

О ВТОРИЧНЫХ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ПЛОСКОМ НАКЛОННОМ СЛОЕ

А. А. НЕПОМНЯЩИЙ

(Пермь)

Линейная теория устойчивости плоскопараллельного конвективного течения между бесконечными изотермическими плоскостями, нагретыми до разной температуры, построена в [1-6]. При умеренных значениях числа Прандтля неустойчивость имеет монотонный характер и приводит к развитию стационарных вторичных движений. Для случая вертикального слоя эти движения исследовались методом сеток в [7, 8] и методом малого параметра в [9].

В настоящей работе изучаются стационарные вторичные конвективные движения в наклонном слое. Применяются метод малого параметра и метод сеток. Установлен жесткий характер возбуждения вторичных движений в определенном интервале углов наклона. Показано, что существуют два типа вторичных движений: вихри на границе встречных потоков и конвективные валы, области существования которых перекрываются; при этом жесткая неустойчивость связана с развитием конвективных валов. Полученный в [4] аналог преобразования Сквайра для бесконечно малых возмущений плоскопараллельного конвективного течения распространяется на вторичные движения конечной амплитуды.

1. Рассмотрим бесконечный плоский слой несжимаемой вязкой жидкости, составляющий с вертикалью угол α , на твердых границах которого $x = \pm d$ поддерживается температура $T = \mp \theta$ ($\alpha > 0$, если нагретая плоскость сверху). Ось y направим горизонтально, а ось z — вдоль слоя в вертикальной плоскости; ρ — плотность жидкости, β — коэффициент теплового объемного расширения, ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность. Выбрав в качестве единицы длины, скорости, времени, давления и температуры соответственно d , ν/d , d^2/ν , $\rho\nu^2/d^2$ и θ , запишем уравнения конвекции и граничные условия в безразмерном виде [10]

$$(1.1) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + G T \boldsymbol{\gamma}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \frac{1}{P} \Delta T$$

$$(1.2) \quad x = \pm 1, \quad \mathbf{v} = 0, \quad T = \mp 1$$

Здесь $\boldsymbol{\gamma} = (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх; $G = g\beta\theta d^3/\nu^2$ — число Грасгофа, $P = \nu/\chi$ — число Прандтля.

Принимаем также условие замкнутости потока

$$(1.3) \quad \int_{-1}^1 v_z dx = \int_{-1}^1 v_y dx = 0$$

Система (1.1) имеет стационарное решение, удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3), которое соответствует плоскопараллельному течению [10]

$$(1.4) \quad \begin{aligned} v_z = v_{z0} = G \cos \alpha v_0(x), \quad v_0(x) = -x(1-x^2)/6 \\ x_x = v_y = 0, \quad T = T_0 = -x \\ p = p_0 = G \sin \alpha x^2/2 + \text{const} \end{aligned}$$

Известно [3], что при умеренных значениях числа Прандтля существуют два механизма неустойчивости течения (1.4): гидродинамический, связанный с наличием точки перегиба у профиля скорости, и конвективный (при $\alpha < 0$), обусловленный неустойчивым распределением температуры. Оба механизма действуют совместно и определяют единую нейтральную кривую устойчивости. Неустойчивость имеет монотонный характер и приводит к развитию стационарных вторичных движений, исследуемых в данной работе.

2. Рассмотрим сначала двумерные вторичные движения. Пусть $v_y = 0$ и все функции не зависят от y . Обозначим

$$(2.1) \quad v' = v - v_0, \quad T' = T - T_0, \quad p' = p - p_0$$

и введем функцию тока Ψ'

$$v_x' = \frac{\partial \Psi'}{\partial z}, \quad v_z' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x}$$

