МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1977

УДК 533.6.011.72:538.4

О НОВЫХ ТИПАХ ИОНИЗУЮЩИХ УДАРНЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. А. БАРМИН

(Москва)

Для получения полной системы граничных условий на ионизующих ударных волнах в электромагнитном поле необходимо исследовать структуру такой волны, т. е. течение и поле в узкой зоне, моделируемой сильным разрывом. Условия существования решения дадут соотношения, дополнительные к граничным условиям, вытекающим из законов сохранения массы, импульса и энергии и непрерывности касательной составляющей электрического и нормальной составляющей магнитного полей. При этом в общем случае совокупность всех граничных условий будет обеспечивать эволюционность такого разрыва [1].

В работе [2] при рассмотрении структуры ионизующей ударной волны, когда механизмом, определяющим структуру, является диссипация токов, предполагалось, что состояние за волной – дозвуковое по отношению к газодинамической скорости звука. Это предположение, естественно, не влияет на эволюционность волны, так как скорости малых возмущений магнитозвуковые. Однако возможны значения определяющих параметров, когда скорость за волной больше скорости звука. В этом случае характер структуры, а следовательно, и дополнительные соотношения, вытекающие из структуры, становятся другими.

Ниже будет рассмотрена структура и получены дополнительные соотношения для таких волн.

1. Рассмотрим случай, когда процессами, связанными с вязкостью и теплопроводностью, можно пренебречь и структура ионизующей ударной волны определяется конечной электропроводностью среды. При этом предположим, что ионизация равновесная, т. е. проводимость среды $\sigma=\sigma(\rho, T)$ причем $\sigma=0$ вне некоторой области значений ρ и T (ρ – плотность, T – температура). Границу области $\sigma>0$ будем задавать уравнением $\Phi(\rho, T)=0$.

В этих предположениях течение и поле в структуре описываются двумя дифференциальными уравнениями, вытекающими из закона Ома и уравнения Максвелла, и двумя конечными соотношениями, являющимися следствиями законов сохранения массы, импульса и энергии [2]

$$\frac{dh_y}{dx}=h_y(V-1)+E, \qquad \frac{dh_z}{dx}=h_z(V-1) \tag{1.1}$$

$$p+V+{}^1/{}_2h^2=I_1 \quad (h^2=h_y^2+h_z^2) \tag{1.2}$$

$$e-{}^1/{}_2V^2-h^2(V-1)-Eh_y-I_1V=I_2 \tag{1.3}$$

$$h_y=\frac{H_y}{H_x}, \quad h_z=\frac{H_z}{H_x}, \quad E=\frac{cE_z}{mV_0H_x}, \quad V_0=\frac{H_x^2}{4\pi m}$$

$$V=\frac{V'}{V_0}=\frac{u_x^2}{a_A^2}, \quad p=\frac{p'}{m^2V_0}, \quad e=\frac{e'}{m^2V_0^2}$$

$$I_1=\frac{I_1'}{m^2V_0}, \quad I_2=\frac{I_2'}{m^2V_0^2}, \quad a_A^2=\frac{H_x^2V'}{4\pi} \quad x=\frac{x'\nu_m}{mV_0}$$

Здесь ν_m — магнитная вязкость, e — внутренняя энергия газа, m, I_1, I_2 — постоянные, представляющие собой потоки массы, x-й составляющей импульса и энергии; V — удельный объем; p — давление, u_x, a_A—x-я составляющая скорости газа и скорость Альфвена; H_x, H_y, H_z, E_z — компоненты векторов напряженности магнитного и электрического полей. Система координат, связанная с волной, выбрана так, что ось x направлена по нормали к волне, а E_y и потоки y-й и z-й составляющих импульса равны нулю. Штрихом обозначены размерные величины.

Структура ионизующей ударной волны описывается решением системы, в котором при $x\to\pm\infty$ каждая из величин стремится к некоторым предельным значениям.

