МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1977

УДК 532.529.6 : 538

ГИДРОДИНАМИКА ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

В. В. ГОГОСОВ, В. А. НАЛЕТОВА, Г. А. ШАПОШНИКОВА

(Москва)

Выводится система уравнений, описывающая поведение намагничивающихся либо поляризующихся дисперсных сред в электромагнитных полях в «диффузионном приближении». Предполагается, что среда состоит из нескольких фаз и компонент, каждая из которых намагничивается или поляризуется, вообще говоря, по своему закону и имеет свою температуру. Выведена формула для силы, действующей на такую среду со стороны электромагнитного поля, которая включает в себя слагаемые, связанные с неравновесностью процесса (производными скорости, разностями давлений, химических потенциалов и температур различных фаз). Часть силы, пропорциональная разностям давлений, химических потенциалов и температур фаз, входит в уравнения движения и в случае, когда среда не взаимодействует с электромагнитным полем или когда электромагнитное поле отсутствует. Слагаемые, связанные с намагничиванием или с поляризацией, входят в эту часть силы через разности давлений и химических потенциалов различных фаз.

С помощью методов термодинамики необратимых процессов выписаны уравнения для потоков диффузии, потока тепла и уравнения для скорости изменения массы α-й фазы (компоненты), энтропии α-й фазы (компоненты), а также уравнение для скорости изменения объемной концентрации α-й фазы (компоненты). Найденные уравнения для скорости изменения энтропий заменяют в «диффузионном приближении» более громоздкие уравнения энергии, обычно использующиеся в гидродинамике многофазных сред.

Особо следует отметить, что предлагаемый метод позволяет получить уравнения для изменения объемных концентраций фаз. Вместо этих уравнений для замыкания полной системы в смесях жидкость – пузырьки газа используется обычно уравнение типа уравнения Рэлея для пульсации пузырька, которое отличается от полученного в данной работе уравнения и которое в рамках принятых предположений не следует из общего формализма термодинамики необратимых процессов. Проводится сравнение полученных результатов и вытекающих из них следствий с результатами работ других авторов.

При выводе уравнений использовались основные положения, изложенные в [1, 2].

1. Уравнения намагничивающихся дисперсных сред. Рассмотрим движение дисперсной намагничивающейся среды, состоящей из N компонент и фаз: нейтральной среды — газа или жидкости, положительно (свободных ионов) и отрицательно (свободных электронов или ионов) заряженных частиц, движущихся в среде, и $N-3$ сортов, вообще говоря, сжимаемых заряженных фаз, диспергированных в газе или жидкости (капель, пузырей, твердых частиц и т. д.). Далее везде будем для определенности говорить об отрицательных ионах и о фазах, предполагая, что сказанное справедливо для любого типа отрицательных частиц, а также, если не оговорено противоположное, не только для фаз, но и для компонент. Обозначим цифрой 1 параметры, относящиеся к газу или жидкости, цифрой 2 (3) — параметры, относящиеся к положительным (отрицательным) ионам, цифрами 4, 5, . . . , N — параметры, относящиеся к диспергированным фазам.

Будем считать, что α-я диспергированная фаза занимает в единице объема смеси объем Γ_α $(\alpha=4, 5, \ldots, N)$, а дисперсионная (несущая) фаза — газ или жидкость, положительные и отрицательные ионы занимают в единице объема смеси объемы Γ_1, Γ_2, Γ_3 соответственно, так что $\Gamma_1=\Gamma_2=\Gamma_3$.

Газ (или жидкость), ионы и электроны считаем компонентами одной фазы. Очевидно, что $\Gamma_1+\sum\limits_{\alpha=4}^{N}\Gamma_\alpha=1$ (Γ_α — объемная концентрация). Будем считать, что каждая диспергированная фаза является непроводящей и может намагничиваться по своему закону. Несущая фаза также может намагничиваться.

Пусть ρ_1° — истинная плотность несущего газа или жидкости, ρ_2° (ρ_3°) — истинная плотность свободных положительных (отрицательных) ионов, ρ_α° ($\alpha=4, 5, \ldots, N$) — истинная плотность вещества, из которого состоят частицы α-го сорта. Введем средние плотности газа, ионов и диспергированных фаз формулами

$$\rho_\alpha=\Gamma_\alpha\rho_\alpha^\circ,\ \alpha=1, 2, \ldots, N \tag{1.1}$$

Обозначим посредством $\mathbf{v}_\alpha$, T_α, s_α, q_α вектор скорости, температуру, энтропию, рассчитанную на единицу массы, плотность объемного заряда α-й фазы или компоненты соответственно; $\mathbf{j}_\alpha=q_\alpha\mathbf{v}_\alpha$ ($\alpha=2, 3, \ldots, N$) — плотность электрического тока α-й фазы или компоненты, $q_1=0$, $j_1=0$.

Будем предполагать для определенности, что на каждую частицу α-го сорта налипло одинаковое число ионов z_α с зарядом e_α ($e_\alpha=\pm e$, где e — заряд протона), тогда формула

$$q_\alpha=z_\alpha e_\alpha n_\alpha,\ \alpha=4, 5, \ldots, N \tag{1.2}$$

определяет плотность заряда при известном числе частиц α-го сорта; $q_2=ez_2n_2$, $q_3=-ez_3n_3$, $z_{2(3)}$ — кратность ионизации положительных (отрицательных) ионов, $e_2=e$, $e_3=-e$.

Определим среднюю плотность смеси ρ, среднюю скорость смеси $\mathbf{u}$ и полный ток $\mathbf{j}$ формулами

$$\rho=\sum_1^N\rho_\alpha,\quad \rho\mathbf{u}=\sum_1^N\rho_\alpha\mathbf{v}_\alpha,\quad \mathbf{j}=\sum_1^N\mathbf{j}_\alpha \tag{1.3}$$

Будем рассматривать движение среды в приближении феррогидродинамики [2]. При этом уравнения Максвелла запишутся в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-c^{-1}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi q \tag{1.4}$$

В указанном приближении пренебрегается током смещения и конвективным током в полном законе Ома. Это можно делать, когда выполняется по порядку величины неравенство $H\gg uE/c$. Здесь предполагаются следующие порядка величин: $|\operatorname{rot}\mathbf{H}|\sim H/L$; $|\partial\mathbf{D}/\partial t|\sim E/t$, $u=L/t$; u, L, t — характерные скорость, размер и время задачи. В приближении феррогидродинамики поле $\mathbf{H}$ и ток $\mathbf{j}$ не преобразуются при переходе от одной системы координат к другой. Здесь и далее предполагается, что диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=1$.

