

## НЕЛИНЕЙНОЕ РАЗВИТИЕ ВОЛНЫ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Ю. С. КАЧАНОВ, В. В. КОЗЛОВ, В. Я. ЛЕВЧЕНКО

(Новосибирск)

В последние годы достигнут определенный прогресс в построении теоретических моделей нелинейных волновых процессов, приводящих к переходу ламинарного течения в турбулентное [1, 2]. В то же время ощущается недостаток фактического экспериментального материала, в особенности для течений в пограничном слое. Достаточно хорошо изучена экспериментально лишь начальная стадия развития возмущений в пограничном слое, удовлетворительно описываемая линейной теорией гидродинамической устойчивости. При обсуждении же теоретических моделей последующих стадий перехода исследователи вынуждены обращаться главным образом к старым опытам Национального бюро стандартов США [3, 4], в которых основное внимание было уделено трехмерной структуре переходной области. Настоящее исследование было предпринято с целью получения подробных данных о структуре течения в области перехода при возбуждении в ламинарном пограничном слое двумерной волны. Для более четкого выявления двумерных нелинейных эффектов амплитуда волны с самого начала задавалась достаточно большой. В отличие от предыдущих исследований особое внимание уделено изучению спектрального состава поля возмущений.

1. Эксперименты проводились в дозвуковой аэродинамической трубе Т-324 ИТПМ СО АН СССР [5] при скорости потока  $u_\infty = 9,18$  м/сек и интегральной степени турбулентности, не превышающей 0,04%.

Пластина из оргстекла толщиной 10 мм, шириной 1 м и длиной 1,5 м с эллипсообразным носиком (с полуосями 2 мм: 132 мм с рабочей стороны и 8 мм: 132 мм с противоположной) выставлялась в рабочей части трубы под нулевым углом атаки. При этом над ее поверхностью реализовалось практически безградиентное течение, за исключением области передней кромки размерами ~100 мм (см. фиг. 2 работы [6]).

Введение возмущений в поток проводилось при помощи вибрирующей ленты. Ленточка длиной 300 мм располагалась на расстоянии  $x = 190$  мм от передней кромки пластины. Частота  $f$  вводимой волны задавалась в трех режимах измерения равной соответственно 81,4, 96,4 и 111,4 гц. Это соответствовало следующим значениям частотного параметра  $F = 2\pi f / u_\infty$ :  $88 \cdot 10^{-6}$ ;  $104 \cdot 10^{-6}$ ;  $120 \cdot 10^{-6}$ . Амплитуда волны с  $f = 81,4$  гц варьировалась. Измерения проводились в области  $x$  от 300 до  $x = 950$  мм.

Процесс развития возмущения регистрировался комплексом аппаратуры на базе термоанемометра типа DISA 55D с линеаризованной характеристикой. Регистрация профилей средней и пульсационных скоростей проводилась через каждые 50 мм вниз по потоку, начиная с  $x = 300$  мм, при квазинепрерывном перемещении датчика термоанемометра поперек пограничного слоя. Перемещение осуществлялось мелкими шагами по 0,01 мм с частотой 80 шагов в минуту.

Постоянная составляющая напряжения, пропорциональная средней скорости потока, подавалась с линеаризатора на самописец  $x-y$ , на котором вычерчивались непосредственно профили средней скорости, абсолютная величина напряжения измерялась вольтметром. Переменная составляющая, пропорциональная интенсивности пульсаций, записывалась на магнитофон «Тембр» для последующей обработки и параллельно могла подаваться на осциллограф и частотный анализатор РАТ-1 для предварительного анализа и выбора режима измерения. Для проведения фазовых измерений, определения длины волны возмущения и положения критического слоя на второй вход двухлучевого осциллографа подавался сигнал с генератора, питающего ленточку. Регистрация фазовой информации проводилась также двухканальным магнитофоном «Аврора-Стерио».

Для получения спектров возмущения проводились записи на магнитофон пульсаций скорости при покоящемся датчике в различных положениях вниз по потоку на постоянном расстоянии от поверхности пластины  $y = \text{const} = 1,4$  мм через каждые 25 мм с последующей обработкой.