Таким образом, задача о структуре свелась к исследованию в трехмерном пространстве h_yh_zV дифференциального уравнения (1.1) на поверхности $V=V(h_y, h_z)$, определяемой (1.2), (1.3). В случае совершенного газа $V(h_y, h_z)$ задается уравнением

$$F(V, h_y, h^2)\equiv(\gamma+1)V^2+\gamma V(h^2-2I_1)-(\gamma-1)h^2+$$
$$+2(\gamma-1)Eh_y+2(\gamma-1)I_2=0$$

Здесь γ — отношение удельных теплоемкостей газа.

Поверхность Σ является двузначной по V, причем верхний лист соответствует сверхзвуковым, а нижний — дозвуковым скоростям относительно газодинамической скорости звука $a_0=a_0'/a_A$. Оба листа совпадают на звуковой линии при $V=a_0^2$, в точках которой Σ имеет касательные, параллельные оси V. Очевидно, что на звуковой линии происходит изменение направления движения вдоль интегральных кривых. Поэтому переход через звуковую линию вдоль интегральной кривой с ростом x возможен лишь через особые точки. Известно [2], что за начальное состояние может быть взята любая точка поверхности Σ в области $\sigma=0$, а за конечное — особая точка уравнения (1.1), совпадающая с особыми точками A_i ($i=1, 2, 3, 4$) стационарных МГД уравнений [3]. Отметим, что все A_i в выбранной системе координат лежат при $h_z=0$, и линия пересечения плоскости $h_z=0$ с поверхностью Σ — интегральная кривая. Между значениями скорости газа и скоростями малых МГД возмущений в точках A_i имеют место соотношения

$$V(A_1)>a_+^2,\ a_+^2>V(A_2)>1,\ 1>V(A_3)>a_-^2,\ a_-^2>V(A_4)$$

где $a_{+,-}=a'_{+,-}/a_A$ — скорости распространения быстрых и медленных волн. Решение, заканчивающееся в точках A_2 и A_3, соответствует структуре быстрых и промежуточных волн.

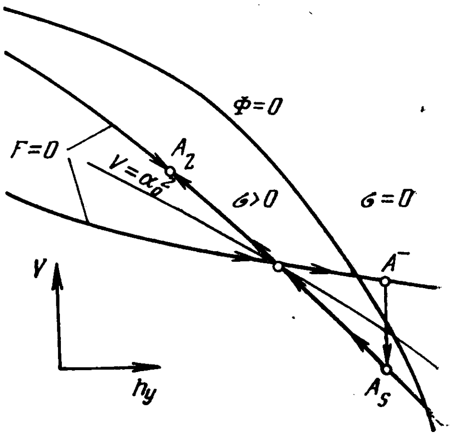
Легко показать, что одно собственное направление уравнения (1.1) в точке A_i параллельно оси h_z с собственным значением $\lambda_1=V_i-1$, второе — оси h_y с λ_2 таким, что

$$\operatorname{sign}\lambda_2=\operatorname{sign}(V-a_0^2)(V-a_+^2)(V-a_-^2)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $V(A_i)>a_0^2$ ($i=2, 3$) точка A_3 — устойчивый узел, а A_2 — седло с входящим собственным направлением, параллельным оси h_y.

Решение задачи о структуре будет состоять из газодинамического скачка (перехода со сверхзвукового листа Σ на дозвуковой при постоянных h_y, h_z) и интегральной кривой, соответствующей МГД течению. Если газодинамический скачок отсутствует, то решение состоит из отрезка интегральной кривой, причем начальная точка A^- лежит на границе проводящей области. Поэтому состояние перед такой волной не произвольно, а является критическим, т. е. удовлетворяет соотношению $\Phi(\rho, T)=0$.

В случае, когда состояние перед волной сверхзвуковое, никакое газодинамическое возмущение не распространяется впереди волны и в нестационарном процессе не может начальное состояние стать критическим. Поэтому такие волны в дальнейшем не рассматриваются [2]. В случае, когда состояние перед волной дозвуковое, вперед может распространяться газодинамическая ударная волна, которая переводит начальное состояние газа в критическое.



Таким образом, структура сверхзвуковых волн будет обязательно содержать газодинамический скачок, а начальная точка на интегральной кривой уравнения (1.1) в решении задачи о структуре обязательно должна лежать на дозвуковом листе Σ.