Уравнения (1.1) приводятся к виду

$$(2.2) \quad \left(A + GB - \frac{\partial}{\partial t} C \right) U = \frac{1}{2} D(U, U)$$

$$U = \begin{pmatrix} \Psi' \\ T' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & P \Delta \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \left(-v_0 \frac{\partial}{\partial z} \Delta + v_0'' \frac{\partial}{\partial z} \right) \cos \alpha & -\cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -v_0 \cos \alpha \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$D(U_1, U_2) = \begin{pmatrix} \frac{D(\Psi_1', \Delta \Psi_2')}{D(z, x)} + \frac{D(\Psi_2', \Delta \Psi_1')}{D(z, x)} \\ \frac{D(\Psi_1', T_2')}{D(z, x)} + \frac{D(\Psi_2', T_1')}{D(z, x)} \end{pmatrix}$$

Граничные условия

$$(2.3) \quad x = \pm 1, \quad \Psi' = \partial \Psi' / \partial x = T' = 0$$

Рассмотрим малые стационарные решения задачи (2.2), (2.3), периодические по z с периодом $2\pi/k$ (k — волновое число), которые отвечают от решения $U=0$. Введем разложения [9, 11, 12]

$$(2.4) \quad U = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U^{(n)}, \quad G = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n G^{(n)}$$

$$(2.5) \quad U^{(n)} = \sum_{m=-n} u_m^{(n)}(x) \exp imkz, \quad u_m^{(n)} = \begin{pmatrix} \varphi_m^{(n)} \\ \theta_m^{(n)} \end{pmatrix}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(G)$ – вещественный малый параметр, определенный однозначно при наложении условий нормировки

$$\varphi_1^{(1)}(0) = 1; \quad \varphi_1^{(n)}(0) = 0, \quad n > 1$$

Наибольший интерес представляет величина $G^{(2)}$, знак которой определяет характер ветвления. Эта величина вычисляется по формуле [9]

$$(2.6) \quad G^{(2)} = d/b, \quad b = (u_1^c, B_1 u_1^{(1)})$$

$$d = (u_1^c, D_{0,1}(u_0^{(2)}, u_1^{(1)}) + D_{2,-1}(u_2^{(2)}, u_{-1}^{(1)}))$$

Здесь u_1^c – решение однородной задачи, сопряженной с задачей для функции $u_1^{(1)}$; B_1 – оператор B , в котором произведена замена $\partial/\partial z$ на ik , а D_{mi} – выражение D , в котором оператор $\partial/\partial z$ заменяется на imk или ilk , если действует на первую или вторую функции соответственно. Скалярное произведение функций

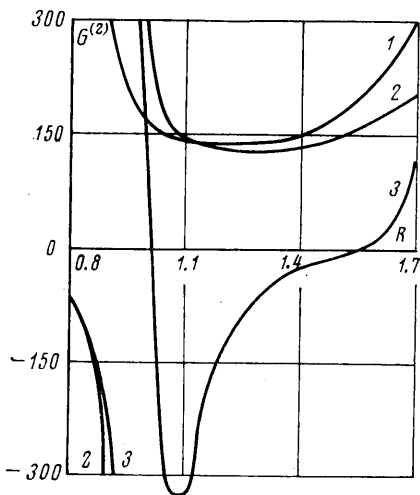
$$u_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

определено как

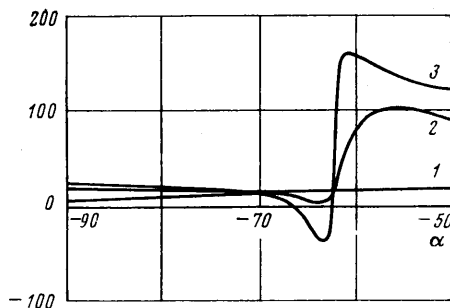
$$(u_1, u_2) = \int_{-1}^1 dx (\bar{\varphi}_1 \varphi_2 + \bar{\theta}_1 \theta_2)$$

Расчет величины $G^{(2)}(k, \alpha, P)$ проводился численно с помощью разложения функций $u_m^{(n)}(x)$ в степенной ряд по координате x [9]. Типичные результаты расчетов приведены на фиг. 1, 2.

