

4. Антонов Э. А., Гладиллин А. М. Усиление детонационной волны зоной вторичных реакций в двухфазной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
5. Pierce T. H., Nicholls J. A. Two-phase detonations with bimodal drop distributions. *Astronaut. Acta*, 1972, vol. 17, No. 4/5.
6. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. Теория детонации. М., Гостехиздат, 1955.

УДК 533.6.011.8

К ВОПРОСУ О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ ЗАКОНА ЛОКАЛЬНОСТИ

Н. И. САЗОНОВА

(Москва)

Решается задача об определении аэродинамических характеристик тел в условиях неустановившегося режима полета в случаях, когда можно применять закон локальности (модифицированная теория Ньютона, свободномолекулярное течение газа, течение разреженного газа в промежуточном режиме и т. д.). Показано, как сравнительно легко можно рассчитать коэффициенты вращательных производных первого порядка. Приведены примеры расчета.

1. Для вычисления сил и моментов, действующих на летящее тело, часто используют закон локальности, который заключается в том, что поток импульса на поверхности тела в основном зависит от положения тела относительно направления скорости набегающего потока. При этом предположении местные коэффициенты давления касательного напряжения в некоторой точке поверхности тела могут быть заданы соответственно в форме

$$c_p = \sum_{k=1}^R A_k(v, n)^k, \quad c_\tau = (v, \tau) \sum_{k=1}^{R-1} B_k(v, n)^k$$

где v , n , τ — соответственно орты скорости набегающего на тело потока, внутренней нормали и касательной к обтекаемой поверхности, $R \geq 2$.

Постоянные A_k , B_k определяют законы взаимодействия потока с поверхностью тела. Коэффициент действующей на тело аэродинамической силы определяется в этом случае соотношением

$$c_F = \frac{1}{S_0} \int_S (c_p n + c_\tau \tau) dS$$

где интегрирование проводится по области $(v, n) \geq 0$. Закон локальности при анализе обтекания тел установившимся однородным потоком газа использовался в [1-5].

Приведем соображения, подтверждающие, что закон локальности можно применять в некоторых случаях неустановившегося обтекания.

В работе [6] рассматривается гиперзвуковое ньютоновское обтекание покоящегося тела неустановившимся потоком газа. Из результатов работы следует, что в этом случае ньютоновскую формулу для давления можно применять при тех же ограничениях, что и для установившегося обтекания.

В [7, 8] изучается в ньютоновском приближении поступательное нестационарное движение с гиперзвуковой скоростью некоторого плоского или осесимметричного тела. При этом формула для давления кроме основного ньютоновского члена содержит член с ускорением ($a(t) = dV(t)/dt$, где $V(t)$ — скорость поступательного движения). Таким образом, если предположить, что $a(t) \ll V^2/l_0$ (l_0 — наибольший линейный размер тела), то и в данном случае с полным основанием можно применять закон локальности.

Очевидно, что при неустановившемся обтекании тел гиперзвуковым свободномолекулярным потоком газа закон локальности можно применять только в том случае, когда на тело не попадают молекулы, отраженные от тела в более ранние моменты времени. В [8] выведены условия, при выполнении которых можно пренебречь вкладом вторично отраженных молекул.

Вопрос о применении закона локальности для неустановившегося обтекания тел в промежуточном режиме сводится к вопросу о возможности подбора коэффициентов $A_k B_k$, что можно выяснить только при наличии хотя бы минимального числа экспериментов.

2. Рассмотрим произвольное неустановившееся движение пространственного тела. Представим это движение в виде суммы поступательного движения некоторой точки со скоростью $U(t)$ и вращения вокруг этой точки со скоростью $\Omega(t)$

$$V(t, s) = U(t) + [\Omega(t) \times R(s)]$$

Здесь t – рассматриваемый момент времени, s – произвольная точка тела, $R(s)$ – радиус-вектор точки s .

