дополнительные потоки импульса, обусловленные движением частиц относительно жидкости, не равны в общем случае произведению присоединенной массы частиц на компоненты относительной скорости. Они могут зависеть как от ускорений частиц, так и от скоростей изменения их формы. В некоторых важных случаях дополнительный тензор напряжений выражается через произведения дипольных моментов частиц на относительные скорости.

Рассмотрено поведение малых возмущений в однородном течении в жидкости, содержащей пузырьки газа. Показано, что всегда имеется неустойчивость с инкрементом, который достигает значений порядка $\alpha^{1/6}$, где α — объемная плотность пузырей.

---

[1] Р. И. Нигматулин. Доклад на семинаре Л. И. Седова.

1. Опишем метод получения уравнений для средних, использованный в [1]. Запишем уравнения гидродинамики для всей жидкости (включая частицы другой фазы) в виде законов сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} A^{(s)} = -\frac{\partial}{\partial x_k} j_k^{(s)} \tag{1.1}$$

где $A^{(s)}$ — сохраняющиеся величины (масса, компоненты импульса, энергии), $j_k^{(s)}$ — соответствующие потоки. Величины $A^{(s)}$ и $j_k^{(s)}$, характеризующие течение, зависят от конкретной его реализации, обычно понимаемой как задание некоторых начальных данных, характеризующих размеры и положение частиц. Будем интересоваться средними характеристиками по различным реализациям. Обычно предполагается, что средние по объему, например масса жидкости в некотором объеме V, содержащем большое число частиц, но малом по отношению к размерам, на которых существенно меняются средние по реализациям, не зависит от конкретной реализации. В этом случае среднее по реализациям, которое будем обозначать угловыми скобками, равно среднему по объему. Действительно

$$\left\langle \frac{1}{V}\int A\,dV \right\rangle = \frac{1}{V}\int \langle A\rangle\,dV = \langle A\rangle = \frac{1}{V}\int A\,dV \tag{1.2}$$

если $\langle A\rangle$ не меняется внутри V.

Таким образом, осредняя (1.1) по реализациям, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle A^{(s)}\rangle = -\frac{\partial}{\partial x_k}\langle j_k^{(s)}\rangle \tag{1.3}$$

Осреднение уравнения неразрывности тривиально, так как использует только определения средних

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho\rangle = -\operatorname{div}\langle\rho\rangle\mathbf{u} \tag{1.4}$$

$$\langle\rho\rangle = \rho_f(1-\alpha) + \rho_p\alpha, \qquad \mathbf{u} = \frac{\langle\rho\mathbf{v}\rangle}{\langle\rho\rangle} \tag{1.5}$$

$\mathbf{u}$ — среднемассовая скорость, ρ_f — плотность жидкости, ρ_p — плотность вещества внутри частиц, α — объемная концентрация частиц.

Нетривиальное осреднение имеется в законе сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\langle\rho\rangle\mathbf{u}) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\langle\Pi_{ik}\rangle + \langle F_i\rangle \tag{1.6}$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik} + \sigma_{ik}$$

где величиной σ_{ik} обозначен дополнительный тензор натяжений внутри частиц, уравновешивающий распределение давления по их поверхности, F_i — внешние объемные силы. Для простоты будем предполагать, что силы, действующие на жидкость и на частицы, представляют собой медленно меняющиеся функции, так что на расстояниях порядка расстояния между частицами можно считать, что в жидкости и внутри частиц F_i принимают постоянные значения, вообще говоря, не равные между собой. При вычислении среднего от произведения $\langle\rho v_i v_k\rangle$ положим $v_i =$

$=u_j+v_j'$. Как показано в [1] с точностью до членов, квадратичных по концентрации частиц, можно пренебрегать отличием v_j' от скорости, создаваемой движением отдельной частицы относительно средней скорости U вдали от частицы. Действительно, пусть $v_i=v_i+v_{1i}$ и $\langle\rho\rangle u_i=\langle\rho\rangle U+I_i$, где I_i — дополнительный импульс, создаваемый движением частиц (пропорциональной концентрации)

$$I_i=\frac{1}{V}\int\rho v_{1i}\,dV$$

$$\langle\rho v_i v_k\rangle=\langle\rho\rangle U_iU_k+\langle\rho v_{1k}\rangle U_i+\langle\rho v_{1i}\rangle U_k+\langle\rho v_{1i}v_{1k}\rangle=$$
$$=\langle\rho\rangle\left(U_k+\frac{I_k}{\langle\rho\rangle}\right)U_i+I_iU_k+\langle\rho v_{1i}v_{1k}\rangle=$$
$$=\langle\rho\rangle\left(U_k+\frac{I_k}{\langle\rho\rangle}\right)\left(U_i+\frac{I_i}{\langle\rho\rangle}\right)+\langle\rho v_{1i}v_{1k}\rangle-\frac{I_iI_k}{\langle\rho\rangle}$$

