

ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ УСТУПА С ОБРАЗОВАНИЕМ ТУРБУЛЕНТНОГО СЛЕДА

Л. В. ГОГИЩ, Г. Ю. СТЕПАНОВ

(Москва)

Развит метод расчета плоского турбулентного следа за уступом, взаимодействующего с неограниченным потенциальным потоком несжимаемой жидкости, с учетом начального пограничного слоя и вдува (отсоса) в изобарическую донную область. Трение на стенке за уступом во внимание не принимается, что соответствует симметричному квазиустановившемуся течению за прямой кромкой пластины.

Невязкий поток описывается интегральными формулами Келдыша — Седова; течение в следе с однопараметрическим профилем скорости — тремя дифференциальными уравнениями первого порядка: уравнениями импульсов для следа и движения вдоль его оси, а также уравнением взаимодействия (через толщину вытеснения) вязкого течения с внешним потенциальным потоком. Турбулентное трение в следе определяется формулой Прайдтля с точностью до одной эмпирической постоянной.

Сшивка различных областей течения — на пластине перед уступом, в изобарической донной области и в области следа — проводится с помощью квазиодномерного уравнения импульсов для вязкого течения. Замыкающим условием служит уравнение импульсов для течения в целом.

Полученная интегриродифференциальная система уравнений аппроксимируется системой нелинейных конечно-разностных уравнений, решение которой получено численно на ЭВМ путем минимизации суммы квадратов невязок. Результаты расчетов удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными¹.

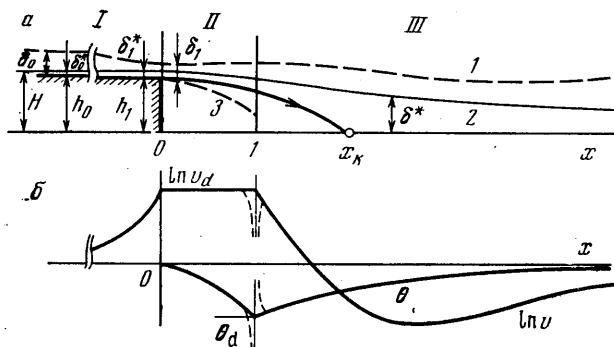
1. Физическая схема отрывного обтекания уступа турбулентным потоком несжимаемой жидкости такая же, как в случае сверхзвукового потока [1], и в принятом предположении отсутствия трения на стенке за уступом не отличается от схемы течения за прямой кромкой.

Из экспериментов известно, что турбулентное отрывное течение за кромкой в сверхзвуковом потоке практически можно считать квазиустановившимся и не зависящим от наличия разделительной пластины в следе, трение на которой в реальных условиях почти не влияет на поток и распределение давлений вдоль следа. В отличие от этого характер обтекания кромки турбулентным потоком при дозвуковых скоростях существенно зависит от наличия и длины разделительной пластины. Согласно экспериментальным данным [2] турбулентный ближний след за симметричной кромкой оказывается неустановившимся и обладает периодической структурой типа вихревой дорожки. Только при наличии разделительной пластины достаточной длины течение приобретает установившийся характер течения за уступом. Указанное изменение обтекания кромки при установке разделительной пластины сопровождается существенным увеличением давления в следе, причем коэффициент донного давления $C_p = 2(p_\infty - p_d) / (\rho_\infty u_\infty^2)$ уменьшается более чем в 3 раза, примерно от 0.6 до 0.2.

¹ Результаты настоящей работы, выполненной в 1973 г., были доложены на Всесоюзном научном симпозиуме по теории пограничного слоя (Ленинград, 1975) и на IV Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Киев, 1976).

Следует отметить, что в сверхзвуковом потоке тоже наблюдалось образование дискретных вихрей, однако их влияние на распределение давлений и величину C_p значительно меньше, чем при дозвуковых скоростях.