Будем относить все величины к поступательной скорости $U(t)$, общей для всех точек поверхности S . Тогда безразмерный коэффициент аэродинамической силы будет равен

$$(2.1) \quad C_F^* = \frac{1}{S_0} \int \sum_{s, k=0}^{R-1} \omega^{1-k} \{ (A_{k+1} - B_k)(w, n)^{k+1} n + B_k(w, n)^k w \} dS$$

$w = V/U, \quad B_0 = 0$

Расчеты по формуле (2.1) очень трудоемки вследствие необходимости вычисления интегралов от высоких степеней скалярного произведения $(w(t, s), n(s))$ по поверхности, зависящей от времени. Покажем на примере вычисления коэффициента лобового сопротивления, как можно облегчить эти расчеты.

3. Определим коэффициент лобового сопротивления C_x следующим образом:

$$C_x = C_F^* \cdot u, \quad u = U/U$$

Предположим, что движение рассматриваемого тела мало отличается от поступательного, т. е. $\Omega \ll U/L$, где L – характерный линейный размер тела. Тогда величину C_x можно разложить в ряд по $\omega = \Omega L/U$

$$(3.1) \quad C_x = C_{x0} + C_x^\omega \cdot \omega + O(\omega^2)$$

$C_{x0} = C_x|_{\omega=0}, \quad C_x^\omega = \partial C_x / \partial \omega|_{\omega=0}$

Из выражения (2.1), полагая $\omega = 0$, получим

$$C_{x0} = \frac{1}{S_0} \int \sum_{s^*: (u, n) > 0, k=0}^{R-1} \{ (A_{k+1} - B_k)(u, n)^{k+2} + B_k(u, n)^k \} dS^*$$

При определении C_x^ω необходимо учесть, что на границе интегрирования при $\omega = 0$ скалярное произведение (u, n) обращается в нуль

$$(3.2) \quad C_x^\omega = \frac{1}{S_0} \int \sum_{s^*, k=0}^{R-1} \{ [r \times u] [(1-k)(A_{k+1} - B_k)(u, n)^{k+2} + (2-k)B_k(u, n)^k] + [r \times n] [(k+1)(A_{k+1} - B_k)(u, n)^{k+1} + kB_k(u, n)^{k-1}] \} dS^*, \quad r = R/L$$

Отметим, что так можно получить и следующий член ряда (3.1).

4. Определим направление скорости основного поступательного движения $U(t)$ двумя независимыми углами: углом атаки α и углом тангажа φ , отсчитываемыми от некоторой неподвижной в пространстве оси, совпадающей по направлению с осью лежащего тела при $\omega = 0$ (фиг. 1).

Покажем, как сравнительно легко можно рассчитать зависимость

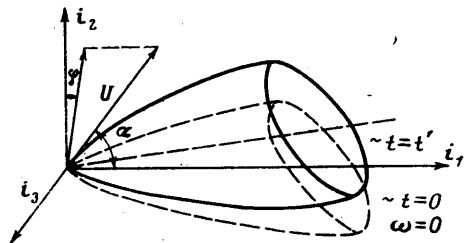
$$C_x(\alpha, \varphi) = C_{x0}(\alpha, \varphi) + C_x^\omega(\alpha, \varphi) \cdot \omega$$

Зависимость $C_{x0}(\alpha, \varphi)$ можно рассчитывать точно так же, как и для установившегося обтекания, либо используя дифференциальное уравнение для C_{x0} [1], либо раскладывая функцию $C_{x0}(\alpha, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям и упрощая выражения для коэффициентов этого разложения [4].

Если из скорости $U(t)$ можно выделить какую-нибудь постоянную составляющую U_0 , то более удобно перейти к следующему коэффициенту полной аэродинамической силы, действующей на движущееся тело

$$C_F^{**} = 2F / \rho S_0 U_0^2 = C_F^* [U(t) / U_0]^2$$

В качестве примера определения $C_{x0}(t)$ и $C_{y0}(t)$ рассмотрим тело вращения, состоящее из кругового конуса и сегмента единичной сферы (фиг. 2), которое движется прямолинейно с постоянной скоростью U_0 и, кроме того, колеблется в вертикальном направлении перпендикулярно вектору U_0 со скоростью $v_r = \lambda U_0 \sin \omega t$ так, что ось тела все время остается параллельной вектору U_0 (λ – некоторый коэффициент). Установившееся ньютоновское обтекание такого тела было рассмотрено в [10].