последний член содержит концентрацию частиц в квадрате. Таким образом, при вычислении среднего от Π_{ik} существенны только квадратичные по v_1 выражения, интегралы по объему от которых сходятся. Величину $\langle p\rangle$ можно оставить в явном виде, так как величина, подставляемая в уравнения движения отдельных частиц, определена только с точностью до членов, не зависящих от концентрации. Существенно, однако, вычислить нешаровую часть $\langle\Pi_{ik}\rangle$. Согласно предыдущему эта величина равна

$$\langle\Pi_{ik}'\rangle=\frac{1}{V}\int\limits_V(\rho v_{1i}v_{1k}-\sigma_{ik})\,d^3x \tag{1.7}$$

где V — объем, приходящийся на одну частицу, численно равный $1/n$. Так как σ_{ik} отлична от нуля только внутри частицы, а v_{1i} убывают при удалении от частицы по крайней мере как r^{-2}, то интеграл (1.7) сходится. Поэтому при больших расстояниях между частицами по сравнению с их размерами интеграл (1.7) может вычисляться в бесконечных пределах или по произвольному объему, границы которого достаточно удалены от частицы. Такое вычисление можно провести явно в инерциальной системе координат, скорость которой совпадает со скоростью частиц в некоторой малой области. Выражая новый тензор потока импульса (в системе, где частица неподвижна), получим, как обычно

$$\langle\Pi_{ik}^\circ\rangle=\langle\Pi_{ik}\rangle+\langle\rho\rangle w_iw_k-\langle\rho\rangle(u_iw_k+w_iu_k) \tag{1.8}$$

где $\langle\Pi_{ik}^\circ\rangle$ — среднее в новой системе отсчета, w_i — скорость частицы в исходной системе. Умножая уравнения движения на x_k и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_V\Pi_{ik}^\circ\,d^3x=I_{ik}^{(1)}+I_{ik}^{(2)},\qquad I_{ik}^{(1)}=\int\limits_S x_k\Pi_{il}^\circ n_l\,dS \tag{1.9}$$

$$I_{ik}^{(2)}=\int\limits_V x_k\left(F_i-\frac{\partial\rho v_i}{\partial t}\right)d^3x-\int\limits_\Sigma x_k[\rho_pv_i^pv_j^p-\rho_fv_iv_j]n_j\,d\Sigma$$

Здесь S — поверхность, ограничивающая объем интегрирования; Σ — поверхность частицы; ρ_p и v_i^p — плотность и скорость среды внутри частицы.

Равенство (1.9) можно переписать и в другой форме

(1.10)
$$\int_V \Pi_{ik}{}^\circ\, d^3x = \int_S x_k\rho_f\left(v_iv_j - \frac{v^2}{2}\delta_{ij}\right)n_j\, dS - \int_\Sigma x_k[\rho_p v_i{}^p v_j{}^p - \rho_f v_i v_j]n_j\, d\Sigma -$$
$$-\int_\Sigma x_k\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}n_i\, d\Sigma - \int_T x_k\frac{\partial\rho_p v_i{}^p}{\partial t}d^3x$$

Здесь T — объем, занятый частицей. При получении последнего равенства использовалась потенциальность движения жидкости и уравнения движения для среды внутри частицы.