На фиг. 1 изображена зависимость $G^{(2)}(k)$ для $P=1$ и $\alpha=50, -55$ и -64° (линии 1–3). Для значения $\alpha=-64^\circ$, соответствующего области перехода между



Фиг. 1

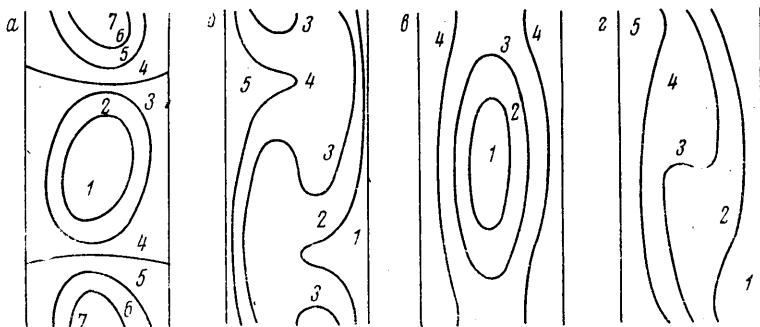


Фиг. 2

гидродинамическим и конвективным типами неустойчивости [3], имеет место жесткая неустойчивость ($G^{(2)} < 0$) в области минимума нейтральной кривой. Величина $G^{(2)}(k)$ испытывает разрыв и меняет знак при $k=k_1, G^{(0)}(k_1) = G^{(0)}(2k_1)$ [9, 13].

На фиг. 2 представлены графики величины $G^{(2)}(\alpha)$ для $k=1.4$ (что соответствует области вблизи минимума нейтральной кривой) и значений числа P , равных 0.2, 0.8 и 1 (соответственно линии 1-3). Жесткая неустойчивость появляется при $P > P_0 \approx 0.8$.

3. Для построения стационарных пространственно-периодических движений конечной амплитуды применялся метод сеток. В качестве переменных использовались полная функция тока $\Psi = \Psi_0 + \Psi'$, вихрь скорости $\varphi = -\Delta\Psi$ и температура T . Стационарное решение плоской задачи, удовлетворяющее условию периодичности по z с периодом $l=2\pi/k$, строи-



Фиг. 3

лось в области $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq l$ методом установления. Применялась явная конечно-разностная схема, описанная в [14]. Основные расчеты проводились на сетке 15×29 .

Установлено наличие двух типов стационарных вторичных движений, причем области их существования перекрываются. На фиг. 3 изображены изолинии функции тока и изотермы для обоих типов движений при значениях параметров $\alpha = -70^\circ$; $P=1$, $l=4.4$ и $G=2 \cdot 10^4$.

Линиями тока и изотермам соответствуют следующие значения: на фиг. 3, а 1—-14.5, 2—-10, 3—-5, 4—0, 5—5, 6—10, 7—12.4; на фиг. 3, б, г 1—-1, 2—-0.5, 3—0, 4—0.5, 5—1; на фиг. 3, в 1—-17.9, 2—-15, 3—-10, 4—-5.

Первый тип движений (конвективные валы) обусловлен конвективным механизмом неустойчивости, характеризуется отсутствием переноса жидкости вдоль слоя и значительным искривлением изотерм. Для второго типа движений (вихри на границе встречных потоков), связанного преимущественно с гидродинамическим механизмом неустойчивости плоскопараллельного течения, сохраняется движение вдоль стенок слоя и изотермы искривлены слабо.

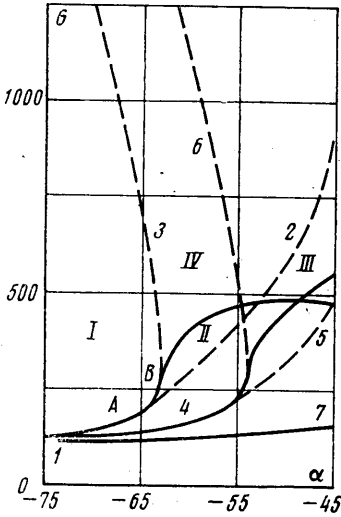
На фиг. 4 для значений параметров $P=1$ и $l=4.4$ изображены граница области устойчивости плоскопараллельного течения, определенная по линейной теории (линия 1), и границы областей существования вторичных движений обоих типов (линии 2 и 3). В областях I и II существуют только конвективные валы (в области II они возбуждаются жестко), в области III—только вихри на границе встречных потоков, в области IV—движения обоих типов. На отрезке AB нейтральной кривой величина $G^{(2)}$ отрицательна.