Фиг. 1

Вычисляя для каждого момента времени t соответствующий угол атаки $\alpha(t)$, найдя по графикам установившегося обтекания $C_x(\alpha)$ и $C_y(\alpha)$, рассчитаем коэффициент лобового сопротивления при описанном выше неустановившемся поступательном движении тела, который определяется следующим образом:

$$C_{x0} = C_F^{**} \cdot U_0 / |U_0| = (C_x \cos \alpha - C_y \sin \alpha) V^2(t) / U_0^2$$

Аналогично находится коэффициент подъемной силы

$$C_{y0} = C_F^{**} \cdot v_T / |v_T| = (C_x \sin \alpha + C_y \cos \alpha) V^2(t) / U_0^2$$

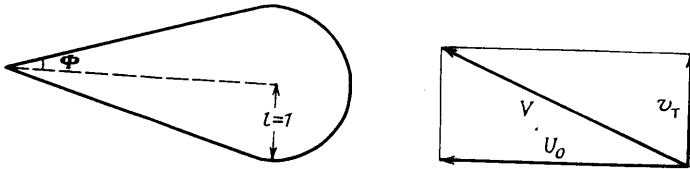
Графики для $C_{x0}(t)$ и $C_{y0}(t)$ приведены на фиг. 3.

5. Обратимся теперь к определению зависимости $C_{x^{\omega}}(\alpha, \varphi)$. Из выражения (3.2) для $C_{x^{\omega}}$ видно, что для $C_{x^{\omega}}$ можно записать дифференциальное уравнение, подобное дифференциальному уравнению для C_{x0} [1]

$$(5.1) \quad L_{R+2}\{C_{x1^{\omega}}\} = \Omega_R$$

$$C_{x1^{\omega}} = C_{x^{\omega}} - \frac{1}{S_0} \int_{S^*} \{ [r \times n] [B_1 + (A_1 + 2B_2)(u, n)] + [r \times u] B_1(u, n) \} dS^*$$

В случае, когда Ω_R имеет простой вид, удобно находить зависимость $C_{x^{\omega}}(\alpha, \varphi)$ с помощью решения уравнения (5.1). В общем случае можно применить метод разложения в ряды.



Фиг. 2

Разложим функцию $C_{x^{\omega}}(\alpha, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям [11]

$$C_{x^{\omega}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\varphi + d_{nm} \sin m\varphi) P_{nm}(z), \quad z = \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} C_{nm} \\ d_{nm} \end{bmatrix} = K_{nm} \left\{ \sum_{k=1}^R [k(A_k - B_{k-1}) + (k+1)B_{k+1}] \begin{bmatrix} M_{nm}^k \\ N_{nm}^k \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^R [(2-k)(A_k - B_{k-1}) + (1-k)B_{k+1}] \begin{bmatrix} Q_{nm}^{k+1} \\ R_{nm}^{k+1} \end{bmatrix} \right\}$$

$$K_{n0} = (2n+1)/4\pi S_0, \quad K_{nm} = (2n+1)(n-m)!/2\pi S_0(n+m)! \quad (m > 0)$$

$$\begin{bmatrix} M_{nm}^k \\ N_{nm}^k \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} P_{nm} \begin{bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{bmatrix} I_k(\alpha, \varphi) dz$$

$$\begin{bmatrix} Q_{nm}^k \\ R_{nm}^k \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} P_{nm} \begin{bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{bmatrix} T_k(\alpha, \varphi) dz$$

$$I_k(\alpha, \varphi) = \int_{S^*} [r \times n](u, n)^k dS^*, \quad T_k(\alpha, \varphi) = \int_{S^*} [r \times u](u, n)^k dS^*$$

