

К ПОСТРОЕНИЮ СВЕРХЗВУКОВЫХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛ

А. И. РЫЛОВ

(Новосибирск)

Рассмотрены вопросы, связанные с построением оптимальных контуров несимметричных плоских сопел. В [1] в случае «минимально возможной» длины нижней стенки эта задача была решена точно методом контрольного контура. Для больших длин нижней стенки указанный метод неприменим и требуется использовать так называемый общий метод множителей Лагранжа [2, 3]. Ниже на основе этого метода получены необходимые условия оптимальности предложенных (но не исследованных) в [1] конфигураций, построено решение, содержащее участок двустороннего экстремума, и численно проанализированы конфигурации, не содержащие такого участка.

Специфика рассмотренной задачи приводит к ситуациям, отличным от встречавшихся ранее в вариационных задачах сверхзвуковой газовой динамики. Последнее связано как с особенностями формулировки сопряженной задачи для определения множителей Лагранжа, так и с расположением линий разрыва указанных множителей. В заключительной части статьи, продолжая [4], исследуется влияние интенсивности волны сжатия на тягу «укороченного» несимметричного сопла. Показано, что замена центрированной волны волной сжатия весьма умеренной интенсивности незначительно уменьшает тягу сопла.

1. Пусть x, y — оси прямоугольной системы координат. Рассмотрим вариационную задачу о построении плоского несимметричного сопла, которое при равномерном параллельном оси x потоке с числом Маха $M_1 > 1$ в начальном сечении aa° , лежащем на оси y , реализует на выходе также равномерный параллельный оси x поток с числом Маха $M_2 > M_1$. Длина x_b нижней стенки сопла, а также и числа M_1 и M_2 считаются заданными. В рассматриваемой задаче образующие ab и $a^\circ b^\circ$ нижней и верхней стенок необходимо построить такими, чтобы искомое сопло имело минимальную длину верхней стенки (вернее, минимальную абсциссу концевой точки x_b°).

Для заданных M_1 и M_2 и фиксированного показателя адиабаты κ (ограничимся случаем течения совершенного газа) указанная задача, как показано в [1], имеет решение лишь в том случае, если x_b не меньше некоторой величины $X_- = X_-(M_1, M_2, \kappa)$, которую назовем минимально возможной длиной нижней стенки. Здесь и далее линейные размеры относятся к высоте входного сечения сопла, а индексы a, b, \dots приписываются параметрам в соответствующих точках плоскости xy . В силу этого имеем $x_a = y_a = x_{a^\circ} = 0, y_{a^\circ} = 1$.

При $x_b = X_-$ искомая конфигурация включает в себя веер волн сжатия с точкой фокусировки d на верхней стенке и веер волн разрежения с центром в точке b — концевой точке нижнего контура, как показано на фиг. 1, а. Анализ конфигураций данного типа, выполненный в [1] переходом к «контрольному контуру», показал их преимущество (по общей длине), например, по сравнению с несимметричными соплами, которые представляют собой половинки симметричных плоских сопел. Увеличение длины нижней стенки в общем случае уменьшает длину несимметричного сопла, хотя при $x_b > X_-$ соответствующий анализ не может быть выполнен тем же методом. Поэтому исследование предложенных в [1] для $x_b > X_-$

конфигураций типа представленной на фиг. 1, б и получающейся из нее при совпадении точек f и g требует привлечения общего метода множителей Лагранжа [2, 3]. Опираясь на этот метод, получим условия оптимальности конфигурации, изображенной на фиг. 1, б и предполагающей в общем случае наличие на характеристике второго семейства $a^{\circ}b$ участка двустороннего экстремума fg . Затем, используя эти условия, покажем, что для широкого диапазона определяющих параметров задачи минимум реализуется конфигурация, не содержащая такого участка, т.е. что точки f и g обычно совпадают.