В качестве S выберем сферу радиуса $r \gg a$ (a — размер частиц) с центром, совпадающим с центром объема частицы. Очевидно, что так как F_i принимают постоянные значения в жидкости и внутри частицы, то интегралы от F_i в (1.9) исчезают. Пользуясь на S асимптотическим выражением

$$\varphi = -w_ix_i - \frac{3}{4\pi}\frac{\dot V_p}{r} - \frac{d_ix_i}{2r^3}$$

($\dot V_p$ — скорость изменения объема частицы, d_i — дипольный момент), получим

(1.11)
$$\int_V \Pi_{ik}{}^\circ\, d^3x = r^3\int_S pn_in_l\, dO + r^3\int_S \rho_f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}n_kn_l\, dO =$$
$$= V\langle p\rangle\delta_{ik} + V\rho_f w_iw_k - \frac{\pi}{3}(d_iw_k + d_kw_i) + I_{ik}^{(2)}$$

Здесь при вычислении интегралов был использован интеграл Коши — Лагранжа для исключения давления. В $\langle p\rangle$ включены различные шаровые члены, вид которых несуществен.

Обратимся теперь к $I_{ik}^{(2)}$. Отметим прежде всего, что в ряде интересных случаев он обращается в нуль, например при любом обтекании частиц, обладающем тремя плоскостями симметрии. Действительно в этом случае под интегралом стоит нечетная функция хотя бы одной из переменных. В частности, этот интеграл будет равен нулю и для случая пульсирующих сферических пузырьков.

С другой стороны, легко построить пример частиц, для которых интегралы $I_{ik}^{(2)}$ отличны от нуля.

Если частицы — недеформируемые тела, движущиеся без вращения, то $I_{ik}^{(2)}$ представляют собой линейные функции от компонент ускорения частиц с коэффициентами, зависящими от формы тела. Отметим, что, как следует из (1.7), члены, зависящие от ускорения, могут появиться только в результате осреднения σ_{ik}.

Используя равенство (2) и переходя к исходной системе отсчета, из (1.11) получим

(1.12)
$$\langle\Pi_{ik}\rangle = \langle p\rangle\delta_{ik} + \langle\rho\rangle u_iu_k + (\rho_f - \langle\rho\rangle)(u_i - w_i)(u_k - w_k) -$$
$$-\frac{\pi n}{3}[d_i(w_k - u_k) + d_k(w_i - u_i)] + nI_{ik}^{(2)}$$

где, как и раньше, выражение $I_{ik}^{(2)}$ определяется равенством (1.9) и во многих случаях оказывается равным нулю. В случае частиц сферической формы $d_i=a^3(w_i-u_i)$

$$\langle\Pi_{ik}\rangle=\langle p\rangle\delta_{ik}+\langle\rho\rangle u_iu_k+\frac{2\pi a^3n}{3}\rho_f(w_i-u_i)(w_k-u_k)-$$
$$-\frac{4}{3}\pi a^3n\rho_p(w_i-u_i)(w_k-u_k) \tag{1.13}$$

Согласно (1.12) добавка к тензору потока импульсов, связанная с наличием частиц, содержит кроме $I_{ik}^{(2)}$ еще две части, каждая из которых квадратичным образом зависит от компонент относительной скорости. Одна часть дает изменение потока импульса за счет разности средней плотности и плотности частиц, а вторая зависит от дипольных моментов частиц. Отметим, что учет нешаровых напряжений в частице привел к изменению коэффициента в третьем члене (в [1] было $\pi/15$ вместо $2\pi/3$).

Для получения замкнутой системы уравнений для жидкости с частицами необходимо записать уравнение неразрывности для числа частиц и уравнение движения частиц [2]

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k}(nw_k)=0 \tag{1.14}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left[mw_i+\frac{2}{3}\pi\rho_fa^3(w_i-u_i)\right]-\frac{4}{3}\pi a^3\rho_fg_i=0 \tag{1.15}$$

Здесь m — масса частицы, которую будем считать постоянной $(m=\rho_rV_r)$; g_i — ускорение жидкости, которое с точностью до членов порядка α можно вычислять по средней скорости

$$g_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{1.16}$$

Если частицы деформируемые, то необходимо задать закон их деформации и, вообще говоря, внутреннее движение внутри частиц. При рассмотрении пузырьков газа массой газа в пузырьке можно пренебречь и, считая, что за счет действия поверхностного натяжения пузырек сохраняет приблизительную сферическую форму, нетрудно получить связь между давлением в нем, зависящим от радиуса, средним давлением в жидкости и движением пузырька

$$p(a)=\langle p\rangle+\frac{\rho_f}{a}\frac{d}{dt}\left(a^2\frac{da}{dt}\right)+\frac{2\sigma}{r}-\frac{\rho_f}{2}\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{u})^2\right] \tag{1.17}$$

где σ — поверхностное натяжение, $p(a)$ — давление газа в пузырьке как функция его радиуса. Давление вдали от пузырька полагалось равным $\langle p\rangle$, а различными членами, малыми в пределе малой концентрации, как отмечалось выше, пренебрегалось.