Пользуясь соотношениями для M_{nm}^k, Q_{nm}^k , выведенными в [5], упростим выражения для C_{nm}

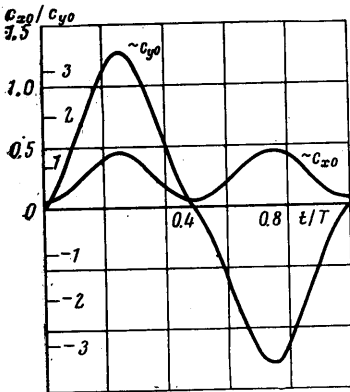
$$(5.2) \quad C_{nm} = K_{nm} M_{nm}^1 \left\{ (A_1 + 2B_2) - \frac{3 \cdot 3! (A_3 - B_2)}{(n-3)(n+4)} + \dots - \frac{4A_1}{(n-3)(n+4)} - \right. \\ \left. - \frac{16 \cdot 3! (A_3 - B_2)}{(n-3)(n-5)(n+4)(n+6)} + \dots \right\} + K_{nm} Q_{nm}^0 \left\{ \frac{2! A_1}{(n-3)(n+4)} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{4!(A_3 - B_2)}{(n-3)(n-5)(n+4)(n+6)} + \dots \Big\} + F_{nm}, \quad n=1, 3, 5, \dots \\
 (5.3) \quad C_{nm} = & K_{nm} M_{nm}^0 \left\{ B_1 - [2(A_2 - B_1) + 3B_3] \frac{2!}{(n-2)(n+3)} + \dots \right. \\
 & \dots - \frac{6 \cdot 2! B_3}{(n-2)(n-4)(n+3)(n+5)} + \dots \Big\} + K_{nm} Q_{nm}^1 \left\{ (2A_0 + B_1) + \right. \\
 & \left. + \frac{3! B_3}{(n-4)(n+5)} + \dots \right\} + F_{nm}, \quad n=0, 2, 4, 6, \dots \\
 F_{nm} = & K_{nm} M_{nm}^n \left\{ [n(A_n - B_{n-1}) + (n+1)B_{n+1}] + \right. \\
 & \left. + (n+2)^2(A_{n+2} - B_{n+1}) \frac{n+1}{2(2n+3)} + \dots \right. \\
 & \dots + \frac{n+1}{2n+3} [(2-n)(A_n - B_{n-1}) + (1-n)B_{n+1}] + \dots \Big\} + \\
 & + K_{nm} Q_{nm}^{n-1} \left\{ [(4-n)(A_{n-2} - B_{n-3}) + (3-n)B_{n-1}] + \right. \\
 & \left. + \frac{n(n+1)}{2(2n+3)} [(2-n)(A_n - B_{n-1}) + (1-n)B_{n+1}] + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

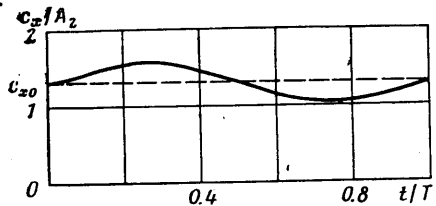
Выражения для d_{nm} после упрощения будут иметь тот же вид (5.2), (5.3) с соответствующей заменой M_{nm}^k на N_{nm}^k и Q_{nm}^k на R_{nm}^k .

Из формул (5.2) и (5.3) видно, что все C_{nm} определяются, если будут найдены интегралы $M_{nm}^n, Q_{nm}^{n-1}, M_{nm}^0$ ($n=1, 3, 5, \dots$) и M_{nm}^1 ($n=0, 2, 4, \dots$). Наиболее сложными для вычисления являются интегралы M_{nm}^n и Q_{nm}^{n-1} .

Отметим, что во многих моделях обтекания большинство коэффициентов A_k, B_k обращаются в нуль, и так как начиная с некоторого номера $n > n_0$ коэффициенты при M_{nm}^n, Q_{nm}^{n-1} обращаются в нуль, то с этого номера отпадает необходимость в вычислении интегралов M_{nm}^n, Q_{nm}^{n-1} .