Пусть p — давление; ρ — плотность; u и v — проекции вектора скорости на оси x и y ; a — скорость звука; $\theta = \text{arctg}(v/u)$ — угол, образуемый вектором скорости s с осью x ; $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ и $l = \sqrt{M^2 - 1}$, где число Маха $M = w/a$. В качестве независимых переменных возьмем x и функцию точки ψ , определяемую уравнением

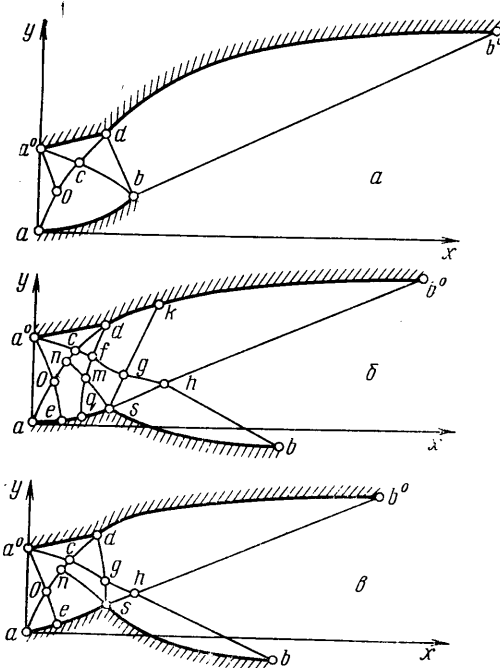
$$d\psi = \rho(-vdx + udy)$$

и условием $\psi = 0$ на нижней стенке. Ограничимся изэнтропическим и изэнергетическим случаем. При этом в переменных $x\psi$ уравнения течения идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа записываются в форме

$$(1.1) \quad L_1 \equiv \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \psi} = 0,$$

$$L_2 \equiv \frac{\partial(\rho u)^{-1}}{\partial x} - \frac{\partial(v/u)}{\partial \psi} = 0$$

Данная запись справедлива при $u \neq 0$, что в дальнейшем предполагается. При $M > 1$ система (1.1) имеет два семейства действительных характеристик, на ко-



Фиг. 1

торых система (1.1) имеет два семейства действительных характеристик, на ко-

$$(1.2) \quad \theta \mp h(M) = \text{const}, \quad h(M) = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \text{arctg} \left(\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} l \right) - \text{arctg} l$$

Здесь и далее верхний (нижний) знак соответствует характеристикам первого (второго) семейства. Константа в (1.2) в общем случае различна на разных характеристиках (в том числе на характеристиках одного семейства). Направления характеристик соответствующих семейств в плоскости $x\psi$ определяются равенствами

$$(1.3) \quad \dot{x} = \pm [\cos(\theta \pm \alpha)] / \rho a$$

Здесь и ниже точкой обозначена полная производная по ψ вдоль характеристики; $\alpha = \text{arcsin}(1/M)$ — угол Маха. Как следует из (1.2) и (1.3) и того, что $\theta = 0$ и $M = M_1$ на характеристиках ao и $a^{\circ}o$ и $\theta = 0$ и $M = M_2$ на характеристиках hb и hb° , в областях, примыкающих к указанным характеристикам, реализуются течения типа простых волн, а в треугольнике

$a^\circ cd$ параметры потока постоянны, причем

$$\theta_c = [h(M_2) - h(M_1)]/2, \quad h(M_c) = [h(M_2) + h(M_1)]/2$$

В силу этого интенсивность веера волн разрежения, образующегося при обтекании излома в точке a° , и положение точек c и d известны заранее и не изменяются при варьировании участка db° верхнего контура и всего нижнего контура. Необходимость существования излома в точке s и возможность веера волн сжатия, фокусирующихся в точке d , применительно к рассматриваемой задаче показаны в [1]. Интенсивности вееров сжатия adq или ads и разрежения ksb° или dsb° заранее неизвестны (в частности, они могут быть и нулевыми).