В отрывном течении за уступом можно выделить почти изобарическую донную область, за которой располагается область со значительным продольным градиентом давления — ближний след с критической точкой, ограничивающей область возвратных течений. Несмотря на общность схемы, расчет отрывного течения за уступом в потоке несжимаемой жидкости



Фиг. 1

представляет собой более сложную задачу, чем в сверхзвуковом потоке, в котором внешний поток описывается алгебраической формулой Прандтля — Майера, а замыкающим условием, определяющим единственное решение, служит условие прохождения особой точки (горловины следа).

На фиг. 1, а приведена расчетная схема течения. Линией 1 показана внешняя граница вязкого потока, линией 2 — толщина вытеснения вязкого потока, определяющая границу невязкого потока с тем же распределением давления. Римскими цифрами обозначены характерные области течения: I — вдоль пластины, II — изобарическая донная область, III — область следа. Сечения сшивки этих областей выбраны при $x=0$ и 1. На фиг. 1, б показаны соответствующие распределения параметров невязкого потока на его границе — величина модуля вектора скорости ($v=u/u_\infty$) и угол его наклона θ к оси x . Значения параметров в начальном сечении ближнего следа при $x=1$ обозначаются индексом d . Соответственно на границах областей I—III имеем

$$(1.1) \quad \begin{aligned} -\infty < x \leq 0, & \quad v = v_I(x), & \quad \theta = \theta_I = 0 \\ 0 \leq x \leq 1, & \quad v = v_{II}(x) = v_d, & \quad \theta = \theta_{II}(x) \\ 1 \leq x < \infty, & \quad v = v_{III}(x), & \quad \theta = \theta_{III}(x) \\ |x| \rightarrow \infty, & \quad v \rightarrow 1, & \quad \theta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Высота уступа в эквивалентном невязком потоке принята постоянной и равной H . Поскольку граница действительного потока определяется толщиной вытеснения, $h = H - \delta^*$, высоты уступа в невозмущенном течении h_0 и непосредственно перед кромкой h_1 будут, строго говоря, различными (см. фиг. 1, а). Для тонкого начального пограничного слоя, $\delta/H \ll 1$, это различие, очевидно, несущественно.

2. Для упрощения задачи угол θ наклона вектора скорости считается малым (за исключением, быть может, малой окрестности точки $x=1$), так что граничные условия (1.1) для невязкого потока можно считать заданными непосредственно на оси x полуплоскости $y \geq 0$.

Введем комплексную скорость $\bar{v} = ve^{-i\theta}$ и будем рассматривать ее логарифм $\ln \bar{v}(z) = \ln v(z) - i\theta(z)$ как аналитическую функцию комплексной координаты $z = x + iy$.

Следуя условиям (1.1), будем считать известными на границах I и III мнимую часть этой функции, соответственно равную $\theta_I = 0$ и $\theta_{III} = \theta(x)$; в области II — ее действительную часть $\ln v = \ln v_a$. Дополнительно согласно физическому смыслу задачи будем считать функцию $\ln v(z)$ ограниченной в точке $z = 0$.

Решение сформулированной смешанной задачи построения аналитической функции по ее мнимой и действительной частям, заданным на последовательных отрезках границы области — оси x , единственно и дается формулой Келдыша — Седова [3].

В окончательном виде на границах I, III и II имеем

$$(2.1) \quad \ln v_{I,III} = \ln v_a - \sqrt{\frac{x}{x-1}} \left(\ln v_a + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}} \frac{\theta(\xi) d\xi}{\xi-x} \right) \quad (x \leq 0, x > 1)$$

$$(2.2) \quad \theta_{II} = -\sqrt{\frac{x}{1-x}} \left(\ln v_a + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}} \frac{\theta(\xi) d\xi}{\xi-x} \right) \quad (0 \leq x < 1)$$

В точке $x=1$ функции $\ln v(x)$ и $\theta(x)$ имеют, вообще говоря, особенность типа $|x-1|^{-1/2}$, нереальную для действительного течения (см. фиг. 1, б). Отсутствие этой особенности следует рассматривать как дополнительное локальное условие, которому, строго говоря, должно удовлетворять решение задачи. Это условие выражается в виде

$$(2.3) \quad \ln v_a + \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}} \frac{\theta(\xi) d\xi}{\xi-1} d\xi = 0$$