При обработке результатов измерений профилей пульсаций скорости сигнал с магнитофона подавался на частотный анализатор FAT-1 с полосой пропускания 4 гц и с него сигнал, пропорциональный среднеквадратичной величине продольной составляющей скорости выбранной гармонической моды, подавался на интегрирующий цифровой вольтметр с цифropечатающим устройством, снимающим отсчеты через заданные интервалы времени (~5 сек), и параллельно на самописец  $x-y$ , на котором вычерчивались профили пульсаций выбранной гармоникки для различных значений  $x$ . Время усреднения пульсации составляло для области I-II (см. ниже) 1.5 сек, для области III-IV 5 сек. Затем семейства этих профилей вводились в ЭВМ, обрабатывающую их. Они приводились к безразмерным величинам  $u'$  в процентах к  $u_\infty$ . Вычислялось интегральное по каждому сечению значение энергии возмущений до некоторой произвольной точки вне пограничного слоя

$$E_u = \frac{1}{1.336} \int_0^{1.336} (u')^2 \cdot 100 dy$$

и на графопроекторе вычерчивались поверхности, изображающие картины развития возмущений в координатах  $(x, y, u')$ . Для частоты  $f=81.4$  гц с повышенной амплитудой такая поверхность приведена на фиг. 1 для основной моды и для ее гармоник 2f и 3f.

Кривые нарастания интегральной величины возмущения  $E_u$  (1-3) и максимальной величины в профиле пульсаций  $u_m'$  (4-6) приведены на фиг. 2 для режима  $f=96.4$  гц для основной моды и ее второй и третьей гармоник. На фиг. 3 показан характер нарастания интегральной энергии возмущения и его гармоник для случая введения волны с частотой  $f=81.4$  гц при двух значениях амплитуд: малой (1-3) и большой (4-6). Спектры для случая  $f=81.4$  гц средней амплитуды, измеренные вдоль линии  $y=\text{const}$  и поэтому характеризующие лишь в качественном отношении перераспределение энергии продольной компоненты пульсаций по спектру, изображены на фиг. 4.

2. Анализ всего полученного материала показывает, что процесс развития возмущения можно подразделить на несколько характерных этапов:

I — линейное и слабонелинейное развитие возмущения с началом генерации кратких высших гармоник без существенной трехмерности;

II — замедление роста возмущения, затухание его гармоник и появление в спектре низких частот и субгармоник;

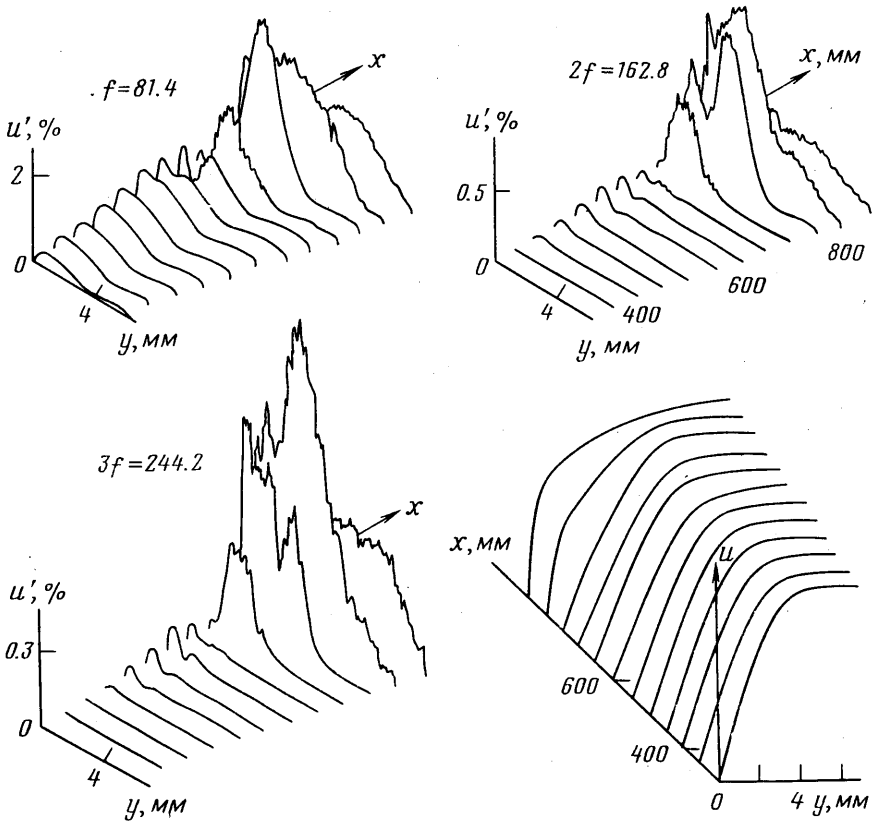
III — заполнение спектра в результате взаимодействия низкочастотных пульсаций с основной модой и ее высшими гармониками, сопровождающееся появлением сильной трехмерности и бурным ростом всех спектральных мод;

