

ВЛИЯНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВНЕШНЕГО ПОТОКА НА ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ

Н. И. АКАТНОВ

(Ленинград)

В работах [1, 2] турбулентность внешнего потока учтена путем задания энергии турбулентности на внешней границе пограничного слоя при интегрировании уравнения баланса энергии турбулентности. В [3] в определение пути смешения введена специальная поправка, позволяющая учитывать турбулентность внешнего потока. В [4, 5] энергия турбулентности, вычисленная из уравнения баланса энергии турбулентности, складывается с энергией, индуцированной турбулентностью внешнего потока, причем профиль распределения энергии индуцированной турбулентности задается с помощью функции, подобранной эмпирически. В [6, 7] предложен метод учета влияния турбулентности внешнего потока на слой смешения и струю. В настоящей работе тот же метод применен для пограничного слоя на пластине.

1. В работе [7] сформулирована система гипотез, замыкающая систему уравнений пограничного слоя совместно с уравнением баланса энергии турбулентности при универсальных значениях эмпирических коэффициентов для струйных течений. Имея в виду обобщение теории [7] на случай пристенных течений, рассмотрим плоское изотермическое течение жидкости в канале или в пограничном слое на гладкой поверхности. Начало прямоугольной системы координат поместим на обтекаемой поверхности, ось x направим вдоль нее.

Систему уравнений запишем в виде [7]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \varepsilon) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} &= \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left[(v + \varepsilon) \frac{\partial e}{\partial y} \right] - W \end{aligned}$$

Здесь u, v — проекции средней скорости на оси x, y ; p — среднее давление; ρ — плотность; ν — кинематический коэффициент вязкости; ε — кинематический коэффициент турбулентной вязкости; $e = \langle u_i' u_i' \rangle / 2$ — среднекинетическая энергия турбулентности; W — функция, определяющая диссипацию турбулентной энергии в тепло. На обтекаемой поверхности образуется вязкий подслой, поэтому в (1.1) учтены еще вязкое напряжение трения и диффузия турбулентности за счет вязкости. Граничные условия

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u = v = e = 0, \quad y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial y} = 0, \quad y = h \\ u = u_\infty, \quad e = e_\infty, \quad y = \infty \end{aligned}$$

Здесь h — полувисота канала; u_E, e_E — соответственно скорость и энергия турбулентности на внешней границе пограничного слоя. Второе из условий (1.2) соответствует каналу, третье — пограничному слою.

Коэффициент ε определим формулой А. Н. Колмогорова

$$(1.3) \quad \varepsilon = f l_1 \sqrt{e}$$

Пространство, занятое турбулентным течением, в направлении оси y разобьем на две области [8]: пристенную $0 \leq y \leq y_e$, где $l_1 \sim y$, и внешнюю $y_e < y$, где $l_1 \sim \text{const}$. Для канала $y_e \cong 0.25h$. Определив толщину пограничного слоя δ как координату y , в которой $(u_E - u)/u_E = 0.005$, для пограничного слоя можно принять $y_e \cong 0.25\delta$. Во внешней области для l_1 примем такое же определение, как и для струйных течений [7], а именно

$$(1.4) \quad l_1 = l_{1a} = \frac{\beta}{2y_e} \int_0^{2y_e} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-1} \sqrt{e} dy$$

Здесь $2y_e = y_1$, где $u/u_E \cong 0.9$, поэтому в (1.4) осреднение проводится по области с наибольшими $\partial u/\partial y$ в согласии с определениями [7]. Коэффициент β выразим, как и в [7], степенной функцией

$$(1.5) \quad \beta = \gamma (2y_e/\delta_2)^{0.6}$$

Здесь δ_2 — толщина области пульсационного движения, которая в канале равна $2h$, а в пограничном слое практически равна δ ; γ — эмпирический коэффициент. В пристенной области примем

$$(1.6) \quad l_1 = l_{1w} = (y/y_e) l_{1a}$$

Функция $f = f(y)$ в (1.3) представляет собой аналог введенных в [9-11] «сопрягающих» множителей, который обеспечивает плавный переход от вязкого подслоя к турбулентному ядру, где $f(y) = 1$.