Выражения (2.1) и (2.2) для скорости или угла ее наклона на границе невязкого потока применяются вместо формулы Прандтля — Майера в случае сверхзвукового потока. В отличие от него в силу эллиптичности рассматриваемой задачи формулы (2.1) и (2.2) являются интегральными, так что местные параметры потока определяются формой всей границы следа или решением для следа в целом. Вместо интеграла Шварца, применяемого непосредственно для вычисления гармонически сопряженной функции комплексной скорости, который позволяет определить местное значение скорости через решение для угла наклона потока вдоль всей границы (или наоборот), формулы (2.1) и (2.2) позволяют рассмотреть решение в каждой из трех областей потока в отдельности, что упрощает последующие вычисления.

3. В турбулентном следе ($x \geq 1$) принимается однопараметрический профиль скорости

$$(3.1) \quad \frac{u}{u_0} = 1 - mf(\eta), \quad f(\eta) = \frac{u_0 - u}{u_0 - u_m}, \quad m = \frac{u_0 - u_m}{u_0}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Индексы δ и m относятся к параметрам соответственно на границе следа, $y = \delta$, и на его оси, $y = 0$. В расчетах принимался трехчленный профиль, а также линейный профиль

$$(3.2) \quad f = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \quad f = 1 - \eta$$

Уравнение сильного взаимодействия следа с невязким потоком берется в виде равенства угла наклона границы «тела вытеснения» $\delta^*(x)$ и угла

эквивалентного невязкого потока θ

$$(3.3) \quad \frac{d\delta^*}{dx} = \operatorname{tg} \theta \approx \theta$$

Приближенное равенство в (3.3) соответствует исходному предположению о малости углов наклона границы невязкого потока во всей области течения.

В качестве самых простых уравнений, описывающих течение в однопараметрическом турбулентном следе, берутся уравнения импульсов для следа и вдоль его оси симметрии, которые с использованием формулы Прандтля для турбулентного касательного напряжения [1] и уравнения взаимодействия (3.3) приводятся к виду

$$(3.4) \quad \frac{dm}{dx} = \frac{1}{\delta^*} \frac{\theta m(2-m) - (-a\kappa)(2+H)m^2 H^*}{(\ln H)'m(2-m) + (2+H)(1-m)}$$

$$(3.5) \quad \frac{d \ln v}{dx} = -\frac{1}{\delta^*} \frac{\theta(1-m) + (-a\kappa)(\ln H)'m^2 H^*}{(\ln H)'m(2-m) + (2+H)(1-m)}$$

Здесь $H = \delta^*/\delta^{**}$, $H^* = \delta^*/\delta$; δ^{**} представляет собой толщину потери импульса в следе; $(-a\kappa)$ — эмпирическая постоянная, связанная с постоянной турбулентности в формуле Прандтля и принятым профилем скорости (3.2).

Интегриродифференциальная система четырех уравнений ((2.1), (3.3), (3.4) и (3.5)) относительно четырех неизвестных функций (θ , m , $\ln v$, δ^*) продольной координаты x описывает плоское течение взаимодействия турбулентного ближнего следа с потоком несжимаемой жидкости.

Отметим для сравнения, что аналогичное сверхзвуковое течение приводится к одному дифференциальному уравнению первого порядка и простым квадратам [1].