IV — затухание выделенных гармонических мод, выравнивания спектра и переход к турбулентному режиму.

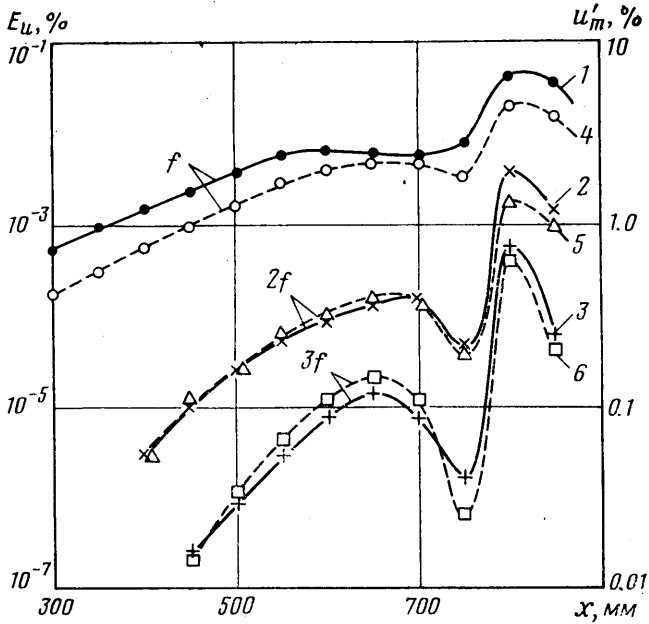
*Область I.* В режиме с частотой основной волны  $f=81.4$  гц с повышенной начальной амплитудой эта область простиралась до  $x=550$  мм (фиг. 3). Для режима с  $f=96.4$  гц конец этой области находился при  $x \approx 600$  мм (фиг. 2), а при введении возмущения с  $f=81.4$  гц с малой начальной амплитудой вся зона измерений находилась в этой области (фиг. 3).

Область I характеризуется монотонным ростом как максимальной амплитуды, так и общей энергии основной волны, генерацией и монотонным ростом высших гармоник (фиг. 1-3). Спектр возмущений в этой области состоит исключительно из основной волны и ее гармоник (фиг. 4). Профиль средней скорости соответствует профилю скорости в ламинарном пограничном слое.

Профили продольной составляющей скорости основной волны имеют вид, характерный для волны Толлмина — Шлихтинга (фиг. 1, 5). В начале развития волны профиль имеет максимумы в районе критического слоя, где скорость распространения волны равна средней скорости потока, и во

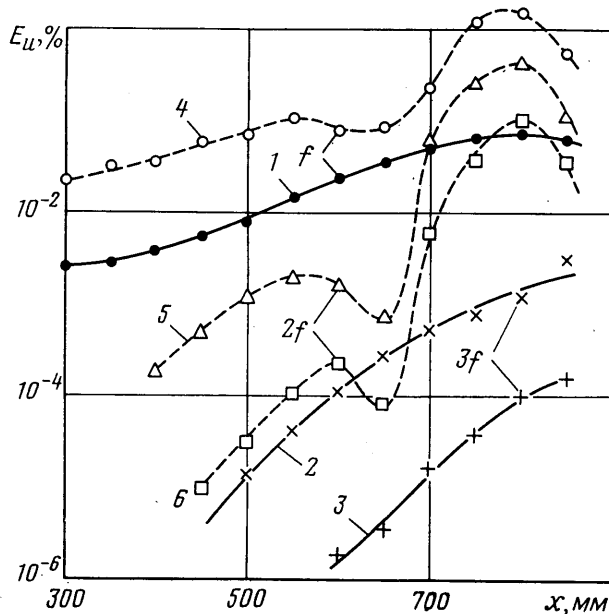


Фиг. 1



Фиг. 2

внешней части пограничного слоя. По мере движения вниз по потоку происходит искажение формы профиля: образуется провал в профиле, намечается образование второго внутреннего максимума, а имеющийся максимум смещается от критического слоя к стенке. Характерный вид профиля скорости основной волны и ее высших гармоник в конце области I изображен на фиг. 5 (масштаб ординаты произволен). Измерения про-