Уравнения сохранения массы и импульса (1.4), (1.6) с равенством (1.12), определяющим тензор потока импульса (или (1.13) в случае сферических), а также уравнения (1.14), (1.15), выражающие сохранение числа частиц и закон их движения, в случае поступательно движущихся недеформируемых частиц образуют замкнутую систему уравнения. В случае деформируемых или вращающихся частиц нужны дополнительные уравнения, описывающие эти явления. Для пузырьков газа таким уравнением является уравнение (1.17). Кроме того, в уравнениях (1.13) и (1.15) можно пренебречь членами, содержащими ρ_p и m.

Решив полученную систему уравнений линеаризацией по α в случае частиц, движущихся относительно жидкости и сосредоточенных в конечном объеме, легко проверить, что получается правильное выражение для скорости жидкости вне этого объема, совпадающее с обычными формулами потенциального обтекания частиц жидкостью. Этот результат, найденный ранее в [3], нельзя получить из уравнений [2], так как коэффициент в нешаровой части тензора потока импульса в этой работе — $4\pi/3$ вместо правильного значения $2\pi/3$.

2. Полученную систему уравнений можно использовать для определения спектра малых колебаний. Будем предполагать, что в невозмущенном состоянии пузырьки распределены однородно, их размеры одинаковы и они имеют постоянную скорость w_i, в то время как жидкость будем считать покоящейся. Легко видеть, что система (1.4), (1.6), (1.14), (1.15), (1.17) допускает такое решение. Линеаризуя и полагая все величины пропорциональными $\exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)$ и опуская у ρ знак осреднения, получим систему алгебраических уравнений (штрихами обозначены возмущения)

$$-i\omega\rho'=-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}'\rho,\quad \rho'=-\rho_f 4\pi a^2 a' n-\rho_f\frac{4\pi}{3}a^3 n',\quad -i\omega n'=-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}n'-i\mathbf{k}\mathbf{w}'n$$

$$(2.1)\qquad -i\omega\rho\mathbf{u}'=-i\mathbf{k}p'-i\frac{2\pi}{3}a^3 n\rho_f[\mathbf{w}(kw'-\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}')+(w'-u')\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}]+$$

$$+i2\pi a^3\rho_f n\left(\frac{a'}{a}+\frac{n'}{n}\right)\mathbf{w}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}),\qquad \left(\frac{dp(a)}{da}+\frac{2\sigma}{a^2}\right)a'-$$

$$-\rho_f[-i\omega+i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{w})]^2 aa'=p'-\frac{\rho_f}{2}\mathbf{w}\cdot(\mathbf{w}'-\mathbf{u}')$$

$$-i\omega\frac{4}{3}\pi a^3\mathbf{u}'+i(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{w})\frac{2}{3}\pi a^3(\mathbf{w}'-\mathbf{u}')+i(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{w})\mathbf{w}2\pi a^2 a'=0$$

Введем обозначения

$$(2.2)\qquad \omega_1=\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{w},\qquad c^2=-\left[\frac{dp(a)}{da}+\frac{2\sigma}{a^2}\right]\frac{a}{\rho_f}$$

Отметим, что $c^2>0$, так как в противном случае среда была бы неустойчивой. Исключая все переменные, кроме $\mathbf{u}'$, нетрудно получить уравнение

$$\left(\rho_0\omega+\alpha\frac{\omega}{\omega_1}\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}\right)\mathbf{u}'=\left\{\left[\frac{\omega_1\rho_0}{\omega_1-\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}}\frac{1}{\omega\alpha}+\frac{3\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}}{\omega_1-\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}}\frac{1}{\omega_1}\right]\times\right.$$

$$(2.3)\qquad \times\left[k\left(c^2+\frac{1}{2}\omega^2-\omega_1^2a^2\right)-\frac{3}{2}\alpha\mathbf{w}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{w})-\frac{3}{2}\alpha\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{w})^2}{\omega_1}\mathbf{w}\right]-$$

$$\left.-\alpha\mathbf{w}\left(\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{1}{2}\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}}{\omega_1}\frac{2\omega+\omega_1}{\omega_1}\right)\right\}\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}'$$

