

**О СТРУКТУРЕ ДИФФУЗИОННОГО СЛЕДА ПОГЛОЩАЮЩЕЙ  
ЧАСТИЦЫ ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКИХ ЛИНИЙ**

**А. Д. ПОЛЯНИН**

(Москва)

В задачах о расчете массообмена частиц с потоком весьма важна оценка возмущающего влияния поглощающей частицы на первоначально однородное поле концентрации в потоке. Это влияние существенно зависит от распределения скоростей обтекания. Для частицы, находящейся в однородном поступательном потоке и других потоках с изолированными критическими точками, соответствующий анализ был выполнен ранее [1-3]<sup>1</sup>.

В данной работе исследовано поле концентрации вблизи поглощающей частицы, обтекание которой характеризуется наличием критических линий (например, обтекание частицы однородным поступательно-сдвиговым потоком [4]).

Методом сращиваемых асимптотических разложений (по большому числу Пекле  $P$ ) получено распределение концентрации и диффузионный поток к поверхности поглощающей частицы вблизи критической линии вытекания (линия, в окрестности которой нормальная компонента скорости жидкости направлена от поверхности), например граница области замкнутой циркуляции на теле. Рассмотрен случай плоского и осесимметричного обтекания частицы ламинарным потоком вязкой несжимаемой жидкости.

Показано резкое отличие распределения концентрации и структуры диффузионного следа при наличии изолированной критической точки [1-3] и критической линии. При этом в случае критической линии все изменение концентрации в следе происходит на расстояниях порядка  $P^{-1/2}$ , (в случае критической точки на расстояниях порядка  $P^{1/2}$ ).

1. В системе координат, связанной с частицей, запишем уравнение стационарной конвективной диффузии и граничные условия в предположении полного поглощения диффундирующего вещества на поверхности частицы и постоянства концентрации вдали от нее

$$(1.1) \quad v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = \varepsilon^3 \left\{ \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 c}{\partial \theta^2} + \frac{k-1}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial c}{\partial \theta} \right\}$$

$$c|_{r=R(\theta)}=0, \quad c|_{r \rightarrow \infty}=1 \quad (P=\varepsilon^{-3}=aU/D)$$

$$v_r = [r \sin \theta]^{1-k} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -[r \sin \theta]^{1-k} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Здесь  $k=1$  ( $k=2$ ) соответствует плоскому (осесимметричному) случаю;  $r, \theta$  — цилиндрическая (сферическая) система координат, где угол  $\theta$  отсчитывается от рассматриваемой линии вытекания (от любой изолированной критической точки на поверхности тела);  $c$  — безразмерная концентрация;  $a$  — характерный размер частицы;  $U$  — характерная скорость потока;  $D$  — коэффициент диффузии;  $r=R(\theta)$  — уравнение поверхности тела.

<sup>1</sup> В работе [2] допущена опечатка: первое выражение в формуле (3) следует читать

$$c^{(2)} \rightarrow \sqrt{\varepsilon(r-1)} f(s\sqrt{r-1}), \quad r \rightarrow 1.$$

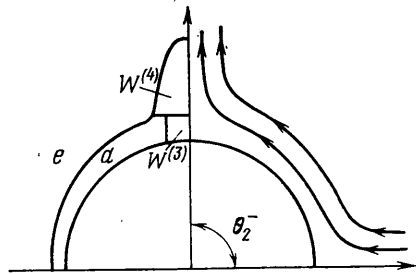
Функция тока  $\psi$  предполагается известной из решения соответствующей задачи о гидродинамическом обтекании. В дальнейшем для упрощения рассуждений считаем, что критическая линия является соответственно осью симметрии в плоском и плоскостью симметрии ( $\theta = \pi/2$ ) в осесимметричном случаях. Это имеет место, например, для случаев Стокса обтекания кругового цилиндра однородно-поступательным ( $k=1$ ) и сферической частицы чисто сдвиговым потоком [4].

Вблизи поверхности частицы функция тока обладает свойствами

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \psi(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow R(\theta)} &\rightarrow (r - R(\theta))^2 f(\theta), \quad f(\theta) = 1/2 [\partial^2 \psi / \partial r^2]_{r=R(\theta)} \\ f(\theta) \Big|_{\theta \rightarrow \theta_k^-} &\rightarrow A/2 (\theta - \theta_k^-), \quad A = [\partial^3 \psi / \partial r^2 \partial \theta]_{r=1, \theta \rightarrow \theta_k} \\ &(\theta \geq \theta_k^-, A > 0) \end{aligned}$$

Здесь угол  $\theta_k^-$  ( $\theta_1^- = 0, \theta_2^- = \pi/2$ ) определяет критическую линию поверхности частицы, первое свойство следует из условия прилипания на поверхности частицы, второе — из определения линии вытекания и выбора начала отсчета для угла  $\theta$ ; считается, что в качестве характерного размера частицы выбирается расстояние от начала системы координат до линии вытекания, т. е.  $R(\theta_k^-) = 1$ .