Так как параметры в точке h известны ($\theta_h=0, M_h=M_2$), то в силу (1.2) θ на ch и на sh — известные функции модуля скорости w . Учитывая, что ρ, a и α — известные функции w во всем потоке, соответствующие связи (1.3) запишем в форме

$$(1.4) \quad L_3 \equiv \dot{x} - Z(w) = 0 \text{ на } sh, \quad L_4 \equiv \dot{x} - R(w) = 0 \text{ на } ch \\ Z(w) = \cos(\theta + \alpha)/\rho a, \quad R(w) = -\cos(\theta - \alpha)/\rho a$$

Здесь $\theta(w) = h[M(w)] - h(M_2)$ на ch и $\theta(w) = h(M_2) - h[M(w)]$ на sh . В аналогичной форме на характеристиках sh и ch записываются уравнения, определяющие y

$$(1.5) \quad \dot{y} - Z^\circ(w) = 0 \text{ на } sh, \quad Z^\circ(w) = \sin(\theta + \alpha)/\rho a \\ \dot{y} - R^\circ(w) = 0 \text{ на } ch, \quad R^\circ(w) = -\sin(\theta - \alpha)/\rho a$$

На поверхности тела выполняется условие непротекания: $\partial y / \partial x = v/u$. Отсюда и из (1.5) нетрудно получить следующее «изопериметрическое условие»

$$(1.6) \quad y_a - y_c + \int_0^{x_b} \frac{v}{u} dx + \int_0^{\psi_h} Z^\circ(w) d\psi + \int_{\psi_h}^{\psi_c} R^\circ(w) d\psi = 0$$

Можно показать, что при фиксированных M_1, M_2 и κ конфигурация, изображенная на фиг. 1, б, полностью определится заданием ψ_f и ψ_g — значений функции тока в точках f и g и распределения $w = w(\psi)$ на отрезках cf и fg характеристики $a^\circ b$. В соответствии с этим константы ψ_f и ψ_g и функцию $w = w(\psi)$ при $\psi_g \leq \psi \leq \psi_c$ будем считать управлениями рассматриваемой задачи. Для исследуемых сопел на cf функция $w(\psi) = W(\psi)$ известна и отвечает вееру волн сжатия с фокусом в точке d . Поэтому, как показано в [1], допустимые вариации w на cf неотрицательны.

Наконец, длины верхнего и нижнего контуров с учетом того, что $\theta = 0$ и $w = w_2 = w(M_2)$ на hb° и на hb , можно в согласии с (1.4) представить в форме

$$(1.7) \quad x_{b^\circ} = x_h + (\psi_h - \psi_{a^\circ}) R(w_2), \quad x_b = x_h - \psi_h R(w_2)$$

Сформулируем вариационную задачу. Пусть заданы значения M_1, M_2, κ и x_b и известна функция $W(\psi)$, дающая распределение $w(\psi)$ на cf для веера волн сжатия с фокусом в точке d . Требуется выбрать управления, т. е. функцию $w(\psi) \geq W(\psi)$ и значения констант ψ_f и ψ_g , определяющих «протяженности» веера волн сжатия и участка двустороннего экстремума fg , которые реализуют минимум функционала $I^\circ = x_{b^\circ}$ при следующих дополнительных условиях. В области $achsa$ выполняются уравнения (1.1), на характеристиках ch и sh — соответствующие условия из (1.2) и (1.4)

и, кроме того, должны удовлетворяться два изопериметрических условия: (1.6) и второе условие из (1.7). Уравнения (1.5) в формулировку задачи не включаются ввиду того, что функции $y=y(\psi)$ на sh и ch не входят в прочие условия и соотношения, фигурирующие в задаче. Действительно можно показать, что включение в задачу «изопериметрического условия» (1.6) также излишне и не влияет на ее решение, так как оно удовлетворяется для любых управлений. Наконец, в силу изопериметрического условия из (1.7) приращения x_h и ψ_h связаны равенством $\Delta x_h = R_2 \Delta \psi_h$. Из этого равенства следует, в частности, что вариация δx_h в точке h на характеристике ch равна нулю (подчеркнем, что вариации δx_h на характеристиках ch и sh в общем случае не совпадают). В согласии со сказанным вспомогательный функционал I возьмем в форме

$$I = I^\circ - \iint_{achsa} (\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2) d\psi dx + \int_s^h \gamma L_3 d\psi + \int_h^c \lambda L_4 d\psi$$

Здесь I° дается (1.7), а $\mu_i(x, \psi)$, $\gamma(\psi)$ и $\lambda(\psi)$ — множители Лагранжа. Вариации I и I° при любом допустимом варьировании совпадают.