4. Начальные условия для ближнего следа определяются из условий склеивания его с течением смещения в изобарической донной области в предположении непрерывности толщины вытеснения δ^* , толщины потери импульса δ^{**} и сохранения массы газа в донной области с учетом вдува (отсоса). Тогда начальные значения форм-параметра следа m_d и начальная толщина вытеснения δ_d^* определяются из уравнений

$$(4.1) \quad \frac{H^{**}(m)}{G(m)} = \frac{S+B}{1-B} = t$$

$$(4.2) \quad y_d = \delta_d^* = bH^{**}(1)(1-B) \frac{H^*(m)}{G(m)} x_d$$

Как и для сверхзвукового обтекания кромки, влияние начального пограничного слоя и вдува учитывается одним параметром t . Здесь $S = \delta_1/bx_d$ — параметр начального пограничного слоя, b — безразмерный коэффициент расширения турбулентной струи, который ниже для общности считается второй (и последней) эмпирической константой рассматриваемой задачи. Начальная толщина слоя смещения δ_1 определяется по толщине невозмущенного пограничного слоя δ_0 . Поскольку трением в окрестности кромки, где профиль скорости преобразуется в отрывной, можно пренебречь, из уравнения импульсов получается приближенная формула типа формулы Сквайра — Юнга

$$(4.3) \quad \delta_1^{**} = \delta_0^{**} (1 + C_p)^{1/2(2+H)}, \quad H_* = 1/2(H_0 + H_1)$$

Параметр вдува

$$B = \frac{(\rho u)_s}{(\rho u)_d} [bH^{**}(1)x_d]^{-1}$$

Приведенный расход возвратного течения в следе

$$G = - \int_0^{\eta_+} \frac{\rho u}{(\rho u)_d} d\eta, \quad f(\eta_+) = m^{-1}$$

После формулировки условий сшивки в задаче остается один неизвестный параметр — скорость v_d или безразмерное донное давление $C_{pd} = v_d^2 - 1$.

В качестве условия для отбора единственного решения используется уравнение импульсов для течения в целом, прилагаемое к невозмущенному потоку перед кромкой и при $x \rightarrow \infty$. (В связи с этим в области II используется уравнение импульсов в виде $d\delta^{**}/dx = 0$.) Контрольный контур проводится перпендикулярно потоку при $x \rightarrow \pm\infty$, вдоль пластины, ее торца и оси симметрии следа. Потери импульса потока при $x \rightarrow \infty$ определяются трением на пластине, разрежением в донной области и смешением в ней, связанным с подводом массы (вдувом) из торца с малой скоростью $u_s/u_\infty \ll 1$

$$(4.4) \quad \rho u_\infty^2 \delta_\infty^{**} = \int_{-\infty}^0 \tau_w dx + (p_\infty - p_d)H + (\rho u)_s u_\infty H$$

Полагая

$$\int_{-\infty}^0 \tau_w dx = \rho u_d^2 \delta_1^{**}$$

перепишем уравнение (4.4) в безразмерном виде

$$(4.5) \quad \delta_\infty^{**} = \sqrt{1 + C_p} bH^{**}(1) [\sqrt{1 + C_p} S + B] + \frac{1}{2} C_p \frac{H}{x_d}$$

Для вычисления толщины потери импульса δ_∞^{**} при $x \rightarrow \infty$, где $v = u/u_\infty = 1$, по данным в некотором сечении $x = L$ используется формула типа Сквайра — Юнга, получаемая, как и формула (4.3), приближенным интегрированием уравнения импульсов

$$(4.6) \quad \delta_\infty^{**} = \delta_L^{**} v_L^{[2 + 1/2(H_L + 1)]}$$

5. Последовательность решения задачи принята следующей. Для заданных параметров начального пограничного слоя S и вдува B из уравнений (4.1) и (4.2) определяются начальные параметры ближнего следа в сечении сшивки $x_d = 1$; m_d и δ_d^* . Величина безразмерного донного давления или скорость невязкого потока в этом сечении принимается такой же, как и в донной области, $v_d = \sqrt{1 + C_p}$. Последний начальный параметр θ_d (угол наклона невязкого потока при $x = 1$) нельзя определить по формуле (2.2), согласно которой граничная линия тока невязкого потока в окрестности $x = 1$, вообще говоря, принимает нереальную форму завитка (с неограниченным возрастанием $|\theta|$). При численном решении в соответствии с основным предположением об ограниченности углов отклонения невязкого потока величина θ_d задавалась некоторой малой величиной с последующим уточнением из условия (2.3) гладкости границы эквивалентного невязкого потока при $x = 1$. Численные эксперименты подтвердили, что предварительное задание этого угла в разумном диапазоне значений $\theta_d = 0.1 - 0.3$ не приводит к заметному изменению решения.