Известно, что распределение концентрации вблизи поверхности частицы (при  $\epsilon \rightarrow 0$ ) задается решением диффузионного погранслоя [5], которое вблизи траекторий вытекания становится непригодным. Поэтому анализ задачи (1), (2) в области  $\theta - \theta_k^- \sim \epsilon$  требует дополнительного исследования.



Диффузионный след частицы  $W$ , порожденный изолированной особой точкой  $\theta_k^- = 0$  ( $k=2$ ), рассмотрен в [1-3], где было показано, что он состоит из четырех областей: конвективно-погранслоевой  $W^{(1)}$ , внутренней  $W^{(2)}$ , области задней критической точки  $W^{(3)}$  и области смещения  $W^{(4)}$ . При этом концентрация в областях  $W^{(i)}$  ( $i=1-4$ ) и их характерные размеры имеют порядок

$$\begin{aligned} c^{(1)} \sim 1, \quad \epsilon < r-1 < \epsilon^{-1}; \quad c^{(2)} \sim \epsilon^{1/2}, \quad \epsilon < (r-1) < \epsilon^{-1} \\ c^{(3)} \sim \epsilon, \quad r-1 < \epsilon; \quad c^{(4)} \sim 1, \quad \epsilon^{-1} < r-1 \end{aligned}$$

Цель данной работы — изучение структуры диффузионного следа частицы вблизи критических линий ( $\theta \rightarrow \theta_k^-$ ).

2. Асимптотический анализ задачи (1), (2) при  $\epsilon \rightarrow 0$  показывает, что вблизи критических линий ( $\theta \rightarrow \theta_k^-$ ) существуют четыре характерные области с различным механизмом массо(тепло)переноса. Это внешняя область  $e$ , область диффузионного погранслоя  $d$  и диффузионный след  $W$ , состоящий в свою очередь из области задней критической точки  $W^{(3)}$  и области смещения  $W^{(4)}$ . Конвективно-погранслоевая и внутренняя область следа в этом случае отсутствуют. Характерные области с различным механизмом массопереноса для  $k=2$  показаны на фигуре.

Уравнения, описывающие области  $e, d, W^{(3)}$  и  $W^{(4)}$ , получают соответствующей заменой переменных и сохранением главных членов разложения концентрации по степеням  $\epsilon$  в уравнении (1); а граничные условия определяются асимптотическим сращиванием решений на условных границах этих областей.

Во внешней области  $e = \{\varepsilon \ll r - R(\theta), \varepsilon \ll \theta - \theta_k^-\}$ , здесь и в дальнейшем выражение в фигурных скобках указывает порядок характерных размеров рассматриваемой области, диффузионным членом уравнения (1) можно пренебречь по сравнению с конвективным. Поэтому концентрация в  $e$  зависит лишь от функции тока  $\psi$ , а из граничных условий получаем, что она постоянна и равна своему значению на бесконечности, т. е.  $c^{(e)} = 1$ .

Диффузионный погранслои  $d = \{r - R(\theta) \ll \varepsilon, \varepsilon \ll \theta - \theta_k^-\}$ , в котором диффузионным переносом вещества вдоль поверхности тела можно пренебречь по сравнению с нормальным, определяется уравнением [6, 7]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \xi^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) c^{(d)} = 0 \quad \xi = \varepsilon^{-1} |\psi|^{1/2} \\ & c^{(d)}|_{t=0} = 1; \quad c^{(d)}|_{\xi=0} = 0, \quad c^{(d)}|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \\ & t(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_k^+} \sin^{k-1} \tau R^k(\tau) (1 + [R_\tau'/R]^2) f^{1/2}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Здесь функция  $f(\theta)$  определена в (1.2), а  $\theta_k^+$  — ближайший к  $\theta_k^-$  корень уравнения  $f(\theta) = 0$ , определяющий траекторию натекания [5-7].

Решение задачи (2.1) имеет вид [5]

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & c^{(d)}(\xi, t) = \Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3, \xi^3/9t) \\ & \gamma(1/3, x) = \int_0^x e^{-u} u^{-2/3} du, \quad \Gamma(1/3) = \gamma(1/3, \infty) \end{aligned}$$

При  $\theta - \theta_k^- \sim \varepsilon$  важную роль играет диффузионный перенос вещества вдоль поверхности частицы и приближение диффузионного пограничного слоя (2.2) становится непригодным. В этой области находится диффузионный след частицы  $W$ , состоящий из  $W^{(3)}$  и  $W^{(4)}$ .