Предположим, что внутренняя энергия единицы массы среды и поля U есть функция концентраций каждой фазы $c_\alpha=\rho_\alpha/\rho$, $\alpha=1, 2, \ldots, N$, $\sum\limits_1^N c_\alpha=1$, энтропий каждой фазы или компоненты в единице массы смеси $c_\alpha s_\alpha$, плотности смеси ρ, объемных концентраций Γ_α, абсолютной величины вектора магнитной индукции B и величины межфазной поверхности Σ_α ($\alpha=4, 5, \ldots, N$) в единице массы смеси

$$U=U(c_\alpha s_\alpha, \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, B, \Sigma_\alpha) \tag{1.5}$$

Отметим, что внутренняя энергия дисперсной системы U должна содержать слагаемое, связанное с взаимодействием фаз, которое может зависеть не только от величины межфазной поверхности Σ_α ($\alpha=4, \ldots, N$), но и от температуры межфазной поверхности T_{Σ_α}, от поверхностного заряда σ_{Σ_α} и так далее. Цель этой работы — описать эффекты, связанные с намагниченностью дисперсной среды, так что здесь и далее для определенности предполагается, что энергия межфазных связей зависит только от величины поверхностей $\Sigma_\alpha(\alpha=4, \ldots, N)$. Соответствующее обобщение делается без труда.

Изменение внутренней энергии запишется в виде

$$dU=\sum T_\alpha\, dc_\alpha s_\alpha+\frac{p}{\rho^2}\,d\rho+\sum \xi_\alpha\, dc_\alpha-$$

$$-\sum \frac{p_\alpha}{\rho}\,d\Gamma_\alpha+\frac{\mathbf{H}}{4\pi\rho}\,d\mathbf{B}+\sum_{\alpha=4}^{N}\sigma_\alpha d\Sigma_\alpha$$

$$(1.6)\qquad T_\alpha=\frac{\partial U}{\partial c_\alpha s_\alpha},\quad \xi_\alpha=\frac{\partial U}{\partial c_\alpha},\quad \frac{p}{\rho^2}=\frac{\partial U}{\partial \rho},$$

$$\frac{p_\alpha}{\rho}=-\frac{\partial U}{\partial \Gamma_\alpha},\quad \frac{H_i}{4\pi\rho}=\frac{\partial U}{\partial B_i},\quad \sigma_\alpha=\frac{\partial U}{\partial \Sigma_\alpha}$$

Всюду предполагается, что частные производные любой функции нескольких заданных параметров f по одному из них берутся в предположении, что остальные параметры постоянны; например

$$\frac{\partial f(c_\alpha, s_\alpha, \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, B, \Sigma_\alpha)}{\partial c_\alpha s_\alpha}=\left(\frac{\partial f}{\partial c_\alpha s_\alpha}\right)_{c_\gamma s_\gamma (\gamma\neq\alpha), \rho, c_\alpha, \Gamma_\alpha, B, \Sigma_\alpha}$$

Значки $\sum$ и $\sum\limits_{\alpha\neq\beta}$ всюду, где не оговорено противоположное, означают, что суммирование ведется соответственно от 1 до N или от 1 до N, за исключением $\alpha=\beta$. Здесь предполагается также, что внутренняя энергия имеет вид, при котором множитель, стоящий при $d\mathbf{B}$, есть $\mathbf{H}/4\pi\rho$. Тогда из шестой формулы (1.6) следует, что $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$, где $\mu^{-1}=8\pi\rho\partial U/\partial B^2$ (векторы индукции и магнитного поля параллельны).

Объемные концентрации Γ_α выражаются через массовые концентрации c_α и плотность смеси ρ : $\Gamma_\alpha=c_\alpha\rho/\rho_\alpha^\circ$; в случае, когда часть фаз является несжимаемой, т. е. соответствующие $\rho_\alpha^\circ=\mathrm{const}$ (например, несжимаемые капли, твердые частицы), число независимых параметров уменьшается на число несжимаемых фаз.

Уравнения неразрывности для плотностей фаз и компонент ρ_α, для плотности смеси ρ, для концентраций c_α и для заряда каждой фазы q_α имеют вид

$$(1.7)\qquad \frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t}+\operatorname{div}\rho_\alpha\mathbf{v}_\alpha=\varkappa_\alpha,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{u}=0,\qquad \mathbf{J}_\alpha=\rho_\alpha(\mathbf{v}_\alpha-\mathbf{u})$$

$$\rho\frac{dc_\alpha}{dt}=\varkappa_\alpha-\operatorname{div}\mathbf{J}_\alpha,\qquad \frac{\partial q_\alpha}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}_\alpha=\dot q_\alpha,\qquad \alpha=1,2,\ldots,N,$$

$$q_1=\dot q_1=0$$

Здесь $\varkappa_\alpha$ — скорость изменения массы α-й фазы или компоненты в единице объема смеси в единицу времени, $\dot{q}_\alpha$ — скорость изменения заряда α-й фазы (α=4, 5, ..., N) в единице объема смеси в единицу времени. Уравнение для плотности заряда α-й компоненты q_α (α=2, 3) является следствием уравнения неразрывности этой компоненты, $\dot{q}_{2(3)}=\varkappa_{2(3)}z_{2(3)}e_{2(3)}/m_{2(3)}$, в то время как уравнения неразрывности и плотности заряда для α-й фазы являются, вообще говоря, независимыми. Это связано с тем, что масса каждой частицы α-й фазы и ее заряд являются переменными, изменяющимися по разным законам.