2. *Быстрая ионизующая волна.* Так как в точку A_2 с ростом x входит интегральная кривая, лежащая в плоскости $h_z=0$, и начальная точка на интегральной кривой обязательно лежит на дозвуковом листе Σ, то для существования структуры должна находиться особая точка на звуковой линии при $h_z=0$. Легко видеть, что эта точка является точкой самопересечения кривой $F(V, h_y)=0$ (фигура). Условием существования точки самопересечения будет

$$V=a_0^2(p, V), \quad h_y[T/p_s'+a_0^2-1]+E=0 \tag{2.1}$$

$$p_s'=\frac{\partial p(V,s)}{\partial s}\bigg|_{V=\mathrm{const}}, \qquad T=\frac{c_vT'}{m^2V_0^2}$$

В случае совершенного газа имеем

$$(\gamma+1)V=\gamma(I_1-{}^1/{}_2h_y^2), \qquad h_y\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}V-1\right]+E=0$$

Исключив из этих соотношений V, с помощью $F(V, h_y)=0$ получим

$$(KI_1-1)h_y^2+3Eh_y-2KI_1^2+4I_2=0 \tag{2.2}$$

$$Kh_y^3-2(KI_1-1)h_y=2E \qquad \left(K=\frac{\gamma^2}{\gamma^2-1}\right)$$

Найдя из квадратного уравнения h_y (быстрой волне соответствует больший корень) и подставив его во второе, получим искомое дополнительное соотношение, связывающее параметры перед волной и E. Кроме того, начальная точка на интегральной кривой лежит при $h_z=0$, т. е. в точке A^- $h_z=0$. Это дает второе условие $\Delta h_z=0$. В случае дозвуковых волн A^- принадлежит границе проводящей области, т. е. имеет место третье дополнительное соотношение $\Phi(\rho, T)=0$. Таким образом, последние два соотношения такие же, как и при $V(A_2)<a_0^2$.

В отличие от случая $V(A_2)<a_0^2$ магнитное поле в таких волнах непостоянно, а $|h_y|$ убывает (фигура). При этом возможны дозвуковые быстрые волны и быстрые волны Жуге ($V(A_2)=a_+^2$).

Промежуточная волна. Так как точка A_3 — устойчивый узел, то на звуковой линии существует множество точек G ненулевой меры, из которых интегральные кривые входят в A_3 с ростом x. Точка на звуковой линии является особой, если в ней обращается в нуль числитель уравнения для проекций интегральных кривых на плоскость h_yV

$$h_z^2=-\left[h_y+\frac{E}{V-1}\right]\left[h_y+\frac{E}{V-1+T/p_s'}\right]$$

Таким образом, в общем случае множество G содержит одну или несколько особых точек. Поэтому условием существования структуры будет требование, чтобы состоянию за газодинамической ударной волной для сверхзвуковых волн или начальному состоянию для дозвуковых волн соответствовала точка на интегральной кривой, входящей в указанную особую точку с ростом x. Это дает одно дополнительное соотношение, связывающее E с параметрами перед волной. Выписать его в явном виде не представляется возможным. Для дозвуковых волн, как и в случае быстрой волны, имеет место еще одно соотношение $(\Phi(\rho, T)=0)$.

В отличие от быстрой волны, как и при $V(A_3)<a_0^2$, промежуточная волна в общем случае неплоскополяризованная, т. е. в выбранной системе координат $H_{z1}\neq H_{z2}$, где индексы 1 и 2 соответствуют значениям перед и за волной. В случае, когда для промежуточной волны $H_{z1}=H_{z2}$, то дополнительным соотношением становится (2.1) или (2.2), причем в первом уравнении для h следует брать меньший корень.

В заключение автор благодарит А. Г. Куликовского за полезные обсуждения.

Поступила 15 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г.* О поверхностях разрыва, разделяющих идеальные среды с различными свойствами. Волны рекомбинации в магнитной гидродинамике. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
2. *Бармин А. А., Куликовский А. Г.* Об ударных волнах, ионизующих газ при наличии произвольно ориентированного магнитного поля. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды». М., «Наука», 1969.
3. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика, М., Физматгиз, 1962, стр. 203.