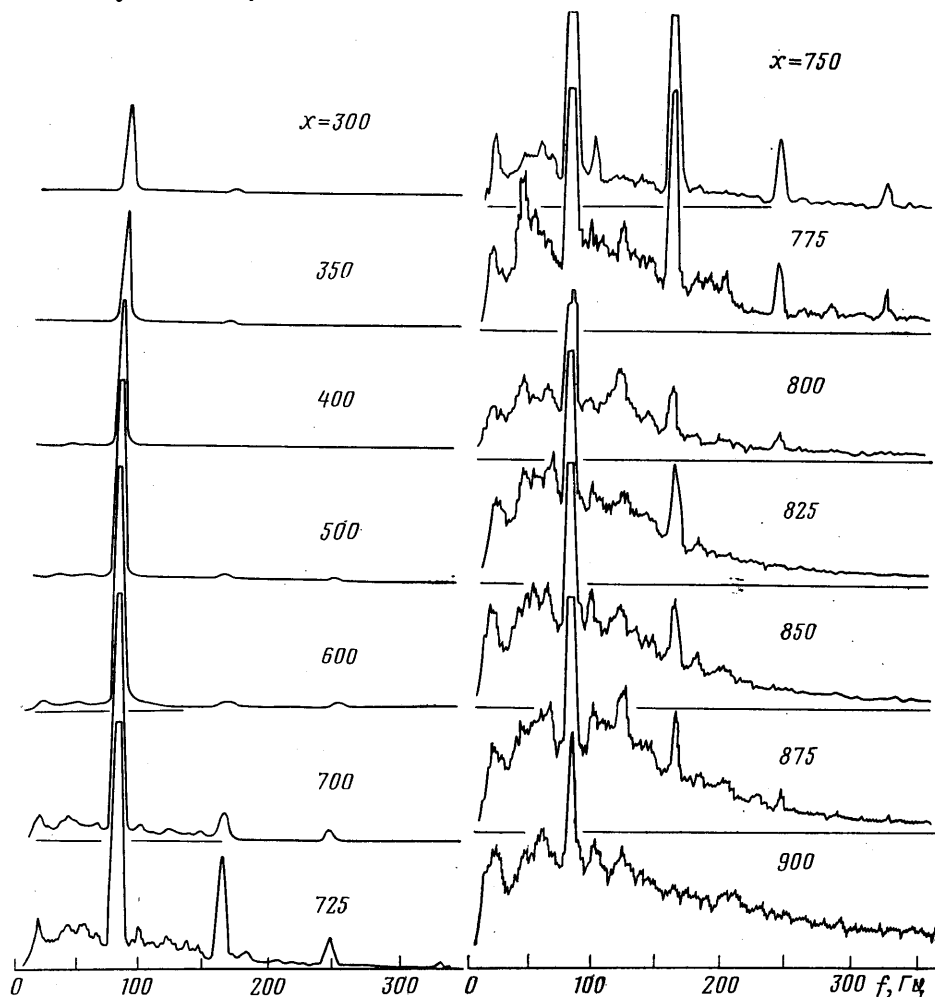
Фиг. 3

ведены для  $f=81.4$  гц,  $x=550$ ;  $\delta$  — измеренная толщина пограничного слоя,  $y_c$  — ордината критического слоя.

Описанное искажение формы профиля скорости волны Толмина — Шлихтинга наблюдалось ранее авторами при измерениях развития малых возмущений в линейной области между ветвями кривой нейтральной устойчивости [7]. Аналогичное искажение можно видеть в приведенных в литературе экспериментальных данных других авторов (см., например, фиг. 3 [8]), хотя внимания на него ранее не обращалось. Описанных областей в развитии профиля скорости основной волны не дает классическая линейная «локально-параллельная» теория гидродинамической устойчивости, не дает ее и нелинейная теория, учитывающая рост толщины пограничного слоя, но остающаяся на позициях локальной параллельности течения [9]. На развитии основной волны в области I сказывается слабая непараллельность течения в пограничном слое, следствием которой является существенная зависимость скоростей нарастания возмущения от расстояния от стенки [7, 10]. В частности, вблизи стенки скорость нарастания максимальна, что и приводит к характерному искажению профиля скорости основной волны. Скорость распространения основной волны во всей области I остается практически равной ее скорости распространения в области линейного развития.