Уравнение импульса для среды и поля в пренебрежении импульсом поля запишется следующим образом (по одинаковым латинским индексам здесь и далее предполагается суммирование):

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho u_i=-\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k-p_{ik}) \tag{1.8}$$

Тензор напряжения p_{ik} представим в виде

$$p_{ik}=-p\delta_{ik}+\tau_{ik} \tag{1.9}$$

Умножая уравнение (1.8) на $\mathbf{u}$ и используя второе уравнение (1.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho u^2}{2}=-\operatorname{div}\rho\mathbf{u}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}\right)+p\operatorname{div}\mathbf{u}+u_i\nabla_k\tau_{ik} \tag{1.10}$$

Из соотношения (1.6) следует:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho U=\sum\rho T_\alpha\frac{\partial}{\partial t}c_\alpha s_\alpha+\sum\rho\xi_\alpha\frac{\partial c_\alpha}{\partial t}+\frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}-\sum p_\alpha\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial t}+ \tag{1.11}$$
$$+\frac{H_i}{4\pi}\frac{\partial B_i}{\partial t}+U\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sum_{\alpha=4}^{N}\rho\sigma_\alpha\frac{\partial\Sigma_\alpha}{\partial t}$$

Складывая уравнения (1.10) и (1.11), используя второе и третье уравнения (1.7), после несложных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho u^2}{2}+\rho U\right)=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho u_k\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)+\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]_k+\right. \tag{1.12}$$
$$\left.+q_k-u_i\Pi_{ik}\right]+\sum\rho T_\alpha\frac{dc_\alpha s_\alpha}{dt}+\sum\xi_\alpha(\varkappa_\alpha-\nabla\mathbf{J}_\alpha)-\mathbf{j}\mathbf{E}'+\operatorname{div}\mathbf{q}-$$
$$-\Pi_{ik}\nabla_k u_i-\sum p_\alpha\frac{d\Gamma_\alpha}{dt}+\sum_{\alpha=4}^{N}\rho\sigma_\alpha\frac{d\Sigma_\alpha}{dt}+u_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{ik}-\tau_{ik}{}^H-\Pi_{ik})$$
$$\tau_{ik}{}^H=\frac{H_iB_k}{4\pi}-\frac{\mathbf{HB}}{4\pi}\delta_{ik},\qquad \mathbf{E}'=\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{uB}]$$

В выражении (1.12) добавлено и вычтено слагаемое $\partial(q_k-u_i\Pi_{ik})/\partial x_k$. Физический смысл и выражение для вектора $\mathbf{q}$ и тензора Π_{ik} приведены ниже. Сделаем далее два фундаментальных предположения.

1) Будем считать, что полная энергия единицы объема среды и поля и поток энергии к среде и полю соответственно равны

$$\frac{1}{2}\rho u^2+\rho U,\qquad \rho\mathbf{u}\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)+\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]+\mathbf{q}-\Pi_{ik}u_i\text{Э}_k \tag{1.13}$$

(Э $_k$ — единичные векторы базиса).

При этом уравнение энергии среды и поля может быть записано в виде (1.14)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho u^2+\rho U\right)=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho u_k\left(\frac{u^2}{2}+\frac{p}{\rho}+U\right)+\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]_k+q_k-\Pi_{ik}u_i\right]$$

2) Будем считать, что уравнение изменения энтропии смеси имеет вид

$$\sum\rho T_\alpha\frac{dc_\alpha s_\alpha}{dt}+\sum\xi_\alpha(\varkappa_\alpha-\nabla\mathbf{J}_\alpha)-\mathbf{jE}'+\operatorname{div}\mathbf{q}-\Pi_{ik}\nabla_k u_i-$$
$$-\sum p_\alpha\frac{d\Gamma_\alpha}{dt}+\sum_{\alpha=4}^{N}\rho\sigma_\alpha\frac{d\Sigma_\alpha}{dt}=0 \tag{1.15}$$

Из уравнений (1.12), (1.14), (1.15) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\tau_{ik}=\frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_{ik}{}^{\text{н}}+\Pi_{ik}) \tag{1.16}$$

Уравнение притока тепла и уравнение, являющееся обобщением второго закона термодинамики на случай многотемпературной сплошной среды, записываются в виде [1]

$$dU=-dA^i+dQ^e+dQ^{**},\qquad \sum T_\alpha dc_\alpha s_\alpha=dQ^e+dQ' \tag{1.17}$$

Здесь $dA^i=-p_{ik}\nabla_k u_i dt/\rho$ — работа внутренних поверхностных сил, $f_i=\partial p_{ik}/\partial x_k$, dQ^e — приток тепла к системе извне, dQ^{**} — приток нетепловой энергии к телу единичной массы, dQ' — изменение энтропии за счет необратимых процессов.

Очевидно, что задание уравнения для изменения энтропии смеси (1.15) равносильно заданию суммы dQ^e+dQ' во втором уравнении (1.17). Задание полной энергии и потока энергии формулами (1.13) и уравнения изменения энтропии формулой (1.15) равносильно заданию суммы dQ^e+dQ^{**}. В самом деле, вычитая из уравнения энергии (1.14) уравнение (1.10), получим уравнение притока тепла

$$dU=\left\{(-p\delta_{ik}+\tau_{ik}{}^{\text{н}}+\Pi_{ik})\nabla_k u_i-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]_k+q_k+u_i\tau_{ik}{}^{\text{н}}\right)\right\}\frac{dt}{\rho} \tag{1.18}$$

Выделяя из последнего уравнения работу внутренних сил, равную по определению $-(-p\delta_{ik}+\tau_{ik}{}^{\text{н}}+\Pi_{ik})\nabla_k u_i dt/\rho$, в соответствии с первой формулой (1.17) можно определить сумму dQ^e+dQ^{**}

$$dQ^e+dQ^{**}=-\frac{dt}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]_k+q_k+u_i\tau_{ik}{}^{\text{н}}\right) \tag{1.19}$$

Из сказанного видно, что задание сумм dQ^e+dQ^{**} и dQ^e+dQ' в формулах (1.17) равносильно заданию полной энергии и потока энергии формулами (1.13) и уравнения изменения энтропии смеси (1.15).

Выражение для силы, действующей на намагничивающуюся гомогенную среду, выводится во многих работах (см., например, [3–6]). В этих работах выражение для тензора напряжений выводится приравниванием вариации свободной энергии (при постоянной температуре и векторном потенциале магнитного поля) работе внутренних сил. Такое равенство, вообще говоря, неверно. Как следует из первой формулы (1.17), для выполнения этого равенства необходимо, чтобы $dQ^e+dQ^{**}=0$. Во многих случаях, например, когда учитываются вязкость среды, процессы диффузии и химические реакции, величина dQ^e+dQ^{**} отлична от нуля. Тем более нет никаких оснований полагать сумму dQ^e+dQ^{**} равной нулю в дисперсной среде.