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, вычисление C_x^∞ для произвольного пространственного тела сводится к вычислению для этого тела параметров формы $M_{nm}^k, N_{nm}^k, Q_{nm}^{k-1}, R_{nm}^{k-1}$ ($k=0, 1, n \leq n_0$), т. е. тех же параметров, которые получаются при вычислении моментных характеристик при установившемся обтекании.

На фиг. 4 представлен график зависимости $C_x(t)$, просчитанный данным методом для ньютоновского гиперзвукового обтекания конуса, который кроме основного поступательного движения ($\alpha=30^\circ$) совершает медленные колебания с частотой 0.2т около своей вершины.

6. В качестве третьего примера рассмотрим определение сил, действующих на тело вращения, совершающее произвольное поступательное движение и вращающееся с угловой скоростью $\Omega(t)$ вокруг своей оси симметрии.

В этом случае коэффициент полной аэродинамической силы, действующей на тело, с точностью до членов первого порядка малости по ω , определится выражением

$$(6.1) \quad C_F = C_{F0} + \frac{1}{S_0} \int_{S^*} \left\{ [\omega \times r] \sum_{k=0}^{R-1} (1-k) [(A_{k+1} - B_k)(u, n)^{k+1} n + \right. \\ \left. + B_k(u, n)^k u] + [\omega \times r] \sum_{k=1}^{R-1} B_k(u, n)^k \right\} dS^*$$

Здесь область интегрирования ограничена условием $(u, n) \geq 0$, C_{F0} — безразмерный коэффициент аэродинамической силы, действующей на тело при поступательном движении.

Для случая $R=2$ выражение (6.1) примет более простой вид

$$(6.2) \quad C_F = C_{F0} + \frac{B_1}{S_0} \int_{S^*} [\omega \times r](u, n) dS^*$$

Необходимо заметить, что выражение (6.2) в отличие от (6.1) точное.

Из (6.2) видно, что, как и следовало ожидать, в рамках теории Ньютона и гиперзвукового свободномолекулярного течения разреженного газа при зеркальном отражении ($B_1=0$) вращение осесимметричного тела вокруг собственной оси не влияет на аэродинамические силы, действующие на данное тело при его полете.

Вернемся к формуле (6.1) и предположим, что основной поступательный поток направлен по оси симметрии тела (т. е. $\alpha=0$). В этом случае векторы u , ω и r оказываются лежащими в одной плоскости и, следовательно, смешанное произведение $(u, \omega \times r)$ обращается в нуль. Далее, так как при $\alpha=0$ поверхность интегрирования симметрична относительно оси тела, то, как нетрудно проверить,

$$\int_{S^*} [\omega \times r](u, n)^k dS^* = 0$$

и, следовательно, из (6.1) получаем $C_F = C_{F0}$.

Итак, если тело вращения, кроме основного поступательного движения под углом атаки $\alpha=0$ вращается вокруг своей оси, то аэродинамические силы, действующие на данное тело, в первом приближении не отличаются от сил, действующих на него при поступательном прямолинейном движении.

В заключение автор благодарит А. И. Бунимовича за внимание к работе и М. А. Воротынцеву за полезные замечания.

Поступила 6 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Бунимович А. И. Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
2. Баранцев Р. Г., Васильев Л. А., Иванов Е. В., Козачек В. В., Минайчев А. Д., Михайлов Л. В., Мурзинов Н. В. Аэродинамический расчет в разреженном газе на основе гипотезы локальности. Аэродинамика разреженных газов, сб. 4. Изд-во ЛГУ, 1969.
3. Pike J. Newtonian aerodynamic forces from Poisson's equation. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 4.
4. Бунимович А. И., Воротынцев М. А., Сазонова Н. И. К вопросу об определении аэродинамических характеристик тел, обтекаемых поступательным потоком в условиях «закона локальности». Вестн. МГУ, Сер. матем. механ., 1975, № 6.
5. Бунимович А. И., Сазонова Н. И. Силовые и моментные характеристики пространственных тел, обтекаемых потоком газа в условиях «закона локальности». В сб. «Газовая и волновая динамика». Тр. МГУ, Изд-во МГУ, 1975.
6. Майлз. Ньютоновское обтекание неподвижного тела неустановившимся потоком. Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 1.
7. Богатко В. Н., Колтон Г. А. О ньютоновском приближении в задаче обтекания плоских и осесимметричных тел, движущихся с переменной скоростью. Вестн. МГУ, 1974, № 7.