Диссипативную функцию представим в виде

$$(1.7) \quad W = W_1 + W_2$$

Функция W_1 определяет диссипацию в турбулентном ядре, и для нее используем такое же определение, как и для струй [7]

$$(1.8) \quad W_1 = c f e \sqrt{e} / l_2$$

Здесь c — эмпирический коэффициент. Масштаб l_2 в согласии с [7] определим

$$(1.9) \quad l_2 = \begin{cases} \delta_2, & y_1 \leq y \\ (y/y_1) \delta_2, & 0 \leq y \leq y_1 \end{cases}$$

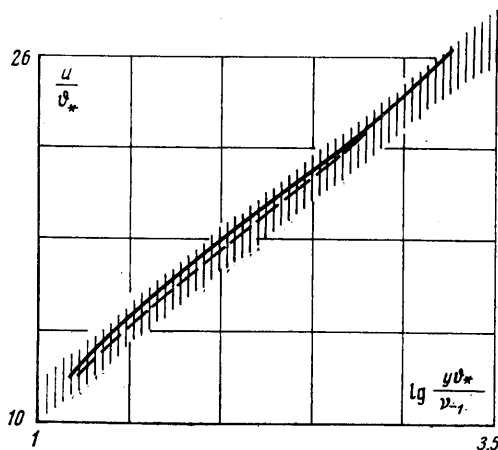
В вязком подслое характер диссипации изменится, поэтому W_1 содержит множитель f . В вязком подслое, где числа Re малы, диссипация должна явно зависеть от ν и поскольку диссипативная функция представляет собой сумму квадратов производных $\partial u_i'/\partial x_j$ (u_i' — проекция пульсационной составляющей скорости), то по соображениям размерности

в этой области можно принять

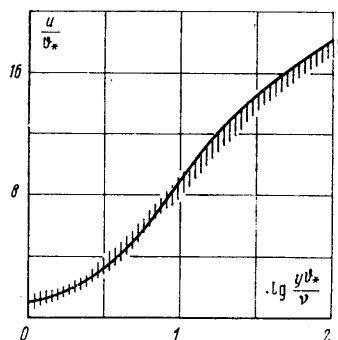
$$(1.10) \quad W_2 = (1-f) A_1 v [d(\bar{\sqrt{e}})/dy]^2$$

Здесь A_1 — эмпирический коэффициент.

Опытные данные [12] показывают, что в вязком подслое $u' \sim y$. Поскольку при этом $u' \gg v' \sim w'$, естественно принять $\bar{\sqrt{e}} \sim y$. Кроме того, примем для вязкого подслоя $\varepsilon \sim y^4$ [10]. Из этих допущений и с учетом (1.3),



Фиг. 1



Фиг. 2

(1.6) следует, что $f \sim y^2$. Функцию f определим выражением

$$(1.11) \quad f = \left(\text{th} \frac{yu_*}{\nu A} \right)^2$$

Здесь $\nu_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$; A — эмпирический коэффициент, равный 26 [7]. Подставляя (1.3)–(1.11) в уравнение баланса энергии (1.1) и рассматривая решение при $y \rightarrow 0$, найдем $A_1 = 2$.

Замкнутая система уравнений окончательно содержит следующие эмпирические величины: γ , c , y_e , y_l . Примем $c = 2.55$, как и для струй [7]. Величины γ , y_e , y_l выбраны из условия согласия расчета с опытом. Установлено $y_l = 0.125 \delta_2$, $\gamma = 0.71$, $y_e = 0.262 \delta$. Согласие лучше, если для канала $y_e = 0.25 h$, а для пограничного слоя $y_e = 0.275 \delta$. В струйных течениях $\gamma \cong 0.6$ [7]. Подчеркнем, что согласно (1.5) в канале $\beta = 0.31$, $y_l = 0.25 h$, а в пограничном слое $\beta = 0.47$, $y_l = 0.125 \delta$. При численном интегрировании системы (1.1) вводились безразмерные величины

$$(1.12) \quad \bar{y} = y/Y, \quad \bar{u} = u/U, \quad \bar{e} = e/\nu_*^2, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon/\nu_* Y$$

