МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1977

УДК 532.546:532.72

МИГРАЦИЯ СОЛЕЙ ПРИ ПРОМЫВКЕ ПОЧВ С КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫМ ЗАСОЛЕНИЕМ

В. И. ПЕНЬКОВСКИЙ

(Новосибирск)

Рассматривается одномерная задача о промывке почвы с кусочно-однородным начальным засолением в условиях подвижного фронта промачивания. В зависимости от характера засоления и водно-физических свойств почвы на подвижной границе задаются либо значения искомой функции, либо ее производной по пространственной переменной. Решение задачи представляется суперпозицией решений вспомогательной задачи, моделирующей процесс промывки почвы с однородным засолением при наличии верхнего опресненного слоя. Приводится численный пример.

Процесс конвективной диффузии быстрорастворимых солей при промывке почв с подвижной границей промачивания описывается дифференциальным уравнением

$$D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-v\frac{\partial c}{\partial x}=m\frac{\partial c}{\partial t},\qquad 0<x<\frac{vt}{m_1},\qquad t>0 \tag{0.1}$$

где c — концентрация раствора, *г/л* или % веса сухой почвы; x — координата, отсчитываемая от поверхности почвы, *м*; t — время, *сутки*; v — скорость фильтрации, *м/сутки*; $m=m_1+m_2$, $m_1>0$ — подвижная («гравитационная») влажность, $m_2\geqslant 0$ — неподвижная («связанная» со скелетом грунта) начальная влажность грунта. При этом предполагается [1], что в почвах, обладающих большой водоудерживающей способностью ($m_2>0$, $\lambda=m_1/(m_1+m_2)<1$), соли находятся в растворенном состоянии, и внутридиффузионный массообмен между подвижным и неподвижным поровыми растворами протекает гораздо быстрее внешнедиффузионного массообмена между отдельными слоями почвы, а в случае «сухого» грунта ($m_2\approx 0$, $\lambda\approx 1$) кристаллы солей мгновенно переходят в раствор в момент подхода к ним фронта промачивания.

Такая схематизация процесса, накладывая определенные ограничения на применимость данной математической модели, например в случаях сильного засоления почв, позволяет получить замкнутые аналитические решения ряда практически важных задач. Это, в частности, относится к рассматриваемым ниже задачам о промывке почв с кусочно-постоянным начальным засолением.

1. Рассоление почв, обладающих большой водоудерживающей способностью. Согласно принятым предположениям граничные условия для уравнения (0.1) запишем в виде

$$x=0,\quad t>0,\quad c=c_n=\text{const}$$

$$x=vt/m_1,\qquad t>0,\qquad c=c_0+\sum_{j=1}^{k}(c_j-c_{j-1})\,\eta(x-x_{j-1}) \tag{1.1}$$

Здесь c — минерализация промывной воды, подаваемой на дневную поверхность почвы, x_{j-1} ($j=1, 2,\ldots, k$) — точки скачкообразного изменения начальной минерализации, связанного с почвой раствора, $\eta(x)$ — единичная функция Хэвисайда ($\eta=0$ при $x<0$, $\eta=1$ при $x>0$).

Вводя функцию $u=c-c_n$ и безразмерные независимые переменные $\xi=vx/D$, $\tau=v^2t/(m_1D)$, приходим к следующей формулировке задачи:

$$0<\xi<\tau,\quad \tau>0,\quad \lambda(u_{\xi\xi}-u_\xi)=u_\tau \tag{1.2}$$

$$\xi=0,\ \tau>0,\ u=0;\ \xi=\tau,\ \tau>0,\ u=u_0+\sum_{j=1}^{k}(u_j-u_{j-1})\,\eta(\tau-\tau_{j-1}) \tag{1.3}$$

$$u_j=c_j-c_n,\ \tau_j=\xi_j=vx_j/D,\ \lambda=m_1/(m_1+m_2)$$

Здесь нельзя непосредственно воспользоваться методом продолжения, предложенным в работе [1], поскольку в условии при $\xi=\tau$ граничная функция разрывна в точках $\tau=\tau_{j-1}$. Адаптация метода достигается следующим образом.