При известных начальных параметрах δ_d^* , m_d , θ_d , v_d течение взаимодействия в области III описывается системой уравнений (2.1), (3.3) — (3.5). Исходя из их решения $\theta = \theta(x)$ ($x \geq 1$) по уравнениям (2.2) и (3.3) вычисляется форма граничной линии тока в изобарической области II и соответствующая высота уступа H

(или h с учетом толщины вытеснения начального струйного слоя смешения δ^*). Полученное решение задачи зависит от принятой величины коэффициента донного давления C_p , действительное значение которого удовлетворяет уравнению импульсов (4.5).

Основные трудности задачи в принятой формулировке связаны с расчетом течения взаимодействия в области III. Исследование системы четырех уравнений ((2.1), (3.3) - (3.5)) показало, что ее решение последовательными приближениями $v(x)$ связано, как и в сверхзвуковом случае, с прохождением особенности уравнений при $m=1$, что приводит к значительным вычислительным трудностям. В связи с этим все уравнения решались одновременно по методу конечных разностей.

Ось x , начиная от $x=1$, разбивалась на n равных отрезков длиной z так, чтобы при $L=1+zn$ приближенно выполнялись условия, соответствующие $x \rightarrow \infty$. Значения параметров в узлах приписывались целые индексы $i=0, 1, 2, \dots, n$, а средним значениям параметров на отрезках, которые принимались равными среднеарифметическим значениям в узлах, приписывались полусуммы значений индексов в узлах. Уравнения (3.4), (3.5) и (2.1) записывались в конечных разностях для отрезка $(i-1/2)$, расположенного между $(i-1)$ -м и i -м узлами. Главное значение собственного интеграла в середине отрезка $(i-1/2)$ вычислялось с использованием ϵ окрестности, равной половине отрезка ($\epsilon=z/2$)

$$(5.1) \quad K_{i-1/2} = \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}} \frac{\theta(\xi) d\xi}{\xi-x} \approx \int_1^{1+(i-1)z} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}} \frac{\theta(\xi) d\xi}{\xi-x} + \\ + \int_{1+iz}^{1+nz} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}} \frac{\theta(\xi) d\xi}{\xi-x} + \theta_i \sqrt{\frac{zi}{1+zi}} - \theta_{i-1} \sqrt{\frac{z(i-1)}{1+z(i-1)}}$$

Величина δ^* определялась квадратурой уравнения (3.3). Таким образом, система четырех интегродифференциальных уравнений приводилась к системе $3n$ нелинейных уравнений (и n квадратур) относительно $3n$ неизвестных - $\theta_i, m_i, \ln v_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Решение этой системы проводилось численно путем минимизации суммы квадратов их невязок (с равными весами)

$$f = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^n e_{ij}^2$$

где e_{ij} - невязка j -го уравнения на i -м отрезке. Минимизация функции f проводилась на ЭВМ с помощью процедуры минимизации функции многих переменных по методу вращающихся координат с учетом ограничений на область допустимых значений аргументов¹.

После расчета течения взаимодействия в следе граница невязкого потока в донной области вычислялась квадратурами (2.2) и (3.3), а высота эквивалентного уступа H

$$(5.2) \quad H = \frac{\pi}{2} \ln v_d - \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi}} \theta_{III} d\xi + \delta_{\infty}^*$$

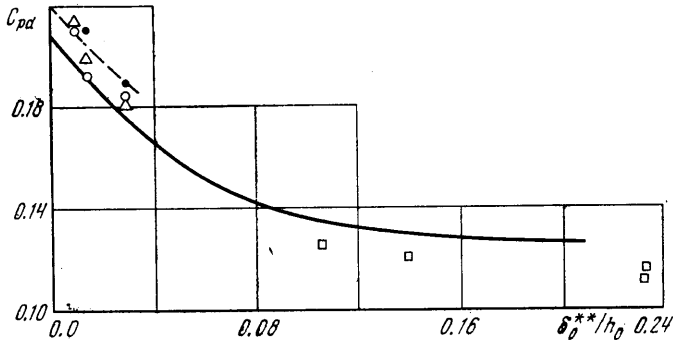
(Всюду применялись квадратурные формулы с равноотстоящими узлами.)