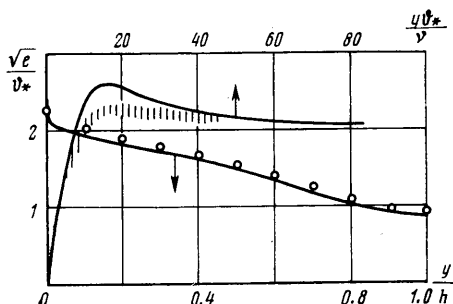
В канале $Y = h$, $U = u_m$ — скорость на оси канала; в пограничном слое $Y = \delta^{**}$, $U = u_E$. При сведении (1.1) к безразмерному виду в случае пограничного слоя использовалось интегральное соотношение Кармана

$$(1.13) \quad \frac{d\delta^{**}}{dx} = \tau_w/\rho u_E^2 = \omega^2$$

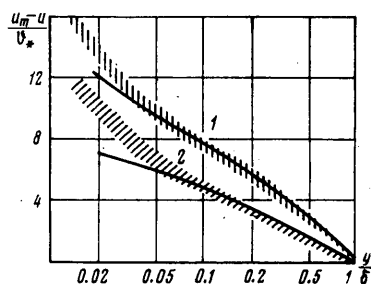
В предположении $d\omega/dx = 0$ частные производные сводятся к обыкновенным. Для получения большего числа точек в вязком подслое в системе (1.1) делалось преобразование координат $\eta = \bar{y}^n$, где $n = 0.3 \div 0.5$, в за-

висимости от величины числа Рейнольдса. Для интегрирования применялся метод прогонки с итерациями.

На фиг. 1 сплошной линией показан вычисленный профиль скорости при $Re = u_m h / \nu = 6 \cdot 10^4$, а штриховкой при $Re = 10^6$. Вертикальной штриховкой показана область разброса опытных данных [13]. На фиг. 2 сплошная линия — распределение скорости в области вязкого подслоя, а вертикальной штриховкой изображена область разброса экспериментальных данных [12].



Фиг. 3



Фиг. 4

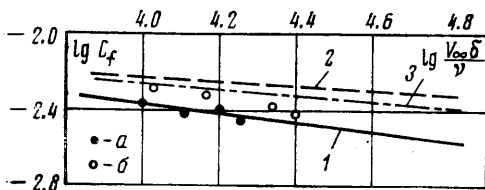
На фиг. 3 сплошные линии изображают теоретическое распределение \sqrt{e}/v_* в канале в ядре течения и в области вязкого подслоя. Точками изображены опытные данные [13], а вертикальной штриховкой [12]. Вычисленный коэффициент гидравлического сопротивления хорошо согласуется с опытными данными. На фиг. 4 линия 1 изображает вычисленный дефект скорости $(u_E - u)/v_*$ в пограничном слое на пластине, а вертикальной штриховкой показан разброс данных эксперимента [14]. Дефект скорости, вычисленный в диапазоне чисел $Re = u_E \delta^{**} / \nu$ от 1000 до 50 000, лежит в пределах разброса опытных данных, совмещенных на одной фигуре в работе [15]. На фиг. 5 линия 1 изображает теоретический коэффициент $c_f = \tau_w^{1/2} / \rho u_E^2$, а точки a — опытные данные [14]. Коэффициент c_f также согласуется с опытными данными [16, 17] во всем диапазоне чисел Re , для которого производились опыты. Профиль \sqrt{e}/v_* в зависимости от y/δ^{**} автомоделен вне вязкого подслоя [8, 13] и столь же хорошо согласуется с опытными данными, как и при течении в канале (фиг. 3).