Таким образом, для получения из вариации свободной (или внутренней) энергии тензора напряжений в намагничивающейся среде необходимо дополнительное предположение о сумме dQ^e+dQ^{**}. Кроме того, в вариацию свободной (или внутренней) энергии войдут вариации температур или энтропий, для которых необходимо задание суммы dQ^e+dQ' (вторая формула (1.17)). В работах [3–6] сумма dQ^e+dQ^{**} полагалась равной нулю.

Введем энтропию смеси S формулой $S=\Sigma c_\alpha s_\alpha$ и сделаем третье фундаментальное предположение о виде диссипативной функции σ. Используя формулу $\mathbf{j}'=\sum q_\alpha \mathbf{J}_\alpha/\rho_\alpha \approx \mathbf{j}$, уравнение изменения энтропии смеси (1.15) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho S=-\operatorname{div}\left\{\rho \mathbf{u} S+\frac{1}{T_1}\sum_{\alpha\neq 1}\mathbf{J}_\alpha l_\alpha+\frac{1}{T_1}\mathbf{q}\right\}+\sigma \tag{1.20}$$

$$\sigma=\sum_{\alpha\neq 1}\frac{\rho_\alpha}{T_1}\frac{d_\alpha s_\alpha}{dt}(T_1-T_\alpha)+\sum_{\alpha\neq 1}\frac{\varkappa_\alpha}{T_1}l_\alpha+$$

$$+\sum_{\alpha\neq 1,2,3}\frac{\rho_\alpha}{T_1}\frac{d_\alpha \Gamma_\alpha/\rho_\alpha}{dt}(p_\alpha-p_{1-3})-\sum_{\alpha\neq 1,2,3}\frac{\rho_\alpha}{T_1}\frac{d_\alpha \Sigma_\alpha/c_\alpha}{dt}\sigma_\alpha+$$

$$+\sum_{\alpha\neq 1}\mathbf{J}_\alpha\zeta_\alpha-\frac{\mathbf{q}}{T_1^2}\nabla T_1+\frac{1}{T_1}\left[\Pi_{ik}-\sum_{\alpha\neq 1,2,3}\Gamma_\alpha(p_\alpha-p_{1-3})\delta_{ik}\right]\nabla_k u_i$$

$$l_\alpha=\xi_1-\xi_\alpha+(T_1-T_\alpha)s_\alpha+(p_\alpha-p_{1-3})\Gamma_\alpha/\rho_\alpha-\sigma_\alpha\Sigma_\alpha/c_\alpha,\quad \alpha=4,\ 5,\ldots,\ N$$

$$l_\alpha=\xi_1-\xi_\alpha+(T_1-T_\alpha)s_\alpha,\ \alpha=2,\ 3;\ p_{1-3}=p_1+p_2+p_3$$

$$\zeta_\alpha=\nabla\frac{\xi_1-\xi_\alpha}{T_1}+\frac{q_\alpha}{\rho_\alpha}\frac{\mathbf{E}'}{T_1}+s_\alpha\nabla\frac{T_1-T_\alpha}{T_1}+$$

$$+\frac{\Gamma_\alpha}{\rho_\alpha}\nabla\frac{p_\alpha-p_{1-3}}{T_1}-\frac{\Sigma_\alpha}{c_\alpha}\nabla\frac{\sigma_\alpha}{T_1},\qquad \alpha=4,5,\ldots,N.$$

$$\zeta_\alpha=\nabla\frac{\xi_1-\xi_\alpha}{T_1}+\frac{q_\alpha\mathbf{E}'}{\rho_\alpha T_1},\qquad \alpha=2,3$$

Применяя теорему Кюри и правило Онзагера, получим

$$\mathbf{J}_\alpha=\sum_{\nu\neq 1}L_{\alpha\nu}\zeta_\nu+L_{\alpha,N+1}\nabla T_1,\qquad \alpha\neq 1 \tag{1.21}$$

$$-\frac{\mathbf{q}}{T_1^2}=\sum_{\nu\neq 1}L_{N+1,\nu}\zeta_\nu+L_{N+1,N+1}\nabla T_1 \tag{1.22}$$

$$\frac{\rho_\alpha}{T_1}\frac{d_\alpha s_\alpha}{dt}=\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{\alpha\nu}(T_1-T_\nu)+\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{\alpha,N+\nu}l_\nu+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{\alpha,2N+\nu}(p_\nu-p_{1-3})+ \tag{1.23}$$

$$+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{\alpha,3N+\nu}\sigma_\nu+\varphi_{jl}{}^\alpha\nabla_l u_j,\qquad \alpha\neq 1$$

$$\frac{\varkappa_\alpha}{T}=\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{N+\alpha,\nu}(T_1-T_\nu)+\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{N+\alpha,N+\nu}l_\nu+ \tag{1.24}$$

$$+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{N+\alpha,2N+\nu}(p_\delta-p_{1-3})+\sum_{\nu=1,2,3}\varphi_{N+\alpha,3N+\nu}\sigma_\nu+\varphi_{jl}^{N+\alpha}\nabla u_j,\quad \alpha\neq 1$$

(1.25) $$\frac{\rho_\alpha}{T_1}\frac{d_\alpha\Gamma_\alpha/\rho_\alpha}{dt}=\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{2N+\alpha,\nu}(T_1-T_\nu)+\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{2N+\alpha,N+\nu}l_\nu+$$

$$+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{2N+\alpha,2N+\nu}(p_\nu-p_{1-3})+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{2N+\alpha,3N+\nu}\sigma_\nu+\varphi_{jl}^{2N+\alpha}\nabla_l u_j,\quad \alpha=4,5,\ldots,N$$

