

СМЕШЕНИЕ ДО МОЛЕКУЛЯРНОГО УРОВНЯ И РАЗВИТИЕ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В. Р. КУЗНЕЦОВ

(Москва)

На примере процесса воспламенения в потоках перемешанных горючих компонентов проанализировано влияние турбулентности на протекание химической реакции. Установлено, что этот процесс удобно описывать с помощью уравнения для распределения вероятностей температуры. Дан вывод этого уравнения и проанализированы его решения. В случае смешения в отсутствие химических реакций без привлечения эмпирических постоянных вычислена интенсивность пульсаций температуры. Получен критерий воспламенения.

1. Эффективность смешения в турбулентном потоке обычно характеризуется скоростью затухания неоднородностей в поле средней концентрации или температуры. Поэтому основные усилия в полуэмпирических теориях направлены на получение уравнения для осредненной концентрации. Однако такой подход мало эффективен в случае, когда в процессе турбулентного смешения происходят химические реакции, что связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, химическая реакция происходит, только если реагирующие вещества смешались до молекулярного уровня. Даже при равномерном распределении средней концентрации в турбулентном потоке могут существовать заметные пульсации концентрации, в силу чего процесс химического превращения будет далек от завершения независимо от абсолютного значения скорости реакции. Чтобы охарактеризовать степень смешения веществ до молекулярного уровня, необходимо знать распределение вероятностей концентрации.

Во-вторых, в уравнениях диффузии и теплопроводности содержатся нелинейные члены — скорости тепловыделения и образования различных веществ. При осреднении этих членов пульсации температуры и концентраций не учитываются и предполагается, что среднее значение скорости реакции совпадает со скоростью реакции при средних значениях термодинамических параметров. Затронутый вопрос проанализирован в [1, 2], где показано, что для химических реакций при горении влияние пульсаций может быть велико. Чтобы правильно учесть это влияние, необходимо знать соответствующее распределение вероятностей. Положение осложняется тем, что по мере протекания реакции само распределение вероятностей меняется. В силу сказанного, трудно надеяться на то, что это распределение будет универсальным.

Поэтому естественно получить уравнение для распределения вероятностей температуры и концентраций в турбулентном потоке с химическими реакциями. Решение этого уравнения будет полностью характеризовать развитие химических процессов в турбулентном потоке. В данной работе такой подход проиллюстрирован на простейшем примере (воспламенение в турбулентном слое смешения между безграничными плоскопараллельными потоками нагретого окислителя и холодного горючего).

Известно, что воспламенение имеет взрывообразный характер, что связано с очень резкой зависимостью скорости тепловыделения от темпера-

туры. В адиабатических условиях протекание реакции можно условно разделить на два периода: период медленного накопления тепла и период быстрого тепловыделения. Небольшое повышение температуры в начальном периоде приводит к сильному увеличению скорости тепловыделения, в результате чего процесс и становится взрывообразным.

В рассматриваемом случае (воспламенение в турбулентном слое смешения с переменной температурой) анализируемый процесс имеет ряд особенностей. Во-первых, химическая реакция происходит в неадиабатических условиях и поэтому теплоотвод играет существенную роль. Во-вторых, поскольку температура одного из потоков велика, то воспламенение происходит вблизи границы слоя смешения. В этой области существенна перемежаемость и пульсации концентрации велики. Например, на краю затопленной струи интенсивность пульсаций концентрации достигает 400% [3]. При наличии перемежаемости температуры нетурбулентной жидкости имеет отличную от нуля вероятность, т. е. на краю слоя смешения в течение ненулевых промежутков времени реализуется максимальное значение температуры. В эти промежутки времени реакции не происходит, так как отсутствует один из горючих компонентов. Реакция протекает только внутри слоя смешения, отделенного от основных потоков искривленными, нестационарными границами. В-третьих, из-за резкой зависимости скорости тепловыделения от температуры химическая реакция сосредоточена в узкой зоне, непосредственно прилегающей к границе между турбулентной и нетурбулентной жидкостями.

При воспламенении в слое смешения между нагретым и холодным потоками процесс тепловыделения можно разбить на два этапа. В начальных сечениях слоя смешения тепловыделение мало и поэтому профиль температуры (имеется в виду неосредненная температура) монотонный. Затем по мере увеличения скорости реакции в профиле возникает максимум, который можно трактовать как начало фронта пламени. Анализ, проведенный в данной работе, ограничивается первоначальным этапом (до появления максимума). Основным интерес будет представлять состояние от точки слияния потоков до того сечения, в котором возникает максимум.