Для точного удовлетворения уравнения импульсов (4.5) проводилась квадратичная интерполяция по коэффициенту донного давления C_p .

Расчеты проводились на ЭВМ типа М-220, число узлов принималось равным $n=13$ и (в основном) 5, расстояние между узлами принималось соответственно $z=0.5$ и 1 (характерным размером является длина донной области II). Время счета одного варианта соответственно 1.5 и 0.5 час при задаваемой точности отыскания минимума функции, равной 10^{-3} , и с учетом поворота координат для проверки найденного приближения точки минимума.

¹ Была использована программа, разработанная В. И. Купцовым.

6. Ниже приводятся результаты расчетов. Зависимость коэффициента донного давления от относительной толщины потери импульса невозмущенного потока $C_{pa}(\delta_0^{**}/h_0)$ представлена на фиг. 2. Значками обозначены экспериментальные данные работ [4, 5], относящиеся к обтеканию уступа

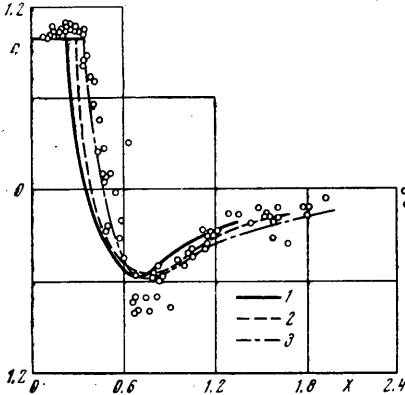


Фиг. 2

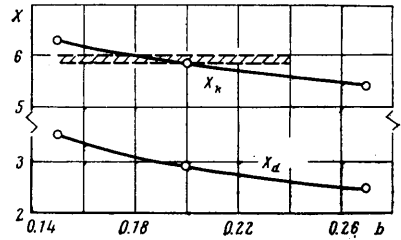
с числами $M_\infty = 0 \div 0.5$; сплошной и пунктирной линиями — результаты расчетов соответственно при $(-ax) = 0.020$ и 0.024 . Видно, что изменение константы турбулентности в следе заметно влияет на расчетное значение C_{pa} .

Отметим, что некоторое расхождение (менее 10%) расчетных и экспериментальных данных для толстых пограничных слоев связано с неточностью расчетного и экспериментального определения параметров таких слоев в невозмущенном потоке.

На фиг. 3 приводятся экспериментальные значения относитель-



Фиг. 3

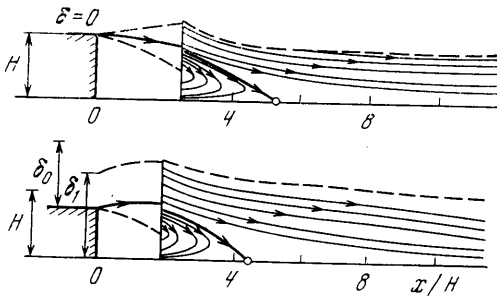


Фиг. 4

ного коэффициента давления $C = C_p/C_{pa}$ в зависимости от приведенного расстояния вдоль оси следа $X = C_{pa}x/h_0$, заимствованные в такой форме из [4], и результаты расчетов для $(-ax) = 0.02$ и $\delta_0^{**}/h_0 \approx 0.22$.

