УДК 533.6.011

ФОРМУЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ УДЛИНЕННЫХ ГОЛОВНЫХ ЧАСТЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

М. И. ФОЛЛЭ

(Москва)

В последние годы возник интерес к изучению неосесимметричных головных частей летательных аппаратов. В данной работе рассмотрены удлиненные головные части с n-лучевой звездой в начальном сечении, которая затем плавно переходит в круговое миделево сечение и получена формула сопротивления для этих тел при небольших сверхзвуковых скоростях в обычных предположениях линейной теории.

1. Решение волнового уравнения для удлиненных тел, у которых максимальная толщина мала по сравнению с длиной тела, а также малы угол между касательной плоскостью к поверхности тела и набегающим потоком и производная этого угла в направлении потока, можно записать [1]

$$\varphi = A_0K_0(Bpr) + \sum_{m=1}^{\infty} A_mK_m(Bpr)\cos(m\theta+\beta_m), \qquad B^2=M^2-1 \tag{1.1}$$

Здесь p — оператор Хэвисайда для s-координаты по направлению набегающего потока; r и θ — полярные координаты в поперечной плоскости; A_m и β_m — произвольные функции p; K_m — модифицированные функции Бесселя. Для малых r функцию φ можно аппроксимировать выражением

$$\varphi_0 = -\left(\ln\frac{Bpr}{2}+C\right)A_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty} A_m(m-1)!\left(\frac{2}{Bp}\right)^m r^{-m}\cos(m\theta+\beta_m) \tag{1.2}$$

Здесь C — постоянная Эйлера.

Это решение можно рассматривать как действительную часть функции

$$\varphi_0 + i\psi_0 = a_0(s)\ln z + b_0(s) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(s)z^{-m}, \qquad z=x+iy=re^{i\theta}$$

$$a_0(s) = -A_0(p), \qquad b_0(s) = -\left(\ln\frac{Bp}{2}+C\right)A_0(p) \tag{1.3}$$

Рассматривая осесимметричное тело, Лайтхилл показал [2], что переход от $\varphi=A_0(p)K_0(Bpr)$ к $\varphi_0=-(\ln(Bpr/2)-C)$ означает использование малости производной угла между касательной к поверхности тела плоскостью и направлением движения, т. е для осесимметричных тел с изломом меридионального сечения уже нельзя пользоваться приближенной функцией $\varphi_0(s, r)$. Граничное условие на теле позволяет найти коэффициенты $a_0(s)$, $b_0(s)$ в общем виде ($b_0(s)$ — при условии $S'(0)=0$, S – площадь поперечного сечения, т. е. для остроконечного тела). Существенно, что на некотором расстоянии от тела потенциал имеет тот же вид, как в частном осесимметричном случае (с такой же зависимостью $S(s)$) [1]

$$a_0(s) = \frac{S'(s)}{2\pi}, \qquad b_0(s) = \frac{1}{2\pi}\left[S'(s)\ln\frac{B}{2} - \int_0^s S''(\sigma)\ln(s-\sigma)\,d\sigma\right]$$

$$\varphi_0(r, s, \theta) = \varphi_0(r, s) = a_0(s)\ln r + b_0(s) = \tag{1.4}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[S'(s)\ln\frac{Br}{2} - \int_0^s S''(\sigma)\ln(s-\sigma)\,d\sigma\right]$$

В последней формуле $R<r\ll 1$, R – наибольший радиус, длина тела принята за единицу. К сожалению для интересующих нас тел нельзя непосредственно использовать приближенную функцию $\varphi_0(s, r, \theta)$ (1.2) – (1.4) из-за особенности в начальной плоскости, к тому же звезда – неосесимметричная и неизученная особенность. Воспользуемся теоремой о том, что обращение направления потока не изменяет величины силы сопротивления, действующей на тело, но обращает ее направление [3, 4].

Для применимости теоремы необходимо отсутствие местных дозвуковых зон. Следуя [5], тело с торцом необходимо дополнить бесконечным цилиндром. Фактически мы будем рассматривать обтекание тела: бесконечный цилиндр – плавная поверхность – звезда. Уточним, что плавная поверхность означает непрерывность $S'(s)$ и ее производных при $0<s<1$ ($s=0$ означает последнее круговое сечение, $s=1$ – звезду). Рассмотрение конкретных поверхностей показывает, что необходимо учесть случай, когда $S'(s)$ имеет разрыв в нуле. Хотя из-за осесимметричной особенности в начальной плоскости и теперь нельзя полностью применить формулы (1.2)–(1.4), все же представляется естественным считать, что на некотором расстоянии от тела аналогично работе [1] течение будет осесимметричным: наше тело отличается от рассмотренного в [1] лишь осесимметричной особенностью при $s=0$. При обтекании осесимметричного тела существует связь между продольной и осесимметричной составляющими скорости; формула для радиальной составляющей скорости получена из (1.4). Обе формулы верны и при наличии осесимметричных особенностей [3]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=-\frac{K_0(B\rho r)}{BK_1(B\rho r)}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\quad (r=\text{const}),\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{S'(s)}{2\pi r} \tag{1.5}$$