Известно, что в адиабатических условиях период индукции (и, следовательно, скорость тепловыделения) слабо зависит от концентраций горючих компонентов и определяется температурой смеси. Такая зависимость связана с цепным характером химических реакций. Точный учет деталей химической кинетики в настоящее время затруднителен. Чтобы обойти указанную трудность, воспользуемся суммарной кинетикой, которую обычно можно представить в виде $W = k_0 \exp(-E/RT)$. Здесь W — скорость тепловыделения, k_0 — постоянная, E — энергия активации, R — газовая постоянная, T — температура.

Формальное использование этой формулы приводит к тому, что тепловыделение происходит не только в слое смешения, но в нетурбулентной жидкости, в которой реакция отсутствует. Чтобы избежать этого противоречия, будем считать, что в нетурбулентной жидкости, т. е. при $T = T_1$ (T_1 — температура горячего потока), скорость тепловыделения равна нулю, а в турбулентной жидкости ($T < T_1$) описывается приведенной выше формулой.

Вместо температуры введем величину $\theta = (T_1 - T)/(T_1 - T_2)$ (T_2 — температура холодного потока). Поскольку обычно $E/RT_1 \gg 1$, то можно воспользоваться известным преобразованием [4], т. е. показатель экспоненты в формуле для W разложить в ряд Гейлора при $T = T_1$. Тогда

$$(1.1) \quad W = k \exp(-n\theta) \quad (\theta > 0), \quad W = 0 \quad (\theta \leq 0)$$

$$k = k_0 \exp(-E/RT_1), \quad \theta = (T_1 - T)/(T_1 - T_2), \quad n = E(T_1 - T_2)/RT_1^2 \gg 1$$

Поскольку $n \gg 1$, то функция W практически отлична от нуля только при $\theta \sim 1/n$. Зависимость (1.1) справедлива только на начальной стадии процесса ($0 \leq \theta \leq 1$).

Дальнейшая задача состоит в получении уравнения для распределения вероятностей величины θ . Предполагается, что числа Рейнольдса и Пекле велики, а плотность, теплоемкость и коэффициент температуропроводности постоянны. Учет зависимости этих величин от температуры возможен. При этом не возникает принципиально новых эффектов, но сильно усложняются выкладки.

2. Уравнения для распределения вероятностей различных характеристик турбулентности изучались в [5-8]. Поскольку в этих работах химические реакции не учитывались, то целесообразно специально рассмотреть случай, когда в потоке имеются тепловые источники. В указанных ранее предположениях уравнение теплопроводности имеет вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = a \Delta \theta - W(\theta) \quad (l=1, 2, 3)$$

Здесь t — время, u — скорость, x — координата, a — коэффициент температуропроводности.

Введем величину $\varphi = \exp(i\lambda\theta)$, где λ — произвольное действительное число. Очевидно, что $f = \langle \varphi \rangle = \int \varphi P(\theta) d\theta$ — характеристическая функция плотности распределения вероятностей температуры $P(\theta)$. Дифференцируя φ по t , выражая $\partial \varphi / \partial t$ из (2.1) и осредняя, получим

$$(2.2) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i \varphi \rangle = a \Delta f + \lambda^2 \langle N \varphi \rangle - i \lambda \langle W \varphi \rangle, \quad N = a (\partial \theta / \partial x_i)^2$$

Поясним смысл отдельных членов в (2.2). Так как рассматривается стационарный процесс, то $\partial f / \partial t = 0$. Второй член в левой части (2.2) описывает процесс переноса тепла осредненным движением и турбулентной диффузией. Первые два члена в правой части характеризуют влияние молекулярной диффузии. Член $a \Delta f$ описывает молекулярный перенос осредненных параметров. При больших числах Рейнольдса он мал и поэтому в дальнейшем не учитывается. Корреляция $\langle N \varphi \rangle$ характеризует затухание пульсаций температуры из-за смешения до молекулярного уровня. Последний член в правой части (2.2) характеризует тепловыделение. Поскольку W зависит только от θ , то корреляция $\langle W \varphi \rangle$ точно выражается через исходные характеристики. Корреляции $\langle u_i \varphi \rangle$ и $\langle N \varphi \rangle$ не выражаются через f . Поэтому для получения замкнутого описания необходимы дополнительные соображения.