На фиг. 5 приведена зависимость числа Нуссельта

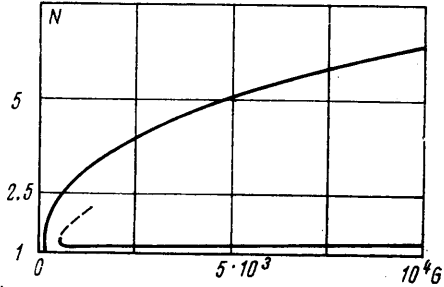
$$N = -\frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial T}{\partial x}(1, z) dz$$

от числа Грасгофа G для вторичных движений обоих типов (значения параметров: $\alpha = -64^\circ$, P и l те же). Штриховые линии соответствуют неустойчивым стационарным решениям («седловым точкам»), которые могут быть приближенно получены методом сеток с помощью подбора амплитуды начального возмущения (см. [15]).

Жесткое возбуждение конвективных валов в наклонном слое может интерпретироваться как следствие более



Фиг. 4



Фиг. 5

сильного стабилизирующего влияния плоскопараллельного течения жидкости на бесконечно малые возмущения по сравнению с возмущениями конечной амплитуды (ср. [16]).

4. Перейдем к рассмотрению трехмерных вторичных движений.

В [4] получено обобщение преобразования Сквайра для случая возмущений конвективных течений. Покажем, что данное преобразование применимо также для конечно-амплитудных трехмерных движений в форме валов с осями, наклоненными к горизонтали.

Рассмотрим вторичное движение, получающееся в результате развития возмущения с волновым вектором

$$k = (k_y, k_z); \quad k_y = k \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta.$$

Введем систему координат YZ , направив ось Z параллельно вектору k , а ось Y — параллельно оси вала. Функции v, p, T для рассматриваемого движения периодические по Z с периодом $2\pi/k$ и не зависят от Y . Представим v в виде

$$v = w + v_y e_y$$

где e_y — единичный вектор оси Y , $w e_y = 0$. Ввиду отсутствия зависимости функций от Y величина v_y не входит в уравнения непрерывности и переноса тепла. Проектируя уравнение переноса импульса на плоскость xZ , получаем систему уравнений и граничных условий

$$(4.1) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + (w \nabla) w = -\nabla p + \Delta w + GT \gamma_1, \quad \text{div } w = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w \nabla T = \frac{1}{P} \Delta T$$

$$x = \pm 1, \quad w = 0, \quad T = \mp 1$$

$$(4.2) \quad f(Z + 2\pi/k) = f(Z), \quad f = (w, T, p)$$

Вектор $\gamma_1 - (\gamma_e)_Y e_Y$ составляет с осью Z угол α' , определяемый равенством

$$(4.3) \quad \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha / \cos \theta$$

и имеет модуль

$$(4.4) \quad |\gamma_1| = [\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha' / \cos^2 \theta]^{-1/2}$$

Сравнивая (4.1) и (1.1), находим, что между решениями трехмерной и плоской задач существует связь

$$(4.5) \quad f(k \cos \theta, k \sin \theta, \alpha, G) = f(k, 0, \alpha', G')$$

$$(4.6) \quad G' = \frac{G}{\sqrt{\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha' / \cos^2 \theta}}$$

При $\theta = \pi/2$ формулы преобразования принимают следующий вид:

$$(4.7) \quad \alpha' = -\pi/2, \quad G' = -G \sin \alpha$$

Если перейти к функции тока Ψ'

$$v_x = \partial \Psi' / \partial Z, \quad v_z - v_{z0} = -\partial \Psi' / \partial x$$