В области задней критической точки  $W^{(3)} = \{0 \leq r - 1 \ll \varepsilon, \theta - \theta_k^- \ll \varepsilon\}$  необходимо учитывать диффузионный перенос вещества как по нормали, так и по касательной к поверхности тела. Аналогично [8] делаем замену переменных

$$y = \varepsilon^{-1} A^{1/3} (r - 1), \quad x = \varepsilon^{-1} A^{1/3} (\theta - \theta_k^-), \quad A = 2f_\theta'(\theta = \theta_k^-)$$

и получаем из (1), (2) следующие уравнения и граничные условия для  $W^{(3)}$ :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} & \frac{y^2}{2} \frac{\partial c^{(3)}}{\partial y} - yx \frac{\partial c^{(3)}}{\partial x} = \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c^{(3)}}{\partial y^2} \\ & c^{(3)}|_{y=0} = 0, \quad [\partial c^{(3)}/\partial x]_{x=0} = 0 \\ & c^{(3)}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow c^{(d)}|_{\theta \rightarrow \theta_k^-} = 3^{1/3} \Gamma^{-1}(1/3) t_0^{1/3} \xi = \varepsilon^{1/2} T y \sqrt{x} \\ & T = 3^{1/3} [\Gamma(1/3) 2^{1/2} t_0^{1/3}]^{-1}, \quad t_0 = t(\theta = \theta_k^-) \end{aligned}$$

Здесь второе граничное условие определено симметрией задачи, а третье — условием срачивания с погранслоинным решением (2.2). Для завершения формулировки задачи в (2.2) необходимо добавить граничное условие, аналогичное [8], состоящее в том, что при  $y \rightarrow \infty$  членом  $[\partial^2 c^{(3)}/\partial y^2]$  в (2.2) можно пренебречь. Это граничное условие следует из того, что в области смешения  $W^{(4)}$ , прилегающей к области задней критической точки, радиальный перенос несуществен.

В плоском случае ( $k=1$ ) задача (2.2) исследовалась численными методами в работе [8], где для локального числа Шервуда было получено выражение

$$j(x) = \frac{\partial c^{(3)}}{\partial r} \Big|_{r=1} = \varepsilon^{-1/2} A^{1/2} Th(x)$$

$$h(x) = \begin{cases} 0.819, & x=0 \\ x^{1/2} - 0.124x^{-3/2}, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Это выражение может быть использовано при вычислении локального числа Шервуда и в осесимметричном случае. Например, для сферы, находящейся в чисто сдвиговом потоке [4], с характерной скоростью  $\alpha a$ , где  $\alpha$  — коэффициент сдвига,  $a$  — радиус частицы, получаем  $\lambda=0.406$ ,  $T=0.493$ .

Исследуем асимптотическое поведение концентрации в  $W^{(3)}$  при  $y \rightarrow \infty$ . Пренебрегая членом  $\partial^2 c^{(3)} / \partial y^2$ , ищем решение уравнения (2.3) в виде

$$(2.4) \quad c^{(3)} = \varepsilon^{1/2} T y^{3/4} F(\zeta), \quad \zeta = x \sqrt{y} \quad (y \rightarrow \infty)$$

$$F_{\zeta\zeta}'' + \frac{3}{4} \zeta F_{\zeta}' - \frac{3}{4} F = 0$$

$$F_{\zeta}' \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad F \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} \rightarrow \sqrt{\zeta}$$

Заменой  $\zeta^* = -3/8 \zeta^2$  уравнение для  $F$  может быть сведено к вырожденному гипергеометрическому уравнению [9].

Окончательно для  $c^{(3)}$  имеем ( $y \rightarrow \infty$ )

$$(2.5) \quad c^{(3)} = \varepsilon^{1/2} (8/3)^{1/4} \Gamma(3/4) \pi^{-1/2} T y^{3/4} \Phi(-1/4, 1/2, -3/8 y x^2)$$

$$\Phi(a, c, x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

Здесь  $\Phi(a, c, x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция.

В области смещения  $W^{(4)} = \{\psi \ll \varepsilon^2, r-1 \ll \varepsilon^{1/2}\}$  радиальным переносом можно пренебречь по сравнению с тангенциальным. Вводя переменные

$$\eta = 1/6 \varepsilon^{-1} A (r-1)^3, \quad z = \varepsilon^{-2} \psi$$

получаем следующую задачу для распределения концентрации в  $W^{(4)}$ :

$$(2.6) \quad \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) c^{(4)} = 0, \quad c^{(4)} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 1, \quad \frac{\partial c^{(4)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

$$c^{(4)} \Big|_{\eta \rightarrow 0} = [c^{(d)} + c^{(3)}]_{y \rightarrow \infty, \theta \rightarrow \theta_k^-} - 3^{1/2} \Gamma^{-1}(1/3) t_0^{-1/2} z^{1/2}$$

Здесь последнее граничное условие есть условие сращивания решения в области смещения с решениями диффузионного пограничного слоя (2.2) и области задней критической точки (2.5).