Рассмотрим величину $\langle u_i \varphi \rangle$. Задача состоит в том, чтобы связать $\langle u_i \varphi \rangle$ с f , или с $P(\theta)$. Один из возможных подходов сформулирован в [9, 10], где предполагалось, что $\langle u_i \varphi \rangle = \langle u_i \rangle \langle \varphi \rangle - D_i \partial f / \partial x_i$. (Здесь D_i — коэффициент турбулентной диффузии.) Эта формула является обобщением соотношений, хорошо известных в полуэмпирической теории турбулентности. Действительно, дифференцируя это соотношение k раз по λ и полагая $\lambda = 0$, получаем $\langle u_i \theta \rangle = \langle u_i \rangle \langle \theta \rangle - D_i \partial \langle \theta \rangle / \partial x_i$ ($k=1$), $\langle u_i \theta^2 \rangle = \langle u_i \rangle \langle \theta^2 \rangle - D_i \partial \langle \theta^2 \rangle / \partial x_i$ ($k=2$). Отсюда видно, что коэффициенты турбулентной диффузии тепла и пульсаций температуры равны друг другу, что, вообще говоря, неверно. Заметим, что в полуэмпирических теориях используются разные значения коэффициентов диффузии этих величин.

Другой подход, который будет использован в данной работе, сформулирован в [8, 11]. Пусть $P_1(u, \theta)$ — плотность распределения вероятностей скорости и температуры. Тогда

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \langle u_i \varphi \rangle &= \int u_i \varphi P_1 d^2 u d\theta = \int \varphi P(\theta) \int P_2(u|\theta) u_i d^2 u d\theta = \\ &= \int \varphi v_i(\theta) P(\theta) d\theta, \quad v_i(\theta) = \int P_2(u|\theta) u_i d^2 u \end{aligned}$$

Здесь P_2 — плотность распределения вероятностей скорости при условии, что в данной точке температура равна θ . Величина $v_i(\theta)$ — средняя скорость, с которой в данной точке движется малый объем жидкости, имеющей температуру θ . Предположим, что

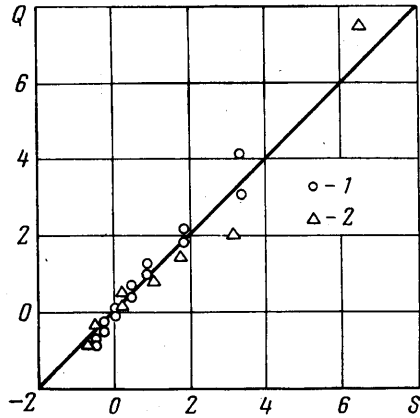
$$(2.4) \quad v_i = A_i + B_i(\theta - \langle \theta \rangle)$$

Здесь A и B зависят только от координат. Умножим (2.4) на $(\theta - \langle \theta \rangle)^k P(\theta)$ ($k=0, 1$). Интегрируя по всем θ , получаем

$$(2.5) \quad A_i = \langle u_i \rangle \quad (k=0), \quad B_i = q_i \sigma^{-2} \quad (k=1)$$

$$q_i = \langle (u_i - \langle u_i \rangle) (\theta - \langle \theta \rangle) \rangle, \quad \sigma^2 = \langle (\theta - \langle \theta \rangle)^2 \rangle$$

Проанализируем предположение (2.4). Это соотношение является точным, если распределение вероятностей скорости и температуры описывается нормальным законом. Результаты непосредственного измерения величины v_i приведены в [12]. Эти измерения проведены вблизи оси затопленной круглой струи. Они хорошо подтверждают принятое предположение. Справедливость формул (2.4), (2.5) можно проверить косвенным образом. Умножим (2.4) на $(\theta - \langle \theta \rangle)^2 P(\theta)$ и проинтегрируем по всем θ . Имеем $\langle (u_i - \langle u_i \rangle) (\theta - \langle \theta \rangle)^2 \rangle = q_i \sigma S$, $S = \langle (\theta - \langle \theta \rangle)^3 \rangle \sigma^{-3}$. Результаты измерений отдельных величин в этой формуле приведены в [13, 20] (след за цилиндром), [14] (осесимметричная спутная струя). Результаты сопоставления найденного соотношения с экспериментальными данными приведены на фиг. 1 в виде зависимости $Q = \langle (u_2 - \langle u_2 \rangle) (\theta - \langle \theta \rangle)^2 \rangle q_2^{-1} \sigma^{-1}$ от S . Здесь индексом 2 обозначено поперечное направление; точка 1 соответствует работам [13, 20], 2 — работе [14]; сплошной линией изображена зависимость $Q=S$, вытекающая из (2.4). Коэффициент асимметрии принимает отрицательные значения вблизи оси или плоскости симметрии течения, а большие положительные значения S достигаются в областях, где существенна перемежаемость. Из фиг. 1 видно, что в целом экспериментальные данные удовлетворительно описываются зависимостью, вытекающей из (2.4).



Фиг. 1

Следовательно, формулу (2.4) можно в первом приближении использовать при отыскании распределения вероятностей пассивной примеси. При наличии химической реакции, вообще говоря, должны быть отклонения от формулы (2.4). Однако в данной работе рассматривается лишь начальная стадия процесса, на которой изменения температуры малы. Поэтому можно ожидать, что (2.4) останется справедливой и в анализируемом случае. Таким образом, в (2.2) найден один из неизвестных членов: корреляция $\langle u_i \phi \rangle$ связана с P и v формулой (2.3), а v определяется из (2.4), (2.5).