(1.26) $$-\frac{\rho_\alpha}{T_1}\frac{d_\alpha\Sigma_\alpha/c_\alpha}{dt}=\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{3N+\alpha,\nu}(T_1-T_\nu)+\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{3N+\alpha,N+\nu}l_\nu+$$

$$+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{3N+\alpha,2N+\nu}(p_\nu-p_{1-3})+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{3N+\alpha,3N+\nu}\sigma_\nu+\varphi_{jl}^{3N+\alpha}\nabla_l u_j,\quad \alpha=4,5,\ldots,N$$

(1.27) $$\frac{1}{T_1}\Pi_{ik}=\sum_{\alpha\neq 1,2,3}\frac{1}{T_1}\Gamma_\alpha(p_\alpha-p_{1-3})\delta_{ik}+L_{ikjl}\nabla_j u_l+\sum_{\nu\neq 1}\psi_{ik}^{\nu}(T_1-T_\nu)+$$

$$+\sum_{\nu\neq 1}\psi_{ik}^{N+\nu}l_\nu+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\psi_{ik}^{2N+\nu}(p_\nu-p_{1-3})+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\psi_{ik}^{3N+\nu}\sigma_\nu$$

Уравнения (1.21) и (1.24) справедливы для всех α, кроме $\alpha=1$, так как в выражение для диссипативной функции (1.20) не входят $\mathbf{J}_1$, $\varkappa_1$. Однако, используя соотношения

$$\mathbf{J}_1=-\sum_{\alpha\neq 1}\mathbf{J}_\alpha,\qquad \varkappa_1=-\sum_{\alpha\neq 1}\varkappa_\alpha$$

и вводя коэффициенты

$$L_{1\nu}=-\sum_{\alpha\neq 1}L_{\alpha\nu},\quad \nu=2,3,\ldots,N+1;\quad \varphi_{jl}^{N+1}=-\sum_{\alpha\neq 1}\varphi_{jl}^{N+\alpha},\quad j,l=1,2,3$$

$$\varphi_{N+1,\nu}=-\sum_{\alpha\neq 1}\varphi_{N+\alpha,\nu},$$

$$\nu=2,3,\ldots,N,\ N+2,\ldots,2N,\ 2N+4,\ldots,3N,\ 3N+4,\ldots,4N$$

уравнения для $\mathbf{J}_1$, $\varkappa_1$ можно записать в виде

$$\mathbf{J}_1=\sum_{\nu\neq 1}L_{1\nu}\boldsymbol{\zeta}_\nu+L_{1,N+1}\nabla T_1$$

(1.28) $$\frac{\varkappa_1}{T_1}=\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{N+1,\nu}(T_1-T_\nu)+\sum_{\nu\neq 1}\varphi_{N+1,N+\nu}l_\nu+$$

$$+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{N+1,2N+\nu}(p_\nu-p_{1-3})+\sum_{\nu\neq 1,2,3}\varphi_{N+1,3N+\nu}\sigma_\nu+\varphi_{jl}^{N+1}\nabla_l u_j$$

В уравнениях (1.21)–(1.27) тензоры второго ранга $L_{\mu\nu}$, φ^α, ψ^α, μ, $\nu=1, 2,\ldots, N+1$; $\alpha=2, 3,\ldots, N, N+2,\ldots, 2N+4,\ldots 3N, 3N+4,\ldots, 4N$ зависят от магнитного поля $\mathbf{H}$ и связаны соотношениями взаимности Онзагера

(1.29) $$L_{\mu\nu}(\mathbf{H})=\tilde{L}_{\nu\mu}(-\mathbf{H}),\ \tilde{L}_{\nu\mu,\,jl}=L_{\nu\mu,\,lj};\ \varphi^\alpha(\mathbf{H})=-\tilde{\psi}^\alpha(-\mathbf{H}),$$
$$\tilde{\psi}_{jl}^{\alpha}=\psi_{lj}^{\alpha};\ j,\ l=1,\ 2,\ 3$$

Тензоры $L_{\mu\nu}$ действуют на любой вектор **a** следующим образом

$$A\mathbf{a}=A^{\circ}(|\mathbf{H}|)\mathbf{a}+A^{\mathrm{I}}(|\mathbf{H}|)[\mathbf{aH}]+A^{\mathrm{II}}(|\mathbf{H}|)[[\mathbf{aH}]\mathbf{H}],\ A\equiv L_{\mu,\nu}$$

Структура тензоров 2-го ранга, зависящих от магнитного поля, имеет вид [7]

$$A(\mathbf{H})=F_A(|\mathbf{H}|)\begin{vmatrix}1 & H_z & -H_y\\ -H_z & 1 & H_x\\ H_y & -H_x & 1\end{vmatrix},\quad A=\varphi^{\alpha},\psi^{\alpha},L_{\mu\nu}\tag{1.30}$$

В уравнениях (1.23)—(1.26) скалярные коэффициенты $\varphi_{\nu\gamma}$ зависят от абсолютной величины магнитного поля и связаны соотношениями взаимности Онзагера

$$\varphi_{\nu\gamma}=\varphi_{\gamma\nu},\ \nu,\ \gamma=2,\ 3,\ldots,\ N,\ N+2,\ldots,\ 2N,\ 2N+4,\ldots,\ 3N,\ 3N+ +4,\ldots,\ 4N\tag{1.31}$$

В уравнении (1.27) компоненты тензора 4-го ранга L_{ikjl} также зависят от магнитного поля и связаны соотношениями

$$L_{ikjl}(\mathbf{H})=L_{jlik}(-\mathbf{H});\ i,\ k,\ j,\ l=1,\ 2,\ 3\tag{1.32}$$

Уравнения (1.21) служат для определения векторов диффузии и используются вместо уравнений движения фаз и компонент. Уравнения (1.23) являются уравнениями для определения температур (либо энтропий) фаз и заменяют более громоздкие уравнения энергии для каждой фазы и компоненты.

Уравнения (1.25) позволяют определить скорость изменения объемных концентраций фаз без использования для этого, как часто делается в [8–10], уравнения типа уравнения Релея для пульсаций пузырька, которое, как видно из сказанного, в рамках сделанных допущений, не следует из используемого формализма термодинамики необратимых процессов.

Уравнения (1.26) определяют скорость изменения межфазной поверхности.