2. Гипотезу, предложенную в [6, 7], позволяющую учитывать влияние турбулентности внешнего потока, поясним с помощью закономерностей, известных для однородной и изотропной турбулентности. Положим

$$(2.1) \quad e = e_i + e_e$$

Здесь e_i — средняя энергия пульсаций, порожденных в пограничном слое за счет работы местных турбулентных напряжений и имеющих средний масштаб l_i , а e_e — средняя энергия пульсаций, индуцированных турбулентностью внешнего потока и имеющих средний масштаб l_E . Примем $l_E \gg l_i$, поскольку при $l_E \sim l_i$ турбулентность внешнего потока быстро выродилась бы. Примем число Re течения настолько большим, что прямой диссипацией турбулентной энергии пульсаций с масштабами l_E и l_i в тепло за счет сил молекулярной вязкости можно пренебречь. Процесс передачи энергии по каскаду от больших вихрей к меньшим в области крупномасштабных пульсаций хорошо описывается гипотезой Гейзенберга [18, 19], в которой предполагается, что мелкомасштабные пульсации образуют турбулентную вязкость, под действием которой крупномасштабные пульсации передают энергию мелкомасштабным, причем механизм передачи энергии такой же, как при переходе энергии пульсаций в тепло за

счет молекулярной вязкости ν . Если принять $e_e \ll e_i$, то основной вклад в коэффициент турбулентной вязкости ε (1.3) дадут пульсации с параметрами (e_i, l_i) и в согласии с гипотезой Гейзенберга ε будет являться вязкостью и для пульсаций с параметрами e_e, l_E , а скорость убывания пульсаций с волновым числом k соответственно будет пропорциональна $2\varepsilon k^2$.



Фиг. 5

Поскольку $k \sim 1/l$, в силу предположения $l_E \gg l_i$ пульсации с масштабом l_E будут диссипировать значительно медленнее пульсаций с масштабом l_i . Исходя из этих соображений, для пульсаций с параметрами (e_i, l_i) и (e_e, l_E) естественно принять разные скорости диссипации, т. е.

$$(2.2) \quad W = W_i(e_i, l_i, e_e/e_i, l_E/l_i) + W_e(e_e, l_E, e_i/e_e, l_i/l_E)$$

Наибольшие значения отношений l_i/l_E и e_e/e_i , при которых выполняется (2.2), могут быть установлены эмпирически.

Расчеты, выполненные на основе (2.2), сопоставлялись с опытными данными [14, 20], где измерялись характеристики турбулентного пограничного слоя на пластине при наличии турбулентности во внешнем потоке. В этих опытах степень турбулентности сравнительно слабо менялась вдоль пластины. Поскольку турбулентность пограничного слоя по оценкам полностью «обновляется» на длине $\sim (3 \div 5)\delta$, в этих опытах условие $l_E \gg l_i$ выполняется. Для расчетов в качестве простейших предположений принималось $e_E = \text{const}$ и соответственно $W_e = 0$, а $W_i = W_i(e_i, l_i)$.

Подставляя (2.1), (2.2) в уравнение баланса энергии турбулентности (1.1) и учитывая все сделанные допущения, разложим это уравнение на два: относительно e_i и e_e . Граничные условия запишем в виде

$$(2.3) \quad \begin{aligned} e_i = e_e = 0, \quad y = 0 \\ e_i = 0, \quad e_e = e_E, \quad y = \infty \end{aligned}$$

Уравнение для e_i имеет такой же вид, как и в случае отсутствия внешней турбулентности, а вид уравнения для e_e совпадает с видом уравнения для проекции скорости u и имеет такие же граничные условия. Поэтому решение этого уравнения можно записать в виде

$$(2.4) \quad e_e = (u/u_E) e_E$$

В коэффициент ε , определенный по (1.3), (1.4) и фигурирующий в обоих уравнениях, подставляется суммарная энергия (2.1). Масштаб l_2 находится по распределению e_i . Таким образом система замыкается и может быть проинтегрирована.

На фиг. 4 кривой штриховкой показана область разброса опытного дефекта скорости $(u_E - u)/v_*$ по данным [14] при степени турбулентности внешнего потока 4.7% в данном сечении пограничного слоя, а линия 2 представляет собой теоретический дефект скорости при той же степени турбулентности внешнего потока. Расхождение между теорией и опытом при $y/\delta < 0.05$ относится к области вязкого подслоя.