Найдем теперь корреляцию $\langle N \phi \rangle$. Пусть $P_3(N, \theta)$ — плотность распределения вероятностей N и θ . Заметим, что из-за перемежаемости значения $\theta=0$ и $N=0$ наблюдаются с отличной от нуля вероятностью. Поэтому величины P и P_3 имеют вид

$$(2.6) \quad P(\theta) = (1-\gamma)\delta(\theta) + \gamma P_t(\theta), \quad P_z(N, \theta) = (1-\gamma)\delta(\theta)\delta(N) + \gamma P_{zt}(N, \theta)$$

Здесь δ — дельта-функция, γ — коэффициент перемежаемости. Индекс t соответствует турбулентной жидкости. Имеем

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \langle N\varphi \rangle &= \int N\varphi P_s dN d\theta = \gamma \int N\varphi P_{zt} dN d\theta = \\ &= \gamma \int \varphi P_t(\theta) \int NP_{t_i}(N|\theta) dN d\theta = \gamma \int \varphi N_0(\theta) P_t(\theta) d\theta \\ N_0(\theta) &= \int P_t(N|\theta) N dN \end{aligned}$$

Здесь P_{t_i} — плотность распределения вероятностей величины N при условии, что в данной точке находится турбулентная жидкость с температурой θ . Величина N_0 — скалярная диссипация, осредненная по таким промежуткам времени, когда температура в данной точке равна θ .

Проанализируем сначала случай, когда химические реакции отсутствуют. При очень больших числах Рейнольдса статистические характеристики величины N (т. е. квадрата градиента температуры) зависят от наиболее мелких вихрей, а статистические характеристики температуры определяются энергосодержащими вихрями. Исходя из теории А. Н. Колмогорова — А. М. Обухова [15, 16], можно предположить, что характеристики энергосодержащих вихрей и наиболее мелких вихрей и, следовательно, величины φ и N статистически независимы. Из этой гипотезы следует, что N_0 не зависит от θ . Таким образом, для примеси, не участвующей в реакции, получаем

$$(2.8) \quad N_0(\theta) = \langle N \rangle_t = \langle N \rangle / \gamma$$

Если в потоке происходит химическая реакция, гипотезу (2.8) следует видоизменить. Здесь уместно напомнить, что при $n \gg 1$ скорость тепловыделения (1.1) имеет специфический вид: $W \sim 0$ при $\theta \gg 1/n$ и $W \gg 1$ при $\theta \sim 1/n$. Так как скорость тепловыделения мала почти при всех значениях θ , то можно предположить, что на начальной стадии реакции (до появления температурного максимума) тепловыделение будет слабо сказываться на структуре поля θ для всех $\theta \gg 1/n$. В связи со сказанным будем считать, что (2.8) справедливо при $\theta \gg 1/n$.

В области $\theta \sim 1/n$ тепловыделение должно сильно сказываться на структуре поля θ . Степень этого влияния увеличивается при $n \rightarrow \infty$. В пределе при сохранении общего количества выделившегося тепла ($\int w d\theta = \text{const}$, $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$) толщина зоны, в которой происходит реакция, стремится к нулю, а производная от температуры по нормали к этой зоне терпит разрыв. Заметим, что качественно похожее распределение температуры реализуется в зоне реакции нормального фронта пламени, распространяющегося по гомогенной горючей смеси. Этот процесс проанализирован в [4], где показано, что при $n \gg 1$ в зоне химических реакций уравнение теплопроводности (2.1) приобретает вид

$$(2.9) \quad a\Delta\theta - W(\theta) = 0, \quad \theta \sim 1/n$$

т. е. в зоне реакции конвективной теплопередачей можно пренебречь.

Так как зона реакции расположена вблизи поверхности $\theta = \text{const}$ ($\text{const} \sim 1/n$), то производные от температуры вдоль этой поверхности малы. Тогда выбрав такую систему координат, в которой направление оси x_1 и направление нормали к поверхности совпадают, приводим (2.9) к виду $a\partial^2\theta/\partial x_1^2 = W(\theta)$ или $dN/d\theta = 2W$. Поскольку в это соотношение не входят случайные параметры, функцию N можно отождествить с N_0 . Поэтому $dN_0/d\theta = 2W$ при $\theta \sim 1/n$. Как уже указывалось, при $\theta \gg 1/n$ реакция слабо

влияет на распределение температуры. Следовательно, $N_0 = \langle N \rangle_i$ при $\theta \gg 1/n$. Тогда

$$(2.10) \quad N_0 = \langle N \rangle_i - 2 \int_0^1 W d\theta$$

Отметим, что входящая в (2.10) величина $\langle N \rangle_i$ является значением скалярной диссипации, осредненной по турбулентной жидкости в случае, когда реакция отсутствует. Таким образом, в (2.2) найден второй неизвестный член: корреляция $\langle N\varphi \rangle$ связана с P формулами (2.6) и (2.7), в которых N_0 дается соотношением (2.10).