и ввести разложения (2.4), то из вышеизложенного следует, что для трехмерных движений

$$(4.8) \quad \begin{aligned} G^{(n)}(k \cos \theta, k \sin \theta, \alpha) = \\ = G^{(n)}(k, 0, \alpha') \sqrt{\sin^2 \alpha' + \cos^2 \alpha' / \cos^2 \theta}, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Для $n=0$ формула (4.8) получена в [4]. Для частного случая $\theta = \pi/2$, $P \rightarrow \infty$ формулы пересчета (4.5) установлены в [17].

Формулы (4.5) и (4.8) позволяют определить для трехмерных вторичных движений, имеющих структуру валов, функции v_x , v_z , T и p по решению двумерной задачи и использовать результаты, полученные в предыдущих пунктах. В частности, из этих формул следует, что с увеличением угла поворота оси вала θ область существования подкритических движений смещается в сторону меньших по абсолютной величине углов наклона α и исчезает при $\theta = \pi/2$ (для «спиральных» возмущений). На рис. 4 показаны границы области устойчивости плоскопараллельного течения и областей существования вторичных движений обоих типов для $\theta = \pi/4$ (линии 4, 5 и 6) и граница устойчивости плоскопараллельного течения по отношению к спиральным возмущениям с $\theta = \pi/2$ (линия 7) при $P=1$ и $l=4.4$. Вывод о том, что трехмерные спиральные движения возникают при меньших значениях числа G , чем плоские, полученный в [4] в рамках линейной теории устойчивости, сохраняется, несмотря на существование подкритической неустойчивости для плоских возмущений.

Компонента скорости v_Y для стационарного движения определяется посредством решения неоднородной краевой задачи, линейной относительно v_Y

$$(4.9) \quad \begin{aligned} (w \nabla) v_Y - \Delta v_Y = GT \cos \alpha \sin \theta \\ x = \pm 1, \quad v_Y = 0 \end{aligned}$$

Автор благодарит Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкого, Е. Л. Тарунина за внимание к работе и ценное обсуждение.

Поступила 30 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 30, вып. 2.
2. Рудаков Р. Н. Спектр возмущений и устойчивость конвективного движения между вертикальными плоскостями. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
3. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. Гидродинамическая и тепловая неустойчивость стационарного конвективного движения. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Об устойчивости плоскопараллельного конвективного движения относительно пространственных возмущений. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
5. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном канале. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
6. Бирих Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. О колебательной неустойчивости стационарного конвективного движения в плоском наклонном слое. В сб. «Гидродинамика», вып. 5. Пермь, 1974.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Вторичные стационарные конвективные движения в плоском вертикальном слое жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
8. Тарунин Е. Л. О вторичных стационарных конвективных течениях в вертикальном слое. В сб. «Гидродинамика», вып. 4. Пермь, 1972.
9. Непомнящий А. А. О вторичных конвективных движениях в плоском вертикальном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 4.
10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
11. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
12. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
13. Андрейчиков И. П., Овчинникова С. Н. Нелинейная устойчивость течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. Ветвление вторичных режимов. В сб. «Труды 5-го Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости», ч. 1. Новосибирск, 1975.
14. Тарунин Е. Л. Численное исследование свободной конвекции. В сб. «Гидродинамика», вып. 1. Пермь, 1968.
15. Любимова Т. П. О конвективных движениях неньютоновской жидкости в замкнутой полости, подогреваемой снизу. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
16. Лихачев О. А., Штерн В. Н. Автоколебательное течение в пограничном слое. ПМТФ, 1975, № 4.
17. Clever R. M. Finite amplitude longitudinal convection rolls in an inclined layer. Trans. ASME, Ser. C, 1973, vol. 95, No. 3. (Рус. перев.: Продольные вихри в наклонном слое жидкости при конечной амплитуде возмущения. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. С. Теплопередача, 1973, т. 95, № 3.)