В функционал I° не включены конечные соотношения $p=p(w)$ и $\rho=\rho(w)$, имеющие место во всем потоке, и (1.2), выполняющиеся на характеристиках ch и sh . При вычислении вариации $\delta I^\circ = \delta I$ все эти соотношения, как и изопериметрическое условие из (1.7), удобнее использовать непосредственно, т. е. для исключения вариаций p и ρ всюду в области $achsa$ и на ее границах и вариаций u и v на ch и sh . Не вдаваясь в соответствующие детали, которые наиболее близки к описанным в [3], перейдем к окончательным результатам.

Выбор множителей μ_1 , μ_2 , γ и λ позволяет при любых (в том числе и при неоптимальных) управлениях обратить в выражении для $\delta I^\circ = \delta I$ в нули коэффициенты перед всеми вариациями, кроме вариаций управлений. Соответствующий выбор осуществляется в процессе решения так называемой «сопряженной» задачи, которая формулируется следующим образом.

В области $achsa$ множители μ_1 и μ_2 должны удовлетворять системе

$$(1.8) \quad \rho u \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} - \frac{u^2 - a^2}{\rho u^2 a^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \frac{v}{u^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \psi} = 0$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial x} - \rho v \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} + \frac{uv}{\rho u^2 a^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \frac{1}{u} \frac{\partial \mu_2}{\partial \psi} = 0$$

При $M > 1$ эта система является системой гиперболического типа и имеет те же характеристики, что и система (1.1). На характеристиках выполняются соотношения

$$(1.9) \quad \dot{\mu}_1 \mp (l/\rho u^2) \dot{\mu}_2 = 0$$

Граничные условия на sh и gh для определения μ_1 и μ_2 в веере волн разрежения gsh вместе с уравнениями и условиями для определения $\gamma(\psi)$ на sh и $\lambda(\psi)$ на gh получаются из рассмотрения коэффициентов при вариациях w и x на указанных характеристиках и при приращениях x_h и x_s имеют вид

$$(1.10) \quad 2lu\dot{\gamma} + Z'\rho w^2 \dot{w}\gamma = 0, \quad Z'w\gamma + 2lu(\mu_1 + \mu_2 l/\rho u^2) = 0 \text{ на } sh$$

$$2lu\dot{\lambda} - R'\rho w^2 \dot{w}\lambda = 0, \quad R'w\lambda - 2lu(\mu_1 - \mu_2 l/\rho u^2) = 0 \text{ на } hg$$

$$\int_{p_*}^{p-} (\mu_1 - \mu_2 l/\rho u^2) dp - \gamma_s = 0, \quad \gamma_h = -1$$

Здесь $Z' = dZ/dw$, $R' = dR/dw$, а индексы минус (плюс) у p приписаны значениям p до (после) точки излома в s .

Анализ условий (1.10) вместе с соотношениями (1.9), которые эквивалентны (с учетом уравнений $L_3=0$ и $L_4=0$, выполняющихся не только на sh и ch , но и на всех характеристиках соответствующих семейств) системе (1.8), показывает, что для известного течения в gsh они однозначно определяют μ_1 и μ_2 в gsh , γ на sh и λ на hg . Заметим, кстати, что при заданном течении для нахождения указанных множителей достаточно двух итераций. Это есть следствие линейности и однородности соответствующих уравнений и условий.