Рассмотрим теперь корреляцию $\langle W\varphi \rangle$. Так как в нетурбулентной жидкости реакции не происходит, то

$$(2.11) \quad \langle W\varphi \rangle = \gamma \int WP_i \varphi d\theta$$

Из (2.2) — (2.7), (2.11), используя обратное преобразование Фурье, находим искомое уравнение

$$(2.12) \quad \langle u_i \rangle \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} (\theta - \langle \theta \rangle) P] = -\gamma \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} N_0 P_i + \gamma \frac{\partial}{\partial \theta} WP_i$$

В этом соотношении связь между P и P_i дается формулой (2.6), величины W и N_0 определяются из (1.1) и (2.10). Параметры $\langle u_i \rangle$ и γ являются чисто гидродинамическими характеристиками и в рамках теории, цель которой — определение распределения температуры, должны быть заданы. Величины q_i и $\langle \theta \rangle$ связаны уравнением для осредненной температуры, которое получается из (2.12) интегрированием по всем θ . Таким образом в (2.12) входят три неизвестных параметра: $\langle \theta \rangle$, σ , $\langle N \rangle$. Можно показать (это будет сделано ниже), что имеющее физический смысл решение уравнения (2.12) существует лишь при определенной связи между $\langle \theta \rangle$, σ , $\langle N \rangle$. Заметим также, что в случае $W=0$ уравнение (2.12) справедливо для любого течения струйного типа. В случае $W \neq 0$ реакция должна удовлетворять следующим условиям: 1) скорость тепловыделения зависит только от температуры; 2) зона химических реакций очень тонкая; 3) тепловыделение не приводит к сильному изменению поля температуры.

3. Проанализируем случай $W=0$. Проведенное ниже рассмотрение будет справедливо для любого течения струйного типа. Так как $W=0$, то $N_0 = \langle N \rangle_i$ и не зависит от θ . Умножим (2.12) на θ , проинтегрируем по θ от $-\alpha$ до $+\alpha$ и устремим α к нулю. Получаем $N_0(0) [P_i(-0) - P_i(+0)] = 0$. Поскольку $P_i=0$ при $\theta < 0$, то

$$(3.1) \quad P_i(0) = 0$$

Так как $P = \gamma P_i$ при $\theta > 0$, то из (2.12) находим

$$(3.2) \quad \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma P_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [q_i \sigma^{-2} (\theta - \langle \theta \rangle) \gamma P_i] = -\gamma \langle N \rangle_i \frac{\partial^2 P_i}{\partial \theta^2}$$

В области, находящейся на краю потока, т. е. там, где существенна перемежаемость, можно легко найти приближенное решение. Хорошо известно, что величины, осредненные по турбулентной жидкости, изменяются слабо [17]. Анализ экспериментальных данных, например [3], показывает, что $\partial \gamma / \partial x_2$ примерно на порядок превышает $\partial \langle \theta \rangle_i / \partial x_2$ и $\partial \sigma_i / \partial x_2$ ($\sigma_i^2 = \langle (\theta \langle \theta \rangle_i)^2 \rangle_i$). Поэтому в (3.2) можно пренебречь $\partial P_i / \partial x_i$ по сравнению с $\partial \gamma / \partial x_i$. Поскольку $\gamma \langle N \rangle_i = \langle N \rangle$, то имеем

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 P_i}{\partial \theta^2} + (a_1 - b_1 \theta) P_i = 0, \quad a_1 = a_0 / \langle N \rangle, \quad b_1 = b_0 / \langle N \rangle$$

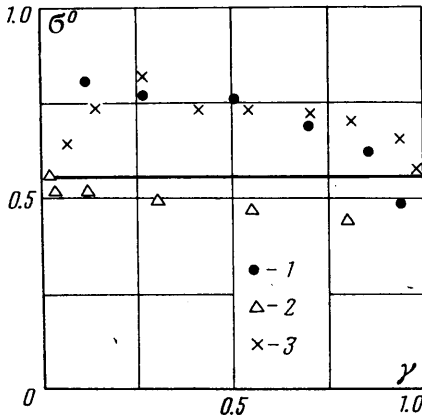
$$a_0 = \langle u_i \rangle \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} q_i \sigma^{-2} \gamma \langle \theta \rangle, \quad b_0 = - \frac{\partial}{\partial x} q_i \sigma^{-2} \gamma$$