На фиг. 5 линия 2 изображает вычисленный коэффициент сопротивления c_f , а точки b — опытные данные [14]. Согласие теории с опытом можно несколько улучшить, если в (1.11) вместо $A=26$ взять $A=35$. Соот-

ветствующая зависимость показана линией 3. Дефект скорости при этом практически не меняется. Дальнейшее увеличение A не приводит к существенному изменению зависимости $c_f = c_f(\text{Re})$. Вычисленная зависимость $c_f(\text{Re})$ хорошо согласуется с опытными данными Хаффмана, Циммермана и Беннета, приведенными в работе [4]. При степени турбулентности внешнего потока 1% при $\log_{10}(u_\infty \delta / \nu) \cong 4.65$ по данным опыта $\log_{10} c_f \cong -2.5$, а при степени турбулентности 5% при $\log(u_\infty \delta / \nu) \cong 4.85$ имеем $\log c_f \cong -2.45$.

Поступила 23 VIII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов И. А., Гинзбург И. П. О полуэмпирических методах расчета турбулентных течений. Вестн. ЛГУ, Сер. матем., мех., астр., 1975, № 1.
2. Traci R. M., Wilcox D. C. Freestream turbulence effects on stagnation point heat transfer. AIAA Journal, 1975, vol. 13, No. 7. (Рус. перев.: Влияние турбулентности набегающего потока на теплообмен в критической точке. Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 7.)
3. Шерстюк А. Н., Шульгина Т. В. О влиянии турбулентности внешнего потока на характеристики пограничного слоя. Тр. МЭИ, 1974, вып. 203.
4. McDonald H., Kreskovsky J. P. Effect of free stream turbulence on the turbulent boundary layer. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1974, vol. 17, No. 7.
5. Bradshaw P. Review-complex turbulent flows. J. Fluids Engng, Trans. ASME, Ser. J. Fluid Engng, 1975, vol. 97, No. 2.
6. Акатнов Н. И. Воздействие турбуликации на развитие струйных течений. В кн.: «Теория пограничного слоя». Всес. науч. симпоз. (Ленинград, 23–26 декабря 1975 г.). Тезисы докладов. Л., 1975.
7. Акатнов Н. И. Влияние внешней турбулентности на развитие турбулентной струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
8. Акатнов Н. И., Тульверт В. Ф. Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории пристеночных турбулентных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 3.
9. Driest E. R. van. On turbulent flow near a wall. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 11.
10. Лойцянский Л. Г. Полуэмпирические теории взаимодействия процессов молекулярного и молярного обмена в турбулентном движении жидкости. Тр. Всес. съезда по теор. и прикл. механ., 1960. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1962.
11. Вулс Л. А., Джаугаштин К. Е. О распределении пульсационной энергии вблизи стенки. Теплофизика высоких температур, 1970, т. 8, № 1.
12. Кутагеладзе С. С., Миронов Б. П., Накоряков В. Е., Хабахпашева Е. М. Экспериментальное исследование пристенных турбулентных течений. Новосибирск, «Наука», СО АН СССР, 1975.
13. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968.
14. Charnay G., Comte-Bellot G., Mathieu J. Profils de vitesses moyennes et frottement pariatal d'une couche limite turbulente perturbée. C. r. Acad. Sci. Paris, Ser. A., 1971, t. 273, No. 4.
15. Clauser F. H. The turbulent boundary layer. In: Adv. Appl. Mech., vol. 4. N. Y., 1956. (Рус. перев.: Турбулентный пограничный слой. В сб. «Проблемы механики», вып. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1959.)
16. Schultz-Grunow F. Neues Reibungswiderstandsgesetz für glatte Platten. Luftfahrtforschung, 1940, Bd 27, Nr 8.
17. Smith D. W., Walker J. H. Skin-friction measurements in incompressible flow. NASA, Techn. Rept, 1959, No. 26.
18. Heisenberg W. Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z. Phys., 1947, Bd 124, H. 2.
19. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
20. Горлин С. М., Зражевский И. М. Влияние внешней турбулентности потока на течение в пограничном слое. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.