Тензор Π_{ik}, определяемый формулой (1.27), связан не только с производной от составляющих скоростей (вязкость среды), но и с разностями давлений, химических потенциалов и температур различных фаз. Следует подчеркнуть, что слагаемые, связанные с намагничиванием среды, входят в уравнения движения и энергии не только через давление p, как во всех известных формулах [3–6], но и в часть тензора Π_{ik}, пропорциональную $\xi_\alpha-\xi_1$, $p_\alpha-p_{1-3}$ (величины ξ_α и p_α определяются третьим и пятым равенствами (1.6) и немедленно вычисляются, как только задается внутренняя энергия U). Такая сложная зависимость тензора Π_{ik} от разностей давлений, химических потенциалов и температур фаз должна иметь место и в случае, когда среда не взаимодействует с электромагнитным полем или когда электромагнитное поле отсутствует. Это обстоятельство обычно не учитывается в работах, описывающих движение многофазных сред [8–12, 14]. Соответствующие слагаемые, входящие в тензор Π_{ik}, войдут и в поток энергии (в произведение $u_i\Pi_{ik}$).

Выражение для тензора напряжений и сила в намагничивающейся многофазной среде имеют вид

$$p_{ik}=-p\delta_{ik}+\frac{H_iB_k}{4\pi}-\frac{\mathbf{HB}}{4\pi}\delta_{ik}+\Pi_{ik},\qquad f_i=\frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\tag{1.33}$$

Из кинетических уравнений (1.21) следует, что выражение для плотностей токов заряженных частиц $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{j}_3$ и для токов частиц α-й фазы $\mathbf{j}_\alpha$ ($\alpha=$

$=4, 5, \ldots, N$) запишутся в виде

(1.34) $$\mathbf{j}_\alpha = q_\alpha \mathbf{u} + \frac{q_\alpha}{\rho_\alpha}\Big\{\sum_{\nu\neq 1} L_{\alpha\nu}\zeta_\nu + L_{\alpha,N+1}\nabla T_1\Big\}$$

Из соотношений (1.34), пренебрегая конвективным током $q\mathbf{u}$ (приближение феррогидродинамики), можно получить для дисперсной намагничивающейся смеси

(1.35) $$\mathbf{j} = \sum_{\alpha\neq 1}\frac{q_\alpha}{\rho_\alpha}\Big\{\sum_{\nu\neq 1} L_{\alpha\nu}\zeta_\nu + L_{\alpha,N+1}\nabla T_1\Big\}$$

При задании внутренней энергии среды и поля удобно пользоваться формулой, которая следует из шестого уравнения (1.6),

(1.36) $$U = U_0 + \frac{1}{4\pi\rho}\int_0^B \mu^{-1}(c_\alpha s_\alpha, c_\alpha, \rho, \Gamma_\alpha, B, \Sigma_\alpha) B\, dB$$

Здесь U_0 — внутренняя энергия в отсутствие магнитного поля; μ — известная из теории или эксперимента функция. Давления p и p_α, химические потенциалы ξ_α, входящие в выражения для тензора напряжений и силы (1.33), запишутся в виде (индексом 0 обозначаются соответствующие величины в отсутствие магнитного поля)

(1.37)
$$p = p_0 - \frac{1}{4\pi}\int_0^B \left(\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} + 1\right)\mu^{-1} B\, dB, \quad p_\alpha = p_{0\alpha} + \frac{1}{4\pi}\int_0^B \mu^{-2}\frac{\partial\mu}{\partial\Gamma_\alpha} B\, dB$$

$$\xi_\alpha = \xi_{0\alpha} - \frac{1}{4\pi\rho}\int_0^B \mu^{-2}\frac{\partial\mu}{\partial c_\alpha} B\, dB$$

В случае, когда внутренняя энергия U задана как функция истинных плотностей $\rho_\alpha{}^\circ$ и объемных концентраций Γ_α (а не ρ, c_α, Γ_α), а также $c_\alpha s_\alpha$, B, Σ_α, формулы примут вид

(1.38)
$$p = p_0 - \frac{1}{4\pi}\int_0^B \left(1 + \frac{1}{\mu}\Sigma\rho_\alpha{}^\circ\frac{\partial\mu}{\partial\rho_\alpha{}^\circ}\right)\mu^{-1} B\, dB, \quad p_\alpha = p_{0\alpha} + \frac{1}{4\pi}\int_0^B \mu^{-2}\frac{\partial\mu}{\partial\Gamma_\alpha} B\, dB$$

$$\xi_\alpha = \xi_{0\alpha} - \frac{1}{4\pi\Gamma_\alpha}\int_0 \mu^{-2}\frac{\partial\mu}{\partial\rho_\alpha{}^\circ} B\, dB$$

В случае, когда магнитное поле равно нулю, выражение для давления p можно записать в виде

(1.39) $$p_0 = \rho^2\left(\frac{\partial U_0}{\partial\rho}\right)_{c_\alpha s_\alpha,\, c_\alpha,\, \Gamma_\alpha,\, \Sigma_\alpha} = \Sigma\frac{\Gamma_\alpha}{c_\alpha}\rho_\alpha^{\circ 2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial\rho_\alpha{}^\circ}\right)_{c_\alpha s_\alpha,\, c_\alpha,\, \rho_\gamma{}^\circ (\gamma\neq\alpha),\, \Sigma_\alpha}$$

Если при этом внутреннюю энергию можно считать аддитивной, то есть

$$\rho U_0 = \Sigma\Gamma_\alpha\rho_\alpha{}^\circ U_{0\alpha}(s_\alpha, \rho_\alpha{}^\circ, \Sigma_\alpha)$$

формула (1.39) является аналогом закона Дальтона в многофазной среде

$$p_0 = \Sigma\Gamma_\alpha p_{0\alpha}$$

Здесь $p_{0\alpha} = (\rho_\alpha{}^\circ U_{0\alpha} - \rho_\alpha{}^\circ \partial\rho_\alpha{}^\circ U_{0\alpha}/\partial\rho_\alpha{}^\circ)$ — давление в α-й фазе в отсутствие магнитного поля.