Условия для μ_1 и μ_2 на контуре as получаются приравнением нулю коэффициентов при вариациях u и v на as и имеют вид $\mu_1 = \mu_2 = 0$ на as . Отсюда и из (1.9) следует, что $\mu_1 = \mu_2 = 0$ всюду в треугольнике ans . В согласии со сказанным выше μ_1 и μ_2 справа от характеристики sg определяются условиями (1.10) и при подходе к точке s , вообще говоря, не равны нулю. Это приводит к тому, что множители μ_i будут разрывными, причем в общем случае линиями их разрыва будут обе характеристики sg и sn . Заметим, что в задачах, рассматривавшихся ранее (см., например, [3, 5-12]), на левой граничной характеристике веера волн разрежения множители Лагранжа непрерывны.

Условия на характеристиках, являющихся линиями разрыва множителей Лагранжа, получаются так же, как в [5]. С учетом сказанного из этих условий следует, что

$$(1.11) \quad \mu_1 - \mu_2 l / \rho u^2 = 0 \text{ на } sn, [\mu_1 + \mu_2 l / \rho u^2] = 0 \text{ на } sg$$

Здесь [] разность значений комбинаций, стоящих в скобках, с двух сторон от линии разрыва, а первое равенство записано справа от sn .

Равенства (1.11) вместе с (1.9) определяют μ_1 и μ_2 справа от sn и слева от sg . Это и уравнения (1.9) позволяют для известного поля течения найти μ_1 и μ_2 всюду в четырехугольнике $pcgs$, в том числе на характеристике cg .

Уравнение для определения множителя λ на cg получается приравнением нулю коэффициента при вариации x на cg и имеет вид

$$(1.12) \quad \dot{\lambda} - \rho w \dot{w} (\mu_1 - \mu_2 l / \rho u^2) = 0 \text{ на } cg$$

Данное уравнение вместе с требованием непрерывности λ в точке g , которое есть следствие приравнения нулю коэффициента при δx_g , для известных μ_1 и μ_2 позволяет определить λ на cg . Этим завершается решение сопряженной задачи. В итоге выражение для δI° принимает вид

$$(1.13) \quad \delta I^\circ = \delta I = \int_g^c \left\{ \frac{2lu}{w} \left(\mu_1 - \mu_2 \frac{l}{\rho u^2} \right) - \lambda R' \right\} \delta w d\psi$$

Заметим, что приращения ψ_f и ψ_g в δI° не входят.

На fg допустимые вариации δw произвольны, а на cf неотрицательны. Отсюда ясно, что необходимое условие оптимальности (минимума I°) имеет вид

$$(1.14) \quad 2lu(\mu_1 - \mu_2 l / \rho u^2) - \lambda w R' \geq 0$$

причем знак равенства имеет место на fg , а «больше или равно» — на cf .

Из (1.12) и (1.14) при знаке равенства вытекают второе и третье равенства из (1.10). Это означает, что, если характеристики qd и sk не совпадают, т. е. имеется участок двустороннего экстремума fg , то входящая в (1.14) комбинация множителей μ_1 и μ_2 в точке g непрерывна. Это и вто-

рое равенство из (1.11) означает, что в этом (и только в этом) случае μ_1 и μ_2 в g непрерывны, а, следовательно, в согласии с известными свойствами разрывов множителей Лагранжа [5] они непрерывны всюду на sg . В этом случае остается одна линия разрыва μ_1 и μ_2 — характеристика sn . Если же участок двустороннего экстремума отсутствует, то разрыв μ_1 и μ_2 будет иметь место как на sn , так и на характеристике sg , совпадающей в этом случае с gf .