В рассматриваемой области величина $\langle \theta \rangle_i$ мала. Кроме того, как показывают экспериментальные данные [3], $\sigma_i \sim \langle \theta \rangle_i$. Поэтому функция P_i практически отлична от нуля только при малых θ . В силу сказанного второе краевое условие можно поставить не при максимально возможных θ ($\theta=1$), а при $\theta=\infty$. Очевидно, что $P_i(\infty)=0$. Тогда из (3.3) получаем

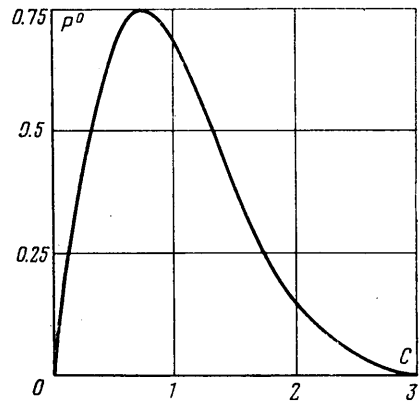
$$(3.4) \quad P_i = B \text{Ai}[b_i^{1/3}(\theta + a_i/b_i)]$$

Здесь B — произвольная постоянная, которая находится из условия нормировки $\int_0^\infty P_i d\theta = 1$, Ai — функция Эйри.

Из (3.1), (3.4) имеем $\text{Ai}(a_i b_i^{-2/3}) = 0$. Следовательно, решение существует не при всех a_i и b_i , т. е. не при всех $\langle \theta \rangle_i$, σ , $\langle N \rangle_i$. Уравнение $\text{Ai}(a_i b_i^{-2/3}) = 0$ имеет счетное число корней, таких, что $a_i b_i^{-2/3} < 0$. Физическим смыслом обладает лишь наибольший корень (при всех других значениях $a_i b_i^{-2/3}$ решение осциллирует в интервале $0 < \theta < \infty$). Таким образом, решение зависит лишь от одного параметра, имеющего размерность темпе-



Фиг. 2



Фиг. 3

ратуры. Отсюда следует, что безразмерные комбинации из любых моментов, и в частности интенсивность пульсаций температуры в турбулентной жидкости $\sigma^0 = \sigma_i / \langle \theta \rangle_i$, должны быть постоянными числами, которые находятся из решения краевой задачи. Для величины σ^0 расчет дает значение 0.555. Результаты сопоставления предсказанного значения с экспериментальными данными приведены на фиг. 2 в виде зависимости σ^0 от γ . Здесь 1 — след за цилиндром [20], 2 — спутная струя [14], 3 — затопленная струя [3]. Сплошной линией изображена предсказанная зависимость. Результаты расчета величины P_i приведены на фиг. 3 в виде зависимости $P^0 = \langle \theta \rangle_i^{-1} P_i$ от $c = \theta / \langle \theta \rangle_i$.

Таким образом, проведенный анализ показывает, что уравнение для P имеет обладающее физическим смыслом решение не при всех значениях входящих в него параметров. Условие существования такого решения позволяет найти ряд характеристик пульсаций температуры без использования эмпирических постоянных.

4. Рассмотрим случай, когда в турбулентном слое смешения происходит химическая реакция. Характер решения существенно зависит от параметра $\langle N \rangle_i$, который, как уже указывалось, в каждом сечении примерно постоянен. Для оценки величины $\langle N \rangle_i$ используем соотношение

$$(4.1) \quad \langle N \rangle_i = \beta \sigma_i^2 \sigma_u / L$$

Здесь $\sigma_u^2 = \frac{1}{3} \langle (u_i - \langle u_i \rangle)^2 \rangle$, L — масштаб турбулентности, β — число порядка единицы.

В слое смешения величины σ_i и σ_u примерно постоянны, $L \sim x_1$, где x_1 — расстояние от рассматриваемого сечения до точки слияния потоков. В сечениях, находящихся на небольшом расстоянии от точки слияния потоков, $\langle N \rangle_i$ велико (x_1 мало) и поэтому в силу (2.10) имеем $N_0 > 0$. По мере увеличения x_1 значение $\langle N \rangle_i$ уменьшается и при некотором $x_1 = x_1^\circ$ выполняется равенство $N_0 = 0$ при $\theta = 0$ ($N_0 > 0$ при $\theta > 0$). При $x_1 > x_1^\circ$ формула (2.10) неверна, так как она дает значения $N_0 < 0$. Проанализируем развитие процесса при $x_1 < x_1^\circ$.