$$\left(\rho_0=\frac{\rho}{\rho_f},\ \alpha=\frac{4}{3}\pi a^3 n\right)$$

Рассматривая проекции этого уравнения на направления $\mathbf{w}$ и $\mathbf{k}$, нетрудно получить дисперсионное уравнение. Это уравнение чрезвычайно громоздко. Необходимо, однако, иметь в виду, что в этом уравнении имеется малый параметр $\alpha\ll 1$. Ограничиваясь низшими членами по α, дисперсионное уравнение приближенно можно записать в виде

$$3\rho_0\omega_1\omega^3-\frac{\omega_1^4}{\alpha}\rho_0\left[k^2\left(c^2+\frac{3}{2}w_0^2+\omega_1^2a^2\right)\right]- \tag{2.4}$$

$$-\omega_1^2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{w})^2\left\{2k^2c^2+\frac{9}{2}[k^2w^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{w})^2]\right\}=0$$

Корни дисперсионного уравнения распадаются на высокочастотные с $\omega\sim1/\sqrt{\alpha}$ и низкочастотные с $\omega\sim\sqrt{\alpha}$.

Для высокочастотной ветви существенны только два первых члена, причем $\omega_1=\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}\approx\omega$. Соответствующие корни имеют вид

$$\omega_1=\pm k\sqrt{\frac{c^2+{}^3/_2w^2}{3\alpha(1+a^2k^2/3\alpha)}} \tag{2.5}$$

в пределе больших длин волн это — обычные акустические колебания, несколько видоизмененные наличием w.

Для низкочастотных ветвей существенны только два последних члена в (2.6), причем

$$\omega\approx\mathbf{k}\cdot\mathbf{w}\pm i\sqrt{\frac{\alpha}{\rho_0}\frac{2c^2k^2+{}^9/_2[\omega^2k^2-(\mathbf{w}\cdot\mathbf{k})^2]}{c^2k^2+{}^9/_2w^2k^2}} \tag{2.6}$$

Один из этих корней соответствует экспоненциальному росту колебаний со временем, причем этот рост наибольший для волн, распространяющихся вдоль $\mathbf{w}$. Быстрее всего растут волны с большими k. Так как уравнения справедливы только для движений, масштаб которых велик по сравнению с расстоянием между частицами $\alpha^{-1/3}a$, формула (2.6) перестает быть справедливой при $k\sim\alpha^{1/3}a^{-1}$ либо, если более существенны поправки на вязкость, при величине, обратной характерной вязкой длине (этот вопрос не рассматривался). В первом случае наибольший инкремент имеет порядок $\alpha^{1/6}$. Кроме (2.5) и (2.6) имеются еще корни $\omega_1=0$ и $\omega_1\sim\alpha$, которые, однако, не приводят к неустойчивости.

Таким образом, приходим к выводу, что движение частиц с постоянной скоростью относительно жидкости неустойчиво. В пределе $w/c\to0$ эта неустойчивость соответствует нарастанию колебаний плотности частиц и их скорости, в то время как средняя скорость жидкости и размер частиц меняются слабо. Нарастание колебаний идет наиболее быстро для коротких длин волн и обрывается где-то на длинах волн порядка расстояния между частицами. Возможность появления такой неустойчивости отмечалась в работе [3], однако результаты, полученные в [3], не согласуются с формулой (2.6). Причину этого расхождения следует искать в уравнениях движения отдельного пузырька, где существенно дифференцирование вдоль траекторий пузырька, что не учтено в [3].

Обнаруженная неустойчивость имеет простое объяснение. Рассмотрим первоначально покоящиеся пузыри или какие-либо другие частицы в потоке жидкости. Если объемная плотность пузырей меняется в направлении течения, то, как следует из уравнения неразрывности, на величину того же порядка будет меняться и средняя скорость, что приведет к возникновению ускорения в жидкости. Согласно уравнению движения пузырей они получают ускорение в направлении ускорения жидкости, т. е. к области, где объемная плотность пузырей больше, что и приводит к росту возмущений.