Покажем сначала, что, если решение задачи содержит участок двустороннего экстремума, то условию оптимальности (1.14) на fg удовлетворяет $w(\psi) \equiv w_f$. Действительно, при этом на характеристике fg постоянны все параметры и, следовательно, сама она прямолинейна, а в четырехугольнике $fgsq$, а тем более в $dqsk$ реализуется течение типа простой волны с прямолинейными характеристиками второго семейства. Далее можно показать, что на тех же характеристиках постоянны μ_1 и μ_2 , а в силу (1.12) на fg имеем $\lambda \equiv \lambda_g$. Таким образом, условие оптимальности сводится к выбору такой протяженности веера волн сжатия и длины участка fg , т. е. значений ψ_f и ψ_g , при которых равенство (1.14) выполнялось хотя бы в одной точке f . При этом интенсивность веера волн разрежения при известных M_1 , M_2 , κ и x_b определится однозначно, а равенство (1.14) всюду на fg будет выполняться автоматически. Естественно, что при этом необходимо проверить выполнение неравенства (1.14) на cf . Заметим, что в другой задаче решение подобного типа было построено в [11].

Если $\psi_b \rightarrow 0$, а участок двустороннего экстремума (fb , так как при этом точки g , h и s стягиваются к точке b) сохраняется, то можно показать, что из (1.14) следует равенство $R' = 0$ на fb . Ранее методом контрольного контура это условие на fb было установлено в [1].

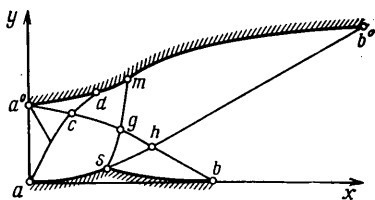
Если участок двустороннего экстремума на ch отсутствует, то, как уже отмечалось, характеристика sg будет линией разрыва множителей μ_i . Оптимальная конфигурация для этого случая изображена на фиг. 1, *в*. С использованием метода характеристик было выполнено построение большого числа сопл такого типа. Построенные сопла характеризовались следующими сочетаниями чисел M_1 , M_2 и κ : 1.435, 4, 1.4; 3, 6, 1.4; 3, 8, 1.4; 1.435, 4, 1.26; 3, 6, 1.26; 3, 8, 1.26 и всевозможными длинами x_b нижней стенки из диапазона $X_- \leq x_b \leq x_*$. Множители Лагранжа для рассмотренных случаев в треугольнике gsh и слева от характеристики sg определялись затем из решения описанной выше сопряженной задачи. Во всех рассчитанных примерах характеристика sg была линией разрыва μ_1 и μ_2 , а левая часть условия (1.14) слева от точки g была положительна. Таким образом, можно полагать, что конфигурации, не содержащие участка двустороннего экстремума, дают типичное решение рассмотренной вариационной задачи. Отметим, что задание ординаты, а не абсциссы концевой точки нижней стенки лишь незначительно изменяет некоторые из полученных выше соотношений.

2. Как было показано выше и в [1], центрированная волна сжатия является существенным элементом оптимальных несимметричных сопл. В тех случаях, когда она нежелательна или недопустима (например, из-за возможного отрыва пограничного слоя), в постановку задачи необходимо включить соответствующие ограничения. В [4] таким ограничением было условие невозрастания давления вдоль верхнего контура. В общем случае дополнительное условие подобного типа ведет к замене центрированной волны сжатия на волну конечной положительной, нулевой или «отрицательной» интенсивности. При этом интенсивность волны будем характеризовать величиной $p' \equiv dp/d\tau$, где p отнесено к давлению при $x=0$, а дуга τ , отсчитываемая вдоль верхнего контура, отнесена к y_* . Интересно выяснить, как ограничение интенсивности волн сжатия сказывается (при прочих равных условиях) на тяге сопла.