Легко показать, что условие (3.1) сохраняется и в анализируемом случае, если только $N_0(0) \neq 0$ ($x_1 < x_1^\circ$). Для начальной стадии процесса (до появления температурного максимума, после чего реакция начинает развиваться очень быстро), уравнение (2.12) можно решать методом, использованным в предыдущем разделе, т. е. можно пренебречь $\partial P_i / \partial x_1$ по сравнению с $\partial \gamma / \partial x_1$. Из (2.12) получаем

$$(4.2) \quad \gamma \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} N_0 P_i - \gamma \frac{\partial}{\partial \theta} W P_i + (a_0 - b_0 \theta) P_i = 0$$

Легко видеть, что в пространстве θ существует своеобразный пограничный слой, расположенный при $\theta \sim 0$ и имеющий толщину порядка $1/n$. Внутри слоя значение W велико и, как видно из (2.10), величина N_0 меняется резко. Поэтому в (4.2) первые два члена велики. С другой стороны, в силу (2.1) последний член в (4.2) мал. Поэтому при $\theta \sim 1/n$ формула (4.2) приобретает вид

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} N_0 P_i - \frac{\partial}{\partial \theta} W P_i = 0$$

Вне пограничного слоя W мало и, как вытекает из (2.10), уравнение (4.2) переходит в соотношение (3.3). Задача состоит в том, чтобышить решения обоих уравнений. Из (2.10), (3.1), (4.3) имеем

$$P_i = B N_0^{-1/2} \int_0^\theta N_0^{-1/2} d\theta,$$

$$s = P_i / P_i' = \int_0^\theta N_0^{-1/2} d\theta / \left[N_0^{-1/2 - 1/2} N_0' N_0^{-1} \int_0^\theta N_0^{-1/2} d\theta \right]$$

Здесь B — произвольная постоянная.

Решения уравнений (3.3) и (4.3) следует сшивать в области $1/n \ll \theta \ll 1$.

Если $x_1 < x_1^\circ$ ($N_0 > 0$), то в этой области $\int_0^\theta N_0^{-1/2} d\theta \sim 1/n$ и, следовательно,

$s \sim 1/n$. Отсюда видно, что при $n \gg 1$ и $x_1 < x_1^\circ$ значение P_i на границе пограничного слоя мало. Поскольку и толщина этого слоя мала, то в случае с химической реакцией при $\theta \gg 1/n$ распределение вероятностей близко к (3.5); поправки к этой формуле порядка $1/n$.

Рассмотрим теперь сечение $x_1 = x_1^\circ$. В этом сечении $N_0 = 0$ при $\theta = 0$ и $N_0 > 0$ при $\theta > 0$. Так как $N_0(0) = 0$, то граничное условие (3.1), вообще говоря, не сохраняется. Легко видеть, что ни одно из решений уравнения (4.2) не удовлетворяет граничному условию (3.1), если $N_0(0) = 0$. Таким образом, при переходе через сечение $x_1 = x_1^\circ$ происходит скачкообразное изменение распределения вероятностей: $P_i(0) = 0$ при $x_1 < x_1^\circ$ и $P_i(0) > 0$

при $x_1 = x_1^\circ$. Такое скачкообразное изменение вероятности P_i и, следовательно, температуры характерно для процесса воспламенения в неадиабатических условиях. При этом возможны два режима: при большом теплоотводе (который в данном случае характеризуется значением N_0) температура мала и реакция идет с пренебрежимо малой скоростью, а по мере уменьшения теплоотвода (уменьшении N_0) температура и скорость реакции скачкообразно возрастают. Следовательно, скачкообразное изменение решения в сечении $x_1 = x_1^\circ$ можно трактовать как появление пламени. Критерием его возникновения, очевидно, служит равенство

$$(4.4) \quad \langle N \rangle_i = 2 \int_0^1 W d\theta$$

Проанализируем это соотношение. Входящий в него интеграл от скорости тепловыделения удобно выразить через время задержки воспламенения в адиабатических условиях, т. е. через время τ , за которое температура повышается на величину RT_1^2/E (θ меняется от 0 до $-1/n$). В адиабатических условиях имеем $d\theta/dt = -W$. Учитывая (1.1), отсюда находим

$$\tau = \int_{-1/n}^0 W^{-1} d\theta = (e-1)k^{-1}n^{-1}. \text{ Используя это выражение, из (4.1) и (4.4)}$$