Пусть $u(\xi, \tau; s_0)$ — решение задачи

$$
(1.4)\qquad \begin{aligned} &0<\xi<\tau+s_0,\ \tau>0,\ \lambda(u_{\xi\xi}-u_\xi)=u_\tau;\ \xi=0,\ \tau>0,\ u=0\\ &0<\xi<s_0,\ \ \tau=0,\ u=0;\ \xi=\tau+s_0,\ \tau>0,\ u=1\end{aligned}
$$

Тогда функция $u(\xi, \tau-s_0; s_0)\eta(\tau-s_0)$ удовлетворяет уравнению (1.2) в области $\tau>s_0$, $0<\xi<\tau$ и краевым условиям

$$
\begin{aligned} &\tau>s_0,\ \xi=0,\ u=0;\ \tau=s_0,\ 0<\xi<s_0,\ u=0\\ &\tau>s_0,\ \xi=\tau,\ u=1\end{aligned}
$$

При $0<\tau<s_0$, $0<\xi<\tau$ будем считать ее тождественно равной нулю. Кроме того, как показано в [1], функция

$$
v(\xi,\tau)=\exp\left(\frac{\xi}{2}-\lambda\frac{\tau}{4}\right)\int\limits_0 G(\xi,s;\tau,\lambda)\operatorname{ch}\varkappa s\operatorname{sh}^{-1}\frac{s}{2\lambda}ds
$$

$$
G(\xi,s;\tau,\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\lambda\tau}}\left\{\exp\left[-\frac{(\xi-s)^2}{4\lambda\tau}\right]-\exp\left[-\frac{(\xi+s)^2}{4\lambda\tau}\right]\right\},\quad \varkappa=\frac{1-\lambda}{2\lambda}
$$

удовлетворяет уравнению (1.2) и краевым условиям

$$
\xi=0,\ v=0;\ \xi=\tau,\ v=1
$$

Нетрудно заметить, что решение $u(\xi, \tau)$ исходной задачи (1.2), (1.3) представляется в виде

$$
(1.5)\qquad u(\xi,\tau)=u_0v(\xi,\tau)+\sum_{j=1}^{k}(u_j-u_{j-1})u(\xi,\tau-\tau_{j-1},\tau_{j-1})\eta(\tau-\tau_{j-1})
$$

Функцию $u(\xi, \tau; s_0)$ как решение вспомогательной задачи (1.4), моделирующей процесс конвективной диффузии солей в толще грунта с опресненным верхним слоем мощности $x_0=s_0D/v$, представим в виде

$$
(1.6)\qquad u(\xi,\tau;s_0)=\exp\left(\frac{\xi}{2}-\frac{\lambda\tau}{4}\right)\int\limits_{s_0}^{\infty}\rho(s,s_0)G(\xi,s;\tau,\lambda)ds
$$

Для нахождения предельного значения $\rho(s, s_0)=\lim u(\xi, \tau; s_0)$ при $\tau\to0$, $s_0<s<\infty$ получаем следующее интегральное уравнение:

$$
(1.7)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi\lambda\tau}}\int\limits_{s_0}^{\infty}\rho(s,s_0)\left\{\exp\left[\frac{s}{2\lambda}-\frac{(s-s_0)^2}{4\lambda\tau}\right]-\right.\\ &\left.-\exp\left[-\frac{s}{2\lambda}-\frac{(s+s_0)^2}{4\lambda\tau}\right]\right\}ds=2\exp(\varkappa s_0+\gamma\tau)\\ &(\gamma=(1-\lambda)^2/(4\lambda))\end{aligned}
$$

Обозначим через

$$
L_p(f)=\int\limits_0^{\infty}f(x)e^{-px}dx
$$

операцию преобразования Лапласа. Применяя ее к обеим частям уравнения (1.7), получим

$$\int\limits_{s_0}^{\infty}\rho(s,s_0)\left\{\exp\left[\frac{s}{2\lambda}-(s-s_0)\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{s}{2\lambda}-(s+s_0)\sqrt{\frac{p}{\lambda}}\right]\right\}ds=2e^{\varkappa s_0}\frac{\sqrt{\lambda p}}{p-\gamma}$$