Отметим, что формула (1.36) верна не всегда. В случае, когда внутренняя энергия зависит не только от вектора магнитной индукции, но и от электрической индукции или векторов магнитного и электрического полей, подобная зависимость накладывает условия на вид внутренней энергии. Например, в случае поляризующейся и намагничивающейся среды, внутренняя энергия которой зависит от магнитной индукции B и электрической индукции $\mathbf{D}$, формула

$$U=U_0+\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^B \mathbf{H}\,d\mathbf{B}+\frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^D \mathbf{E}\,d\mathbf{D}$$

(U_0 — внутренняя энергия среды в отсутствие электромагнитного поля) верна только тогда, когда производная $\partial U/\partial B_i=H_i/4\pi\rho$ не зависит от $\mathbf{D}$, а производная $\partial U/\partial D_i=E_i/4\pi\rho$ не зависит от $\mathbf{B}$, то есть

$$\mu=\mu(\rho, S, B),\ \varepsilon=\varepsilon(\rho, S, D)$$

Будем считать, что задана внутренняя энергия дисперсной среды и поля, рассчитанная на единицу массы смеси U. Тогда можно выписать замкнутую систему уравнений, описывающую движение дисперсной среды в магнитном поле, когда каждая фаза и компонента намагничиваются по своему закону. Система уравнений в приближении феррогидродинамики будет состоять из уравнений неразрывности (1.7), уравнений состояний (1.6), уравнения движения смеси (1.8) с учетом выражений для p_{ik} (1.9), (1.16), (1.33), уравнения энергии для смеси (1.14), кинетических уравнений (1.21)—(1.27) и уравнений Максвелла (1.4).

Для нахождения заряда каждой фазы q_α ($\alpha=4,\ldots, N$) нужно делать дополнительные предположения относительно скорости изменения заряда $\dot{q}_\alpha$. Чтобы найти в общем случае выражение для $\dot{q}_\alpha$ из термодинамики необратимых процессов, нужно учесть энергию зарядов q_α, находящихся на диспергированных фазах.

В случае, когда диспергированные частицы α-го сорта имеют одинаковый размер и на каждой частице находится один и тот же заряд, выполняется равенство $\dot{q}_\alpha=0$. При исчезновении α-й фазы в какой-либо точке потока вследствие испарения плотность заряда свободных заряженных частиц (ионов, электронов) в газе мгновенно увеличивается на величину q_α. Уравнения, описывающие движение такой среды, будут отличаться от исходных отсутствием уравнений, описывающих движение α-й фазы.

Выделение в полном уравнении для изменения энтропии (1.15), (1.20) диссипативной функции σ (по терминологии [1] выделение d_eS/dt и d_iS/dt), а также разбиение слагаемых, входящих в диссипативную функцию, на «силы» и «потоки» является одним из существенных предположений при построении моделей сплошных сред и может быть произведено неоднозначным образом. Так уравнение (1.15) можно записать в виде, существенно отличающемся от вида уравнения (1.20),

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho S=-\operatorname{div}\left\{\rho\mathbf{u}S-\frac{1}{T_\beta}\Sigma\mathbf{J}_\alpha\xi_\alpha+\frac{1}{T_\beta}\mathbf{q}\right\}+\sigma \tag{1.40}$$

$$\sigma=\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{\rho}{T_\beta}\frac{dc_\alpha s_\alpha}{dt}(T_\beta-T_\alpha)+\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{\varkappa_\alpha}{T_\beta}(\xi_\beta-\xi_\alpha)+$$

$$+\sum_{\alpha\neq 2,3,\beta}\frac{1}{T_\beta}\frac{d\Gamma_\alpha}{dt}(p_\alpha{}^*-p_\beta{}^*)-\sum_{\alpha\neq 1,2,3}\frac{\rho}{T_\beta}\frac{d\Sigma_\alpha}{dt}\sigma_\alpha+$$

$$+\sum_{\alpha\neq\beta}\mathbf{J}_\alpha\left[\nabla\frac{\xi_\beta-\xi_\alpha}{T_\beta}+\left(\frac{q_\alpha}{\rho_\alpha}-\frac{q_\beta}{\rho_\beta}\right)\frac{\mathbf{E}'}{T_\beta}\right]-\frac{\mathbf{q}}{T_\beta^2}\nabla T_\beta+\frac{1}{T_\beta}\Pi_{ik}\nabla_k u_i$$

$$\overset{*}{\rho}_{\alpha(\beta)}=p_{\alpha(\beta)},\qquad \alpha(\beta)\neq 1,\qquad p_1^*=p_1+p_2+p_3$$

При этом кинетические уравнения, аналогичные уравнениям (1.21)—(1.27), будут записаны для величин $\mathbf{J}_\alpha$, $-T_\beta^{-2}\mathbf{q}$, $T_\beta^{-1}\rho dc_\alpha s_\alpha/dt$, $T_\beta^{-1}\varkappa_\alpha$, $T_\beta^{-1}d\Gamma_\alpha/dt$, $-T_\beta^{-1}\rho d\Sigma_\alpha/dt$, $T_\beta^{-1}\Pi_{ik}$ соответственно, которые выразятся через потоки

$$\nabla\frac{\xi_\beta-\xi_\alpha}{T_\beta}+\left(\frac{q_\alpha}{\rho_\alpha}-\frac{q_\beta}{\rho_\beta}\right)\frac{\mathbf{E}'}{T_\beta},\quad \nabla T_\beta,\ T_\beta-T_\alpha,\ \xi_\beta-\xi_\alpha,\ p_\alpha^*-p_\beta^*,\ \sigma_\alpha,\ \nabla_j u_i$$

2. Уравнения двухфазных сжимаемых намагничивающихся сред. В качестве примера рассмотрим смесь двух сжимаемых сред: сжимаемую жидкость, в которой находятся пузырьки газа. Воспользуемся для описания смеси уравнениями, выведенными в п. 1. Индексами $\alpha=1$ ($\alpha=4$) будем обозначать параметры, относящиеся к жидкости (пузырькам газа). Фазы и компоненты, соответствующие $\alpha=2, 3, 5, \ldots, N$, отсутствуют.

В обычной гидродинамике уравнения движения, описывающие такую среду, выписывались, например, в работах [8–14]. При этом в работах [8–10] для замыкания системы уравнений в качестве уравнения для объемной концентрации пузырей Γ_4 принималось уравнение типа уравнения Релея для пульсации пузырька в несжимаемой жидкости.