Когда амплитуда основной волны достигает достаточно большого значения, начинается генерация второй гармоники, т. е. колебание с частотой, равной удвоенной частоте основной волны, а затем и других высших гармоник. Впервые вторая гармоника наблюдается вблизи стенки, т. е. ее генерация происходит в вязком пристеночном слое основной волны,

а не в его критическом слое, как часто предполагается в теоретических построениях. Как отмечалось выше, вблизи стенки в это время находится и максимум амплитуды основной волны.

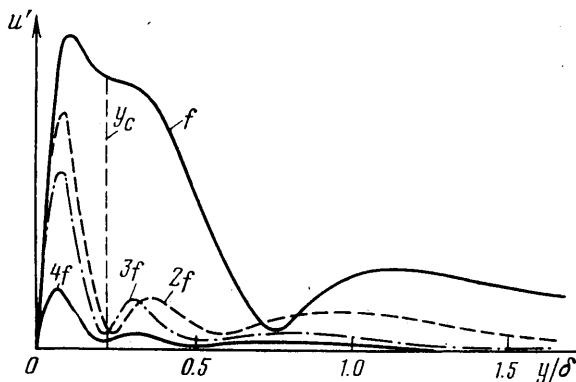


Фиг. 4

Проявление нелинейной активности возмущений имеет место значительно раньше, чем предполагалось ранее. В работах [3, 4] отмечалось, что отклонение закона развития основной волны от соответствующего линейной стадии имеет место, когда амплитуда второй гармоники составляет  $\sim 5\%$  амплитуды основной волны, при этом последняя составляет  $\sim 1-2\%$  скорости внешнего потока. Однако в этих работах измерения велись при движении нити термоанемометра на постоянном расстоянии от стенки  $y = \text{const}$  в районе линейного критического слоя. Из-за эффектов непараллельности такие измерения нельзя считать корректными для количественных оценок, к тому же оказывается, что в районе критического слоя амплитуда второй гармоники значительно меньше, чем в других частях пограничного слоя (Фиг. 5). Если же сравнивать максимальные значения амплитуд гармонических составляющих, то при значении амплитуды ос-

новой волны, равно  $\sim 1\%$ , амплитуда второй гармоники составляет  $\sim 10\%$  основной (фиг. 2), а  $\sim 5\%$  основной она составляет, когда амплитудой основной волны достигается всего  $0.5\%$  скорости внешнего потока.

Профиль скорости второй гармоники вначале имеет характерный максимум вблизи стенки, а при дальнейшем ее росте наблюдается второй характерный максимум выше критического слоя основной волны, а также максимум во внешней части пограничного слоя. Возможно, что второй максимум не наблюдается вначале вследствие его малости и невозможности поэтому выделить его из сигнала, обусловленного шумом приборов.



Фиг. 5

Минимум между вторым и третьим максимумами не совпадает с минимумом основной волны, т. е. амплитуда второй гармоники имеет заметные конечные значения, когда амплитуда основной волны почти равна нулю. Аналогичный характер имеют распределения амплитуд высших гармоник (фиг. 1, 5).

Возникает вопрос о природе измеренной второй гармоники: отражает ли результат измерения процесс нелинейного развития основной волны или имеет какую-либо другую причину? Вклад в измеренную величину второй гармоники может дать сама термоанемометрическая аппаратура. При малых значениях амплитуды основной волны и низких средних скоростях потока этот вклад может иметь ту же величину, что и амплитуда второй гармоники основной волны. Однако применение линейризатора практически удаляет этот возможный источник ошибки. Другим источником ошибки является возможность измерения возмущения с частотой, равной частоте второй гармоники, вносимого в поток вибрирующей лентой и развивающегося независимо от основной волны. Такие возмущения действительно фиксировались в начале зоны измерения, когда вторая гармоника основной волны очень мала. Измеренные возмущения затухали вниз по потоку в соответствии с линейной теорией до пренебрежимо малой величины (порядка шума приборов). Наблюдаемый при дальнейшем движении вниз по потоку рост возмущения этой частоты происходил в области ее линейного затухания. Поэтому приведенные данные действительно относятся ко второй гармонике основной волны.