После замены переменной $z=s-s_0$ и некоторых элементарных преобразований последнее соотношение приводится к виду

$$\exp\frac{s_0}{2\lambda}L_p\left[R(z,s_0)\exp\frac{z}{2\lambda}\right]-$$

$$-\exp\left(-\frac{s_0}{2\lambda}\right)L_p\left[R(z,s_0)\exp\left(-\frac{z}{2\lambda}\right)\right]\exp(-2s_0p)=$$

$$=2\exp(\varkappa s_0)L_p(\operatorname{ch}\varkappa z)\qquad (R(z,s_0)=\rho(s_0+z,s_0))$$

Возвращаясь к оригиналам, с учетом теоремы запаздывания [2] получим функциональное уравнение

$$\exp\frac{s_0}{2\lambda}R(z,s_0)\exp\frac{z}{2\lambda}-\exp\left(-\frac{s_0}{2\lambda}\right)R(z-2s_0,s_0)\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{z-2s_0}{2\lambda}\right)\eta(z-2s_0)=2\exp(\varkappa s_0)\operatorname{ch}\varkappa z \tag{1.8}$$

Пусть $R_k(z, s_0)$ $(k=0, 1, 2,\ldots)$ — значение искомой функции $R(z, s_0)$ при $2s_0k<z<2s_0(k+1)$. Тогда, применяя метод полной индукции, легко показать, что решение уравнения (1.8) имеет вид

$$R_k(z,s_0)=\exp\left(-\frac{s_0}{2}\right)\sum_{n=0}^{k}\exp\left(\frac{n^2s_0}{\lambda}\right)\left\{\exp\left[-ns_0\frac{1-\lambda}{\lambda}-\alpha_1(n)z\right]+\right.$$
$$\left.+\exp\left[ns_0\frac{1-\lambda}{\lambda}-\alpha_2(n)z\right]\right\} \tag{1.9}$$

$$(\alpha_1(n)=(n+\lambda/2)\lambda^{-1},\ \alpha_2(n)=(n+1-\lambda/2)\lambda^{-1})$$

Подстановкой (1.9) в (1.6) получим решение вспомогательной задачи (1.4)

$$u(\xi,\tau;s_0)=\frac{1}{2}\exp\left(\frac{\xi-s_0}{2}-\frac{\lambda\tau}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}\exp\left(\frac{n^2s_0}{\lambda}\right)\times$$
$$\times\left\{\exp\left(-ns_0\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)[J_k(\alpha_1,s_0-\xi)-J_k(\alpha_1,s_0+\xi)]+\right.$$
$$\left.+\exp\left(ns_0\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)[J_k(\alpha_2,s_0-\xi)-J_k(\alpha_2,s_0+\xi)]\right\} \tag{1.10}$$
$$J_k(\alpha,\beta)=\exp(\alpha^2\lambda\tau+\alpha\beta)\left[\operatorname{erf}\frac{2s_0(k+1)+\beta+2\alpha\lambda\tau}{2\sqrt{\lambda\tau}}-\right.$$
$$\left.-\operatorname{erf}\frac{2s_0k+\beta+2\alpha\lambda\tau}{2\sqrt{\lambda\tau}}\right]$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\, dt$$

Из асимптотического поведения функции $\operatorname{erf} x$ при больших значениях аргумента следует, что в любой внутренней точке области $\tau>0$, $0<\xi<\tau+ +s_0$ из двух записанных ниже рядов первые сходятся быстрее

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \exp\left[n^2 \frac{s_0}{\lambda} \pm n s_0 \frac{1-\lambda}{\lambda}\right] J_k(\alpha_{2,1}, s_0 \pm \xi), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \exp\left(-s_0 \frac{nk}{\lambda}\right)$$