Полученное в данной работе уравнение (1.25) для определения объемной концентрации пузырей в отсутствие магнитного поля имеет вид

$$\frac{\rho_\alpha}{T_1}\frac{d_\alpha\Gamma_\alpha/\rho_\alpha}{dt}=\varphi_{12,4}(T_1-T_4)+\varphi_{12,8}l_4+\varphi_{12,12}(p_4-p_1)+\varphi_{12,16}\sigma_4+\varphi_{ij}^{12}\nabla_j u_i \tag{2.1}$$

Выше, при выводе уравнений, кинетической энергией жидкости, связанной с пульсацией пузырька, пренебрегается. Уравнение (2.1) отличается от уравнения Релея, выписанного при тех же предположениях, что и уравнение (2.1) (пренебрегается кинетической энергией, связанной с пульсацией пузырька).

Выражение для тензора Π_{ik} в двухфазной намагничивающейся смеси имеет вид

(2.2)

$$\frac{1}{T_1}\Pi_{ik}=\frac{\Gamma_4}{T_1}(p_4-p_1)\delta_{ik}+L_{ikjl}\nabla_j u_l+\psi_{ik}^4(T_1-T_4)+\psi_{ik}^8 l_4+\psi_{ik}^{12}(p_4-p_1)+\psi_{ik}^{16}\sigma_4$$

Электромагнитное поле входит в выражение для Π_{ik} через p_4-p_1 и $\xi_4-\xi_1$. Выражения для p_α, ξ_α даются формулами (1.37), (1.38). Из этих формул видно, что в отсутствие магнитного поля или при $\mu=\text{const}$ разности химических потенциалов и давлений различных фаз вместе с разностями температур и производных от скорости должны входить в выражение для Π_{ik}. При этом нормальная составляющая силы, действующей на единичную площадку, равна не только производной $\rho^2(\partial U/\partial\rho)_{c_\alpha s_\alpha, c_\alpha, \Gamma_\alpha}$, но и содержит слагаемые, пропорциональные разностям давлений, температур и химических потенциалов фаз, и, как обычно, дивергенции скорости смеси («вторая вязкость»).

В работах [8, 11, 12] тензор напряжений не может содержать разности давлений фаз, так как в диссипативную функцию не входит слагаемое, связанное с изменением объема фазы и давлением отдельных фаз.

Таким образом, полученная в данной работе, система уравнений в отсутствие магнитного поля отличается от систем уравнений, используемых в других работах при описании многофазных сред, см., например, [8–14].

3. **Уравнения движения поляризующейся дисперсной среды.** Уравнения, описывающие движение поляризующейся дисперсной среды в электромагнитном поле в приближении электрогидродинамики, выводятся аналогично проделанному в п. 1. Уравнения сохранения массы, количества движения, энергии, уравнения состояния и кинетические уравнения для поляризующейся среды в приближении электрогидродинамики [2, 15, 16] совпадают с уравнениями намагничивающейся дисперсионной среды в приближении феррогидродинамики после соответствующей замены в последних **H** на **E**, **B** на **D**, μ на ε, **j** на **j′**, **E′** на **E** (в выражении для вектора Пойнтинга $c[\mathbf{EH}]/4\pi$ никакой замены производить не нужно).

Следует помнить, что в том случае, когда электрическое поле мало (например, в электропроводной среде при написании кинетических уравнений диффузии обычно предполагается, что электрическое поле мало), среду можно считать изотропной, а коэффициенты в кинетических уравнениях независящими от электрического поля. При этом для коэффициентов в кинетических уравнениях верны обычные соотношения взаимности Онзагера для изотропной среды. Уравнения Максвелла, замыкающие систему уравнений, в приближении электрогидродинамики (электрическое поле и электрическая индукция не преобразуются) имеют вид [2, 15, 16]

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi q,\quad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E} \tag{3.1}$$

Отметим, что в формулу для силы в рассматриваемых случаях наряду с обычным слагаемым $q\mathbf{E}$ [15–17] войдут также слагаемые, связанные с поляризацией. В [18] показано, что во многих случаях в поляризующихся слабопроводящих средах кулоновские силы $q\mathbf{E}$ и силы, связанные с поляризацией среды, одинаковы по порядку величин.

Поступила 2 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
2. *Гогосов В. В., Васильева Н. Л., Тактаров Н. Г., Шапошникова Г. А.* Уравнения гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся многокомпонентных и многофазных сред. Разрывные решения. Исследование разрывных решений со скачком магнитной проницаемости. М., Изд-во МГУ, 1975.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
4. Стреттон Д. Теория электромагнетизма. М.– Л., Гостехиздат, 1948.
5. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. М., Гостехиздат, 1957.
6. *Привороцкий И. А.* Термодинамическая теория ферромагнитных доменов. Усп. физ. н., 1972, т. 108, вып. 1.
7. *Де Гроот С. Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
8. *Нигматулин Р. И.* Мелкомасштабные течения и поверхностные эффекты в гидромеханике многофазных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
9. *Нигматулин Р. И., Шагапов В. Ш.* Структура ударной волны в жидкости, содержащей пузырьки газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
10. *Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш.* Об ударных волнах в жидкости с пузырьками газа. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4.
11. *Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных сред. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
12. *Дорохов И. Н., Кафаров В. В., Нигматулин Р. И.* Методы механики сплошной среды для описания многофазных многокомпонентных смесей с химическими реакциями и процессами тепло- и массопереноса. ПММ, 1975, т. 39, вып. 3.
13. *Когарко Б. С.* Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР 1961, т. 137, № 6.
14. *Ван Вейгарден Л.* Одномерные течения жидкостей с пузырьками газа. В сб. «Реология суспензий». М., «Мир», 1975.
15. *Гогосов В. В., Панкратьева И. Л., Щелчкова И. Н.* Уравнения частично-ионизованной неквазинейтральной плазмы с разными температурами компонент. Граничные условия. Задача о зонде в плотной разнотемпературной плазме. Затухание слабых волн. М., Изд-во МГУ, 1974.
16. *Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П. Якубенко А. Е.* Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
17. *Гогосов В. В., Фарбер Н. Л.,* Уравнения электродинамики многофазных сред. Об одномерных течениях, разрывных решениях и затухании слабых волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
18. *Налетова В. А.* О силах, действующих на слабопроводящий диэлектрик в электрическом поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.