Наличие трех максимумов в профиле скорости второй гармоники наблюдалось в измерениях работы [11]. Появление второго (среднего) максимума автор этой работы объясняет исключительно началом трехмерной активности возмущений — образования продольных вихрей Бенни — Лина, подробно исследованных в [4]. В данных экспериментах не было обнару-

жею заметной трехмерности поля возмущений в описываемой области, кроме того, хотя образование вихрей Бенни — Линя дает вклад во вторую гармонику, оно не объясняет аналогичного характера поведения высших гармоник. С другой стороны, «локально-параллельная» нелинейная теория развития плоских волн Толлмина — Шлихтинга, учитывающая рост толщины пограничного слоя [9], дает форму профилей продольных составляющих скорости второй и третьей гармоник, совпадающую с полученными в описываемых экспериментах данными. Как известно, линейная локально-параллельная теория гидродинамической устойчивости качественно правильно описывает процесс начального развития малых возмущений. Качественное согласование результатов описываемых экспериментов с результатами расчетов [9] дает основание полагать, что характерный вид профилей скорости второй и высших гармоник на начальной стадии их развития обусловлен главным образом нелинейным развитием плоской волны.

*Область II.* На определенной стадии развития скорость роста основной волны замедляется, а затем даже происходит ее слабое затухание. Это имело место при достижении максимумом амплитуды основной волны  $\sim 2\%$  скорости набегающего потока. При этом происходит затухание второй и третьей гармоник. Для частоты 81.4 *гц* эта область располагалась при  $550 \text{ мм} \leq x \leq 650 \text{ мм}$  (фиг. 1), а для частоты 96.4 *гц* — при  $700 \text{ мм} \leq x \leq 750 \text{ мм}$  (фиг. 2). Вплоть до конца этой области не наблюдается заметного искажения профиля средней скорости. В конце ее происходит искажение формы профилей пульсационных составляющих скорости, в частности имеет место развитие второго внутреннего максимума в профиле скорости основной волны и относительно быстрый рост второго максимума в профилях скорости высших гармоник.

В области II выделяются и начинают расти определенные низкочастотные возмущения, которые согласно линейной теории должны затухать. Они обнаруживаются при анализе спектров возмущений. В частности, на фиг. 4 для  $x=575 \text{ мм}$  можно видеть выделенную частоту  $f^*=15 \text{ гц}$ . Следует отметить, что рост низкочастотной части спектра перед переходом наблюдался при исследовании «естественного перехода». В данном случае характерные частоты этих пульсаций в каждом режиме были различны и не связаны с основной частотой. Они менялись как при изменении основной частоты, так и при изменении амплитуды основной волны при неизменной ее частоте. В то же время при выключении тока, подаваемого на ленточку, обнаружить их было невозможно. Это свидетельствует о том, что своим происхождением они не обязаны каким-либо внешним возмущениям типа турбулентности внешнего потока или вибрации пластины. В процессе дальнейшего развития спектра возмущений эти «случайные» пульсации играют существенную роль.

В конце области II начинает расти вся низкочастотная часть спектра. При этом всегда выделяется гармоника с частотой, равной половине частоты основной волны, так называемая субгармоника. На фиг. 4 она ясно видна в следующей области, при  $x=700 \text{ мм}$ . Субгармоника наблюдалась при всех вышеотмеченных исследуемых частотах основной волны, и ее наличие также проверялось специально при возбуждении других частот. Ранее генерация субгармоники обнаруживалась лишь в течениях с антисимметричными профилями скорости (слой смещения). В других течениях, в частности в симметричных следах, в пограничных слоях субгармоника не наблюдалась.