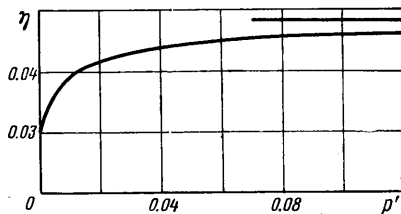
С этой целью рассмотрим класс плоских сопл, которые получают укорочением до длины X сопла, изображенного на фиг. 2. Для этого сопла потоки на входе и выходе равномерные и горизонтальные с числами Маха $M_1 > 1$ и $M_2 > M_1$, ордината кон-

цевой точки b нулевая, а $x_b < X < x_{b^0}$. Условие $y_b = 0$ позволяет рассматривать данные сопла в качестве половинок симметричных сопел с замкнутыми центральными телами. Волна сжатия $adms$ определяется для исследуемых сопел заданием постоянного значения p' вдоль отрезка dm верхнего контура, причем $p' = \infty$ отвечает центрированной волне, как на фиг. 1, a и e , а $p' = 0$ — случаю, исследованному в [4].

Зададимся значениями κ , M_1 и X , а также внешним «противодавлением» p^+ — давлением окружающей среды, в которую происходит истечение. В качестве M_2 возьмем число Маха на выходе из такого плоского сопла с горизонтальной нижней стен-



Фиг. 2



Фиг. 3

кой ($y=0$ на ab) и равномерным потоком на bb^0 , укорочение которого до длины X обеспечивает при заданном p^+ максимальную тягу в классе сопел этого типа. Известно [13, 14], что указанное сопло (или симметричное плоское сопло) определяется так называемым «условием Буземана», записанным в конечной точке b^0 оптимального контура.

Под тягой сопла будем понимать разность горизонтальной проекции интегралов сил давления по нижнему и верхнему контурам и произведения $p^+ y_{bb^0}$. Пусть $\chi = \chi(\kappa, M_1, M_2, p', p^+, X)$ — тяга сопла, полученного в результате укорочения до длины X сопла, изображенного на фиг. 2, а $\chi^0 = \chi^0(\kappa, M_1, p^+, X)$ — тяга оптимального сопла с горизонтальной нижней стенкой. Напомним, что в силу сказанного выше $M_2 = M_2(\kappa, M_1, p^+, X)$. Относительный выигрыш тяги будем характеризовать коэффициентом $\eta = (\chi - \chi^0) / \chi^0$.

Типичные результаты сравнения несимметричных сопел исследуемого типа с плоским соплом, имеющим горизонтальную нижнюю стенку, представлены на фиг. 3. В данном примере $\kappa = 1.12$, $M_1 = 3$, $p^+ = 0$ и $X = 70 y_{a^0}$. Число Маха M_2 при этом оказалось равным 4.95. На фиг. 3 нанесена зависимость η от p' , а горизонтальный отрезок дает значение η при $p' = \infty$. Видно, что замена центрированной волны на волну сжатия умеренной интенсивности ($p' \geq 0.05$) незначительно уменьшает выигрыш тяги. В то же время переход от $p' = 0$ к сжатию сравнительно малой интенсивности вызывает быстрый рост этого выигрыша.

Автор признателен А. Н. Крайко за ценные советы и постоянное внимание.

Поступила 22 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Рылов А. И. Решение вариационной задачи о профилировании сопла, реализующего равномерный сверхзвуковой поток. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
2. Гудерлей К. Г., Армийедж Д. В. Общий метод построения оптимальных ракетных сопел. В кн. «Теория оптимальных аэродинамических форм». М., «Мир», 1969.
3. Крайко А. Н. К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
4. Рылов А. И. К анализу некоторых сверхзвуковых несимметричных сопел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 3.
5. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
6. Борисов В. М. О системе тел с минимальным волновым сопротивлением. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6.
7. Шипилин А. В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
8. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
9. Осипов А. А. К решению вариационных задач газовой динамики сверхзвуковых неравновесных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
10. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Решение вариационной задачи о построении контура составного сопла. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.

11. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. К построению контура минимального волнового сопротивления в неоднородном сверхзвуковом потоке. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
12. Зубов В. И. Об оптимальном сверхзвуковом профиле заданного утолщения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 1.
13. Guderley G., Hantsch E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Z. Flugwiss., 1955, Bd3, Nr9. (Рус. перев.: Наилучшие формы сверхзвуковых осесимметричных реактивных сопел. Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1956, № 4.)
14. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1963.