Различные варианты расчета (1, 2, 3) отличаются значениями коэффициента b утолщения струйного слоя смешения, по существу второй и независимой константы турбулентности для области II ($b = 0.27, 0.20$ и 0.15). Отметим, что в отличие от константы турбулентности в следе $(-ax)$ изменение почти в два раза несущественно влияет на величину безразмерного донного давления, изменяя ее лишь на 2%. В то же время характерные линейные размеры, длина донной области x_d/h и длина области возвратных течений x_r/h заметно зависят от величины b . На фиг. 4 показана зависи-

мость длины донной области и области возвратных течений от константы b ; заштрихованная на графике область показывает разброс экспериментальных измерений положения критической точки в следе за уступом по данным работ [2, 6] ($x_k/h = 5.85 \div 6.0$). Отметим, однако, что в более ранних работах [7, 8] было получено $x_k/h = 6.8 \div 6.9$. Измерения проводились при условиях, указанных в таблице.



Фиг. 5

На фиг. 5 показаны сравнительные картины отрывного течения при отсутствии начального пограничного слоя ($\delta=0$) и при его большой величине ($\delta_0^{**}/h_0 \approx 0.1$).

Отметим, что в качестве характерной длины здесь и далее принята высота эквивалентного уступа H , поэтому действительная величина уступа у кромки, $h_1 = H - \delta_1^*$, получается различной, что особенно заметно в случае толстого пограничного слоя.

Картинки течения, показанные на фиг. 5, подчеркивают особенности исходной модели потока. Отчетливо видно резкое уменьшение толщины начального пограничного слоя δ_0 перед кромкой вплоть до начальной толщины струйного слоя δ_1 , вызванное ускорением потока. В сечении склеивания изобарической донной области и следа локальные параметры вязкого течения претерпевают разрыв, в том числе толщина вязкого слоя и линия постоянной массы (толщина вытеснения δ^* в этих сечениях принята непрерывной).

Как показали расчеты, распределения параметров вдоль следа слабо зависят от принятого профиля скорости (3.2) и с учетом независимого изменения констант турбулентности совпадают почти полностью. Этот вывод согласуется с имеющимися представлениями о слабом влиянии профиля скорости на результаты интегрального расчета вязких слоев в целом. Однако локальные элементы течения, например форма линий тока в окрестности точки торможения K , заметно зависят от профиля скорости.

Отметим, что развитый метод может быть обобщен на случай более сложных течений с точкой отрыва на криволинейном контуре [9].

Авторы признательны В. И. Купцову за консультации и помощь в программировании и З. А. Донсковой, принимавшей участие в проведении расчетов и оформлении работы.

Поступила 24 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогин Л. В., Соболева Т. С., Степанов Г. Ю. Взаимодействие турбулентного следа с внешним потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
2. Nash J. F., Quincey V. G., Callinan J. Experiments on two-dimensional base flow at subsonic and transonic speeds. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1966, No. 3427.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.—Л., Гостехиздат, 1950.

4. Nash J. F. An analysis of the subsonic flow past symmetrical blunt-trailing-edge aerofoil sections at zero incidence, in the absence of a vortex street. Aeronaut. Res. Council Repts and Mem., 1966, No. 3436.
 5. Wieghardt K. Erhöhung des turbulenten Reibungswiderstandes durch Oberflächenstörungen. Forschungshefter Schiffstechnik, April, 1953, H. 2.
 6. Bradshaw P., Wong F. Y. F. The reattachment and relaxation of a turbulent shear layer. J. Fluid Mech., 1972, vol. 52, pt 1.
 7. Tani J., Juchi M., Komoda H. Experimental investigation of flow separation associated with a step or a groove. Aeronaut. Res. Inst., Tokyo Univ., 1961, Rept., No. 364.
 8. Mueller T. J., Robertson J. M. A study of the mean motion and turbulence downstream of a roughness element. In: Developments Theoret. and Appl. Mech., vol. 1. N. Y., Plenum Press., 1963.
 9. Гогуш Л. В., Нейланд В. Я., Степанов Г. Ю. Теория двумерных отрывных течений. В сб. «Гидромеханика», т. 8. М., ВИНТИ, 1975.
-