Так, например, при $ds_0>5$, где $d=\min[1;\ 2(1/\lambda-1)]$, в разложении (1.10) достаточно учесть лишь члены с $n=0$ ($\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=1/\lambda-0.5$). Для рассматриваемых порядков величины s_0 получим простую формулу

$$u(\xi, \tau, s_0) = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf} \frac{s_0-\xi+\lambda\tau}{2\sqrt{\lambda\tau}}\right) + \tag{1.11}$$

$$+{}^1/{}_2 \operatorname{erf}\left[\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)(\tau+s_0-\xi)\right](1-\operatorname{erf} z_1) + O[\exp(-ds_0)]$$

$$\left(z_1 = \frac{s_0-\xi}{2\sqrt{\lambda\tau}} + \left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\lambda\tau}\right)$$

2. Промывка «сухого» грунта с мгновенным растворением солей. В этом случае $m_1=m$, $m_2=0$, $\lambda=1$ и на подвижной границе промачивания задается краевое условие второго рода

$$\xi=0,\ \tau>0,\ u=0$$

$$\xi=\tau, \quad \tau>0, \quad u_\xi=u_0+\sum_{j=1}^{k}(u_j-u_{j-1})\eta(\tau-\tau_{j-1}) \tag{2.1}$$

Величины u_j ($j=0, 1, \ldots, k$) пропорциональны плотности распределения кристаллов солей в физическом пространстве.

Аналогично предыдущему решение задачи (1.2), (2.1) представим в виде (1.5), где в соответствии с работами [1, 3] положим

$$v(\xi,\tau) = \exp\left(\frac{\xi}{2}-\frac{\tau}{4}\right)\int_0^\infty s \operatorname{ch}^{-1}\frac{s}{2}\, G(\xi, s; \tau, 1)\, ds$$

а функцию $u(\xi, \tau; s_0)$ подчиним условиям

$$\begin{aligned} &\tau_0>0,\ 0<\xi<\tau+s_0,\ u_{\xi\xi}-u_\xi=u_\tau \\ &\tau>0,\ \xi=0,\ u=0 \\ &\tau>0,\ 0<\xi<s_0,\ u=0 \\ &\tau>0,\ \xi=\tau+s_0,\ u_\xi=1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Подставляя решение вспомогательной задачи (2.2) в виде

$$u(\xi,\tau;s_0) = \exp\left(\frac{\xi}{2}-\frac{\tau}{4}\right)\int_{s_0}^\infty \rho(s, s_0)\, G(\xi, s; \tau, 1)\, ds \tag{2.3}$$

приходим к следующему интегродифференциальному уравнению для функции $\rho(s, s_0)$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{s_0}^{\infty}\left\langle \frac{1}{2}\rho(s,s_0)\left\{\exp\left[\frac{s}{2}-\frac{(s-s_0)^2}{4\tau}\right]-\right.\right.$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{s}{2}-\frac{(s+s_0)^2}{4\tau}\right]\right\}+\frac{d\rho}{ds}\left\{\exp\left[\frac{s}{2}-\frac{(s-s_0)^2}{4\tau}\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\exp\left[-\frac{s}{2}-\frac{(s+s_0)^2}{4\tau}\right]\right\}\right\rangle ds=1$$

с начальным условием $\rho(s_0)=0$, вытекающим из согласования пределов в точке $\tau=0$, $\xi=s_0$.

С помощью преобразования Лапласа и замены переменной $z=s-s_0$ $(\rho(z+s_0, s_0)=R(z, s_0))$ это уравнение приводится к виду

$$\exp\frac{s_0}{2}L_p\left[\exp\frac{z}{2}\left(\frac{dR}{dz}+\frac{1}{2}R\right)\right]+\exp\left(-2s_0p-\frac{s_0}{2}\right)\times$$

$$\times L_p\left[\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\left(\frac{dR}{dz}-\frac{1}{2}R\right)\right]=\frac{2}{p}$$