$$\text{получим } \int_0^1 W d\theta = kn^{-1}(e-1)n^{-2}\tau \text{ и}$$

$$(4.5) \quad \beta \sigma_i^2 \sigma_u L^{-1} = 2(e-1)n^{-2}\tau^{-1}$$

Поскольку $L \sim x_1$, $\sigma_u \sim \langle u \rangle$, $\sigma_i \sim 1$, расстояние до фронта пламени пропорционально скорости потока и периоду задержки воспламенения в адиабатических условиях. Влияние этих факторов очевидно и не требует специальных комментариев. Искусственная турбулизация потока (увеличение пульсационной скорости σ_u при неизменной средней скорости) ухудшает условия воспламенения. В рамках развиваемой теории влияние σ_u понятно: при увеличении σ_u возрастает скалярная диссипация, увеличиваются пульсации градиента температуры и, следовательно, возрастает теплоотвод от зоны реакции. Этот вывод косвенно согласуется с результатами опытов [18, 19]. В [18] исследовалось искровое воспламенение однородной смеси и установлено, что увеличение интенсивности турбулентности приводит к увеличению минимальной энергии искрового воспламенения. В [19] изучалось воспламенение за ударной волной в аэродинамической трубе. Воспламенение происходило в пограничном слое на стенках трубы. Если пограничный слой становился турбулентным, то смесь не воспламенялась

В формулу (4.5) входит также параметр n . Появление его связано с тем, что реакция развивается в неадиабатических условиях. Увеличение этого параметра при $\tau = \text{const}$ приводит к ухудшению условий воспламенения.

При $x_1 > x_1^\circ$ развитая теория несправедлива, так как температура вдоль зоны реакции сильно меняется. По этой причине нарушится формула (2.4) (распределение θ сильно отличается от распределения концентрации пассивной примеси), станет неверным соотношение (2.10) (появятся большие градиенты температуры вдоль зоны реакции), а метод решения уравнения (4.2) будет непригоден (значения $\partial P / \partial x_i$ велики).

В заключение отметим, что развитие процесса воспламенения в турбулентном потоке существенно зависит от скалярной диссипации. Можно предположить, что роль этого параметра будет велика не только в рассмотренном случае, но и всегда, когда химические реакции сосредоточены

в узких зонах. Отсюда ясно, что теория химических процессов в турбулентном потоке должна развиваться в тесном взаимодействии с теорией локально-однородной турбулентности, в которой параметр N также играет важную роль.

Поступила 11 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. Р. Влияние флуктуаций температур и концентраций на среднюю скорость химической реакции в турбулентном потоке. В сб. «2-й Всесоюзный симпозиум по горению и взрыву». 1969. (Автореф. докл.) Черноголовка, 1969.
2. Кузнецов В. Р. Влияние пульсаций температур и концентраций на задержку воспламенения в турбулентном потоке. В кн. «Горение и взрыв». М., «Наука», 1972.
3. Becker H. A., Hottel H. C., Williams G. C. The nozzle-fluid concentration field of the round, turbulent, free jet. J. Fluid Mech., 1967, vol. 30, pt 2.
4. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. химии, 1938, т. 12, № 1.
5. Монин А. С. Уравнения турбулентного движения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
6. Кузнецов В. Р. О плотности вероятности разности скоростей в двух точках одно-родного, изотропного турбулентного потока. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
7. Йевлев В. М. Приближенные уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
8. Кузнецов В. Р. Вероятность концентрации пассивной примеси в турбулентных потоках с поперечным сдвигом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
9. Кузнецов В. Р., Фрост В. А. Распределение вероятностей концентрации и перемежаемость в турбулентных струях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2.
10. Фрост В. А. Модель турбулентного диффузионного факела пламени. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1973, № 6.
11. Dorazo C. Probability density function approach for a turbulent axisymmetric heated jet. Phys. Fluids, 1975, vol. 18, No. 4.
12. Безуглов В. А. Измерение скорости переноса концентрации. Тр. 20-й научн. конф. МФТИ. Долгопрудный, 1975.
13. Freymuth P., Uberoi M. S. Structure of temperature fluctuations in the turbulent wake behind a heated cylinder. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 12.
14. Antonia R. A., Prabhu A., Stephenson S. E. Conditionally sampled measurements in a heated turbulent jet. J. Fluid mech., 1975, vol. 72, pt 3.
15. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4.
16. Обухов А. М. Структура температурного поля в турбулентном потоке. Изв. АН СССР, Сер. геогр. и геофиз., 1949, т. 13, № 1.
17. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
18. Светт. Искровое зажигание движущихся газов с помощью длительных разрядов. В сб. «Вопросы зажигания и стабилизации пламени». М., Изд-во иностр. лит., 1963.
19. Нир. Самовоспламенение в потоках водородо-воздушных смесей. Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 7.
20. La Rue J. C., Libby P. A. Temperature fluctuations in the plane turbulent wake. Phys. Fluids. 1974, vol. 17, No. 11.