8. *Богатко В. Н.* О нестационарном обтекании клина и конуса при гиперзвуковом движении. Вестн. ЛГУ, 1974, № 7.
9. *Пащенко Н. Т.* Обтекание колеблющейся поверхности потоком сильно разреженного газа. ПММ, 1959, т. 23, № 4.
10. *Pike J.* Newtonian lift and drag of blunt-cone cylinder bodies. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 2.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. М., «Наука», 1973.

УДК 531/534 : 0.61.3

**НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

им. М. В. ЛОМОНОСОВА

СЕМИНАРЫ

Семинар по численным методам решения задач аэрогидродинамики
под руководством Г. И. Петрова, Л. А. Чудова, Г. Ф. Теленина, Г. С. Рослякова

15 I 1976. А. С. Куцаев (Москва). *Гиперзвуковое обтекание деформируемых тел.*
Рассматривается осесимметричное нестационарное обтекание газового облака, имеющего сверхзвуковую начальную скорость. Задача решается численно по методу С. К. Годунова с выделением ударной волны и контактного разрыва. Полученные картины течения показывают торможение облака до дозвуковой скорости и приближение числа Маха ударной волны к единице.

29 I 1976. Ю. Г. Малама (Москва). *Численное моделирование высокоскоростного соударения твердых тел.*

В газодинамическом приближении (без учета девиаторной части напряжений) рассматривается двумерная задача об ударе твердого снаряда (цилиндра) по полубесконечной твердой мишени. Используется вариант разностной схемы С. К. Годунова, в котором оба семейства линий сетки подвижны. Внешними границами двух счетных областей являются ось симметрии, головные ударные волны, контактная поверхность и границы с вакуумом. Для получения «больших» величин задача о распаде разрыва решается точно на внешних границах ячеек и в звуковом приближении на внутренних. Основная цель расчетов — исследование вопроса о подобии течений в мишени при различных скоростях удара и различных уравнениях состояния материалов снаряда и мишени, а также выяснение основных особенностей процесса испарения при больших скоростях удара.

12 II 1976. Ю. М. Липницкий, А. В. Панасенко (Москва). *Расчет одномерных нестационарных течений вязкого газа с помощью неявной дивергентной разностной схемы.*

В работе предлагается неявная дивергентная разностная схема для расчета одномерных нестационарных течений вязкого газа. В основе ее построения лежат идеи Н. Н. Яненко и В. М. Ковеня. Схема имеет порядок $o(\tau+h^2)$ и является абсолютно устойчивой на линейном аналоге. Реализуется схема скалярными прогонами.

Численный метод был опробован на задачах о распаде разрыва и отражения вязкой ударной волны от твердой стенки. Последняя задача решалась в двух предельных случаях: теплопроводной и теплоизолированной стенки. При решении задач о распаде разрыва вводилось неявное сглаживание по плотности. Полученные результаты показали, что метод может использоваться для расчета сильных разрывов с достаточно хорошей аппроксимацией решения вблизи разрыва.

4 III 1976. А. Н. Никулин (Москва). *Численное исследование течений невязкого газа около тел сложных конфигураций.*

Рассмотрены течения идеального газа около затупленных тел при наличии неравновесных физико-химических превращений. Решение задачи находится итерационно: на каждой итерации отдельно решаются газодинамическая система — сеточно-характеристическим методом установления, и релаксационная — методом установления по явной разностной схеме. Представлены результаты расчетов неравновесного обтекания углекислым газом затупленных конусов с углами полураствора 40–70° и