Отметим, что универсальный характер полученной неустойчивости весьма существен для общих свойств решений нелинейных уравнений (1.4), (1.6), (1.14), (1.15), (1.17), так как в малой области любого плавного движения справедливо локальное рассмотрение для коротковолновых возмущений согласно приведенной выше схеме для однородного течения. Такое рассмотрение должно привести к неустойчивости любого плавного течения, однако если пузыри движутся, то неустойчивость будет конвективной, т. е. возмущения будут нарастать и уходить из рассматриваемой области вместе с пузырями. Неустойчивость должна, например, проявляться при всплывании пузырьков в поле тяжести, хотя вопрос о возможности использования схемы потенциального обтекания, здесь не вполне ясен.

Поступила 12 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иорданский С. В.* Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа. ПМТФ, 1960, № 3.
2. *Якимов Ю. Л.* Силы, действующие на малое тело в произвольном потоке несжимаемой жидкости, и уравнения движения двухфазной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
3. *Гарипов Р. М.* Замкнутые уравнения движения жидкости с пузырьками. ПМТФ, 1973, № 6.
4. *Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.

При обсуждении всех рассмотренных процессов успешно использованы представления и модели механики жидкости и газа.

С последним докладом «Управление физико-механическими процессами в жидкости, газе и плазме» выступил Ю. П. Ладиков-Роев.

Если тело имеет губкое покрытие, можно управлять его формой так, чтобы обеспечить минимальное сопротивление при движении тела в жидкости или газе. В качестве такого покрытия рассматривается магнитоупругая среда с нелокальными связями. В канале с магнитоупругими стенками можно получить эффект отрицательной вязкости и, например, повысить устойчивость течения Пуазейля. Большие успехи в повышении устойчивости высокотемпературной плазмы достигнуты путем применения электростатического и магнитного управления плазмы в термоядерных реакторах. Построить систему управления с малым временем задержки трудно, поскольку время развития неустойчивости плазмы имеет порядок 10^{-10} *сек*.

В дискуссии «круглого стола» выступило 20 участников сессии. Были затронуты вопросы моделирования турбулентных течений, магнитогидродинамики жидких металлов, теории катодного пятна, химической технологии и образования геологических структур, теории газовой смазки, расчета пограничного слоя, теории отрывных течений вязкой и невязкой жидкостей, расчета турбулентных струй и течений с полимерными добавками, энергетики горения, систем активного управления летательными аппаратами, математической разрешимости задач гидродинамики, взаимодействия тел со струями жидкости и газа, биомеханики, теории двухфазных течений, входа в атмосферы планет, оптимизации аэродинамического эксперимента.

В целом сессия продемонстрировала высокий уровень развития механики в нашей стране и сопровождалась полезной дискуссией, обратившей внимание участников на ряд важных нерешенных задач.

Г. Ю. Степанов

Исправление к статье С. В. Иорданского, А. Г. Куликовского «О движении жидкости, содержащей мелкие частицы»

(Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 4)

Упомянутая статья посвящена нахождению усредненного тензора напряжений в жидкости, содержащей много мелких частиц или пузырей и устойчивости относительного движения пузыря и жидкости.

При написании уравнения (1.15), описывающего движение пузырей (это уравнение было известно ранее и вопрос о его написании не являлся предметом статьи) было пропущено слагаемое (последнее в уравнении, написанном ниже), с учетом которого это уравнение примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\left[mw_i+\frac{2}{3}\pi\rho_f a^3(w_i-u_i)\right]-\frac{4}{3}\pi a^3\rho_f g_i+\frac{2}{3}\pi a^3\rho_f(w_k-u_k)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}=0$$

$$g_i=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

Учет этого пропущенного ранее члена не приводит к изменению окончательной формулы (2.5), а формула (2.6), содержащая опечатку, должна быть заменена на

$$\omega=\mathbf{kw}\left(1\pm i\sqrt{\frac{3\alpha}{\rho_0}\,\frac{4k^2c^2+9[k^2w^2-(\mathbf{kw})^2]}{4k^2c^2+6k^2w^2}}\right)$$

Все качественные выводы, сделанные в статье, остаются в силе. Авторы благодарны О. В. Воинову, обратившему их внимание на указанную неточность.

С. В. Иорданский, А. Г. Куликовский

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Сдано в набор 17.05.78 Подписано к печати 25.07.78 Т-08577 Формат бумаги 70×108¹/₁₆
Высокая печать Усл. печ. л. 15,4 Уч.-изд. л. 18,0 Бум. л. 5,5 Тираж 1970 экз. Зак. 495

Издательство «Наука». 103717, Москва, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10