Используя [10], можно показать, что решение задачи (2.5) имеет вид

$$(2.7) \quad c^{(4)}(\eta, z) = \mathbf{B}(\eta, z) * [\Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3, z^{3/2}/9t_0) - \alpha z^{1/2}] +$$

$$+ \pi^{-1/2} 2^{1/2} \Gamma(3/4) \alpha \eta^{1/4} \Phi(-1/4, 1/2, -z^2/4\eta), \quad \alpha = 3^{1/2} \Gamma^{-1}(1/3) t_0^{-1/2}$$

$$\mathbf{B}(t, z) * u(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{z^2 + z^{*2}}{4t}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{zz^*}{2t}\right) u(z^*) dz^*$$

3. Из выражений (2.5) и (2.7) видно, что концентрация и характерные размеры областей диффузионного следа  $W^{(3)}$  и  $W^{(4)}$  имеют порядки  $c^{(3)} \sim \epsilon^{1/2}$ ,  $r-1 < \epsilon$ ;  $c^{(4)} \sim 1$ ,  $r-1 < \epsilon^{1/2}$ . Поэтому общая протяженность диффузионного следа в случае критической линии ограничена  $P^{-1/2}$ . Анализ показывает, что для несимметричных полей обтекания тел структура диффузионного следа, порядок концентрации и характерных размеров  $W^{(i)}$  ( $i=3, 4$ ) остаются такими же.

Это говорит о том, что, например, при рассмотрении стационарной конвективной диффузии к системе цилиндров ( $k=1$ ), расположенных на расстояниях  $l_{ij} \gg P^{-1/2}$ , один от другого полный диффузионный поток к каждому из них определяется лишь полем течения вблизи его поверхности.

Случай вязкого обтекания системы частиц ( $k=2$ ), расположенных на оси потока, был рассмотрен в [3], где предполагалось, что области замкнутой циркуляции отсутствуют. Было показано, что полный приток вещества на частицу определяется воздействием порожденных изолированными особыми точками диффузионных следов частиц, расположенных выше по потоку. При этом в стоксовом потоке для цепочки, состоящей из сфер равного радиуса и расположенных на одинаковых расстояниях одна от другой ( $1 \ll l \ll \epsilon^{-1}$ ), полный диффузионный поток на частицу убывал как  $n^{-1/2}$  при  $n \rightarrow \infty$ , где  $n$  — номер частицы, отсчитываемый по потоку.

Эта закономерность остается справедливой при увеличении числа Рейнольдса до тех пор, пока за частицами отсутствуют содержащие стационарный кольцевой вихрь области замкнутой циркуляции, с появлением которых диффузионный след начинает перестраиваться и для достаточно большой области замкнутой циркуляции будет состоять только из областей смешения и задней критической точки. При этом для частиц, достаточно удаленных одна от другой  $l \gg P^{-1/2}$ , влиянием диффузионного следа можно пренебречь и полный диффузионный поток на частицу определяется лишь локальным полем течения вблизи ее поверхности.

Автор благодарит Ю. П. Гупало и Ю. С. Рязанцева за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 15 IX 1976.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Sin P. H., Newman J.* Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow. *J. Heat and Mass Transfer*, 1967, vol. 10, p. 1749–1759.
2. *Полянин А. Д.* Распределение концентрации в диффузионном следе частицы, обтекаемой стоксовым потоком. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1977, № 1.
3. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* О массообмене частиц, расположенных на оси потока при больших числах Пекле. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1977, № 2.
4. *Taylor G. I.* The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. *Proc. Roy. Soc. A.*, 1932, vol. 138, No. 834, p. 41–48.
5. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз 1959.
6. *Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С.* Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой жидкостью. *ПММ*, 1976, т. 40, вып. 5.
7. *Полянин А. Д., Сысков Ю. Н.* Диффузия к цилиндру в случае произвольного обтекания вязкой жидкостью. Приближение диффузионного пограничного слоя. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1976, № 5.
8. *Newman J.* Mass transfer to the rear of a cylinder at high Schmidt numbers. *J. Industr. and Engng Chem. Fundament.*, 1969, vol. 8, No. 3.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.
10. *Sutton W. G. L.* On the equation of diffusion in a turbulent medium. *Proc. Roy. Soc.*, 1943, vol. 182, No. 988.