Генерация субгармоники в слоях смещения при достаточно большой амплитуде основной волны объясняется параметрическим резонансом основного периодического течения и вторичной волны [12]. Однако даже в

таких течениях более тщательные измерения показали генерацию субгармоники при амплитудах основной волны, значительно меньших, чем предсказывается теорией [13]. В работе [13] это объясняется возможным взаимодействием двух растущих волн Толлмина — Шлихтинга, одна из которых имеет частоту, равную половине частоты другой волны. Такой механизм не исключается и для течения в пограничном слое. Однако возможно также, что субгармоника является результатом трехволнового резонансного взаимодействия двумерной и пространственных волн [14]. Ввиду заметной роли субгармоники в дальнейшем процессе развития спектра возмущений было бы желательно изучение ее природы.

В области II начинается появляться зависимость средней и пульсационных скоростей от поперечной координаты  $z$ , но это проявление трехмерности еще невелико.

*Область III.* За областью II следует относительно узкая область, в которой фактически происходит разрушение ламинарного режима течения. Процессы, приводящие к разрушению ламинарного течения, протекают очень бурно. Как видно из фиг. 1–3, происходит резкий рост как основной волны, так и ее гармоник. Энергия основной волны на расстоянии  $50 \div 100$  мм увеличивается в 5–10 раз, а второй и третьей гармоник на 2–3 порядка. Анализ спектров показывает, что имеет место взаимодействие между выделившимся в области II низкочастотным возмущением и основной волной и ее гармониками. На фиг. 4 при  $x=675, 700$  и  $725$  мм ясно видны боковые частоты  $81.4 \pm 15$  гц, а при  $x=725$  мм можно видеть частоты  $2 \cdot 81.4 \pm 15$  гц. Во взаимодействие с основной волной и ее гармониками вступает также субгармоника с образованием частот, равных  $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$  и т. д. основной частоты. Частоту  $\frac{3}{2} \cdot 81.4$  гц можно видеть на фиг. 4 при  $x=725$  мм, а частоту  $\frac{5}{2} \cdot 81.4$  гц при  $x=775$  мм. Процесс взаимодействия пульсаций различных частот ведет к увеличению доли высокочастотных пульсаций и заполнению спектра. В конце области III наблюдается интенсивный рост всех составляющих спектра одновременно.

Профили средней скорости и пульсаций претерпевают в области III существенные изменения. Профили средней скорости теряют форму, характерную для ламинарного пограничного слоя и характеризуются наличием точек перегиба. В профилях пульсационных скоростей совершенно исчезает пристеночный максимум и бурно растет второй максимум. На фиг. 2 в этой области нанесены точки второго максимума.

В области III течение существенно трехмерное: имеют место резкие и значительные по амплитуде изменения как средней скорости, так и пульсационных скоростей по поперечной координате  $z$ . Поэтому приведенные здесь данные носят сугубо качественный характер.

*Область IV.* В этой области происходит окончательный переход к турбулентному режиму течения. В профилях средней скорости исчезают точки перегиба, профили все более наполняются и начинают приобретать форму, характерную для турбулентного пограничного слоя. Интенсивность выделенных гармоник плавно падает, а интенсивность высокочастотных пульсаций возрастает. Спектр сглаживается и становится сплошным, характерным для турбулентного режима.

Описанная последовательность нелинейных процессов, ведущих к переходу к турбулентности в пограничном слое, наблюдалась для всех исследуемых частот вводимых возмущений при начальной максимальной амплитуде (при  $x=400$  мм)  $0.4 \div 1.2\%$ . Подробные измерения профилей пульсаций продольной составляющей скорости и, особенно, спектрального состава поля возмущений позволили выявить ряд существенных характерных черт процесса перехода, не попавших в поле зрения предыдущих исследователей.



В первую очередь это относится к обнаружению генерации субгармоники, выделению «случайных» низкочастотных возмущений и выявлению большой роли процесса их взаимодействия с высшими гармониками основной волны в процессе перехода. В работе [4] было найдено, что непосредственно перед разрушением ламинарного течения амплитуда второй гармоники составляет ~20% амплитуды основной волны, а третьей ~8%, что в общем согласуется с результатами данных экспериментов. На основании этих измерений утвердилось мнение, что генерация высших гармоник не играет существенной роли для перехода в пограничном слое. Но, как видно из фиг. 2, в конце области III, когда гармоники еще выделяются из спектра, величина амплитуды второй гармоники по отношению к основной волне составляет 30—45% и третьей гармоники ~15%. А главная роль гармонических составляющих заключается не в их относительной величине, но в их взаимодействии с низкочастотными пульсациями, благодаря чему заполняется высокочастотная часть спектра.