Возвращаясь к оригиналам, получим

$$\frac{df}{dz}=1+\exp(s_0-z)\left[f(z-2s_0)-\frac{df(z-2s_0)}{dz}\right]\eta(z-2s_0)$$

$$f(z)=\frac{1}{2}R(z,s_0)\exp\frac{s_0+z}{2}$$

Отсюда интегрированием по z с учетом начального условия $f(0)=0$ найдем

$$f(z)=z-\exp(s_0-z)f(z-2s_0)\eta(z-2s_0) \tag{2.4}$$

Методом индукции легко проверить, что решение функционального уравнения (2.4) имеет вид

$$f(z)=f_k(z)=z+\sum_{n=1}^{k}(-1)^n(z-2ns_0)\exp(n^2s_0-nz)$$

$$2ks_0\leqslant z\leqslant 2(k+1)s_0,\quad k=0,1,2,\ldots$$

Подставляя его в (2.3), получим

$$u(\xi,\tau;s_0)=\exp\left(\frac{\xi-s_0}{2}-\frac{\tau}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{k}(-1)^n\exp(n^2s_0)\times \tag{2.5}$$

$$\times\{[J_k^1(\alpha_n,s_0-\xi)-J_k^1(\alpha_n,s_0+\xi)]-n2s_0[J_k(\alpha_n,s_0-\xi)-J_k(\alpha_n,s_0+\xi)]\}$$

$$J_k(\alpha,\beta)=\exp(\alpha^2\tau+\alpha\beta)\left[\operatorname{erf}\frac{2(k+1)s_0+\beta+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}}-\right.$$

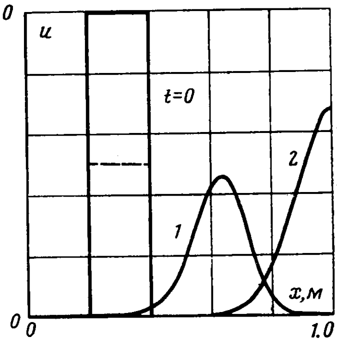
$$\left.-\operatorname{erf}\frac{2ks_0+\beta+2\alpha\tau}{2\sqrt{\tau}}\right]$$

$$J_k^1(\alpha,\beta)=2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\exp(\alpha^2\tau+\alpha\beta)\left\{\exp\left[-\frac{(2ks_0+\beta+2\alpha\tau)^2}{4\tau}\right]-\right.$$

$$\left.-\exp\left[-\frac{(2s_0(k+1)+\beta+2\alpha\tau)^2}{4\tau}\right]\right\}-(2\alpha\tau+\beta)J_k(\alpha,\beta),$$

$$\alpha_n=n+\frac{1}{2},\quad \beta=s_0\pm\xi$$

Ряд, входящий в правую часть формулы (2.5), достаточно быстро сходится. Для $s_0>5$, например, из (2.3) можно получить удобную для практических расчетов приближенную формулу



$$(2.6)\qquad u(\xi,\tau;s_0)\approx 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\exp\left(-\frac{y^2}{4\tau}\right)-$$

$$-y\left(1-\operatorname{erf}\frac{y}{2\sqrt{\tau}}\right)$$

$$y=s_0+\tau-\xi$$

На фигуре представлено распределение солей при промывке почв с одинаковой степенью, но различным характером засоления. Кривая *1* соответствует $\lambda=0.5$, $u_1=1$, кривая *2* – $\lambda=1$, $u_1=0.5$. В обоих случаях было принято $u_0=u_2=0$, $D=10^{-3}$ *м²/сутки*, $v=0.1$ *м/сутки*, $x_0=0.2$ *м*, $x_1=0.4$ *м*, глубина промачивания 1 *м*.

Расчеты проводились по формулам (1.5), (1.11), (2.6).

Поступила 25 X 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пеньковский В. И.* К вопросу о математическом моделировании процесса рассоления грунтов. ПМТФ, 1975, № 5.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Гостехиздат, 1958.
3. *Капранов Ю. И.* О некоторых точных решениях в задачах рассоления грунтов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.