В литературе делается резкое различие между двумя типами нелинейной активности возмущений и перехода [1, 4, 15]. Первый, «эволюционный» тип перехода, характеризующийся рождением гармоник, субгармоник и их взаимодействием без заметной роли трехмерности до самой последней стадии перехода, имеет место в неограниченных потоках — слоях смешения, струях, следах. Эксперименты по переходу в пограничных слоях показывали, что им присущ «катастрофический» характер перехода, характеризующийся появлением локализованных в пространстве всплесков высокочастотных пульсаций, приводящих к возникновению турбулентных пятен. Так называемая вторичная неустойчивость, благодаря которой появляются высокочастотные пульсации, оказалась тесно связанной с трехмерным разрушением начальной двумерной волны [3, 4]. Но, по-видимому, этот механизм перехода не является универсальным для пограничных слоев. Всплеск высокочастотных пульсаций не наблюдалось, в частности, при исследованиях перехода в пограничном слое с значительными поперечными изменениями толщины пограничного слоя [16].

В данных экспериментах проводились специальные подробные осциллографические измерения в различных сечениях пограничного слоя на различных расстояниях от стенки. Вторичной неустойчивости, т. е. всплеск высокочастотных пульсаций, подобных наблюдаемым в [3, 4], обнаружено не было. Переход в данном случае также можно назвать «катастрофическим» ввиду быстрого изменения характера и структуры течения в области III, но в то же время процесс в этой области является достаточно упорядоченным. Хотя, конечно, трехмерные эффекты в области III играют существенную роль, «двумерная составляющая» процесса перехода от начала развития вводимой плоской волны вплоть до конца области III в общих чертах оказалась очень похожей на «эволюционный» переход, присущий свободным пограничным слоям.

Поступила 1 XI 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Stuart J. T.* Stability of laminar flows. Fluid Dynamics Trans., vol. 5, pt 1. Warszawa, 1971.
2. *Stuartson K.* Some aspects of nonlinear stability theory. Fluid Dynamics Trans., vol. 7, pt 1. Warszawa, 1974.
3. *Klebanoff P. S., Tidstrom K. D.* Evolution of amplified waves leading to transition in a boundary layer with zero pressure gradient. NASA, Techn. Note, 1959, ND-195.
4. *Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M.* The threedimensional nature of boundary-layer instability. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt 1.
5. *Багаев Г. И., Голов В. К., Медведев Г. В., Поляков Н. Ф.* Аэродинамическая труба малых скоростей Т-324 с пониженной степенью турбулентности. В сб. «Аэрофизические исследования», вып. 1. Новосибирск, 1972.

6. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Экспериментальное исследование влияния охлаждения на устойчивость ламинарного пограничного слоя. Изв. СО АН СССР, Сер. техн. н., 1974, вып. 2, № 8.
  7. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Развитие колебаний малой амплитуды в ламинарном пограничном слое. Уч. зап. ЦАГИ, 1975, т. 6, № 5.
  8. Ross J. A., Barnes F. N., Burns J. G., Ross M. A. S. The flat plate boundary layer, pt 3. Comparison of theory with experiment. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, pt 4.
  9. Corner D., Barry M. D. J., Ross M. A. S. Non-linear stability theory of the flat plate boundary layer. Aeron. Res. Council. Curr. Paper, 1973 (1974), No. 1296.
  10. Bouthier M. Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles, pt 2. La couche limite de Blasius. J. Mecanique, 1973, vol. 12, No. 1.
  11. Barnes F. H. A hot-wire anemometer study of the effect of disturbances on laminar boundary layer on a flat plate. Ph. D. Thesis, Fac. Pure Sci., Univ. Edinburgh, 1966.
  12. Kelly R. E. On the stability of an inviscid shear layer which is periodic in space and time. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt. 4.
  13. Miksad R. W. Experiments on the non-linear stages of free-shear-layer transition. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt 4.
  14. Craik A. D. D. Non-linear resonant instability in boundary layers. J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, pt 2.
  15. Sato H. An experimental study of non-linear interaction of velocity fluctuations in the transition region of a two-dimensional wake. J. Fluid Mech., 1970, vol. 44, pt 4.
  16. Komoda H. Non-linear development of disturbance in a laminar boundary layer. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 9, pt 2.
-