С помощью теоремы умножения перейдем в (1.5) к оригиналам, причем из-за разрыва у $\partial\varphi/\partial r$ необходимо использовать интеграл Стильтьеса, затем преобразуем этот интеграл через риманов, используя, $S'(-0)=0$, и наконец преобразуем его по частям, учтя, что $V(0)=0$, $S''(-0)=0$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)_{r=r_1}=\frac{S'(+0)}{2\pi Br_1}V'\left(\frac{s}{Br_1}\right)-\frac{1}{2\pi}\int_{-0}^{s}V\left(\frac{s-\sigma}{Br_1}\right)S'''(\sigma)\,d\sigma \tag{1.6}$$

Здесь $V'(s)$ – оригинал $K_0(p)/K_1(p)$ по Хэвисайду, свойства $V(s)$ изучены в [3], при больших и соответственно при малых s получены формулы

$$V(s)\sim\ln 2s,\qquad V(s)\sim s \tag{1.7}$$

Вторую из них следует употреблять лишь в бесконечно малой окрестности особенности – у нас в бесконечно малой окрестности 0, а на всех конечных отрезках следует использовать первую из формул (1.7). Поэтому в дальнейшем представим потенциал в виде

$$\varphi(s,r,\theta)=\varphi_\varepsilon(s,r,\theta)+\varphi_0(s,r,\theta) \tag{1.8}$$

Потенциал φ_ε отличен от нуля лишь в ε-окрестности нуля, наоборот φ_0 обращается в нуль в этой окрестности. Функция φ_0 описывает не только обтекание всего остального тела, но в нее входит также влияние особенности в нуле на конечном интервале. Обозначение φ_0 не случайно, далее будет показано, что это естественное обобщение уордовской функции φ_0 (1.4) на случай $S'(0)\neq0$. Очевидно также, что $\varphi_\varepsilon(s,r,\theta)=\varphi_\varepsilon(s,r)$. Заметим также, что такое раздельное представление естественно для φ и $\partial\varphi/\partial s$, но по второй формуле (1.5) $\partial\varphi/\partial r$ имеет всегда одно представление. Подставим первую из формул (1.7) в (1.6)

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\right)_{r=r_1}=\frac{1}{2\pi}S''(s)\ln\frac{Br_1}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_0^s\ln(s-\sigma)S'''(\sigma)\,d\sigma-\frac{S'(+0)}{2\pi Br_1}V'\left(\frac{s}{Br_1}\right) \tag{1.9}$$

Необходимо проинтегрировать (1.9) от ε до s, а затем устремить $\varepsilon\to0$. Интеграция первого слагаемого в (1.9) очевидна, при интеграции третьего слагаемого используется первая из формул (1.7), результаты группируются. При интеграции второго слагаемого вначале меняется порядок интегрирования, а внешний интеграл преобразуется по частям, в результате получим

$$\varphi_0(s,r_1)=\frac{S'(s)}{2\pi}\ln\frac{Br_1}{2}-\frac{S'(0)}{2\pi}\ln s-\frac{1}{2\pi}\int_0^s\ln(s-\sigma)S''(\sigma)\,d\sigma \tag{1.10}$$

Произвольная функция от r_1, которую следовало бы добавить в (1.10) в силу второй из формул (1.5) тождественно равна нулю. Формула (1.10) обобщает потенциал (1.4) на случай наличия особенности в начальной плоскости. Подчеркивая это обстоятельство, можно короче записать (1.10) в стильтьесовской форме

$$\varphi_0(s,r_0)=\frac{S'(s)}{2\pi}\ln\frac{Br_1}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_{-0}^{s}\ln(s-\sigma)\,dS'(\sigma) \tag{1.11}$$

Заметим, что для тела вращения Лайтхилла формула (1.10) верна и на поверхности тела. Перейдем теперь к нахождению $\varphi_\varepsilon(s, r)$, подставим вторую из формул (1.7) в (1.6) и затем проинтегрируем ($-0<s<\varepsilon$)

$$\varphi_\varepsilon(s, r)=O(s)+G(r)$$

Здесь $G(r)$ – произвольная функция, подставляя φ_ε во вторую из формул (1.5), получим при $\varepsilon\to 0$

$$\varphi_\varepsilon(0, r)=\frac{S'(0)}{2\pi}\ln\frac{Br}{2} \tag{1.12}$$

2. Рассмотрим контрольную цилиндрическую поверхность, охватывающую тело малого радиуса r_1, но $r_1>R$; s_0 – основание цилиндра при $s=0$, S_* – при $s=1$, S_w – боковая поверхность. Запишем силу сопротивления X, измеренную параллельно набегающему потоку и закон сохранения массы для контрольного объема

$$X=\int\limits_{S_0}(p_1+\rho_1U^2)\,dS_0-\int\limits_{S_w}\rho U^2\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS_w-$$
$$-\int\limits_{S_*}\left\{p+\rho U^2\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2\right\}dS_*+p_BS(0) \tag{2.1}$$

$$\int\limits_{S_0}\rho_1U\,dS_0-\int\limits_{S_w}\rho U\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dS_w-\int\limits_{S_*}\rho U\left(1+\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)dS_*=0 \tag{2.2}$$

Здесь p_1, ρ_1 и U – давление, плотность и скорость в набегающем потоке. При возвращении телу первоначального положения $p_BS(0)$ будет просто данным давлением. Умножая (2.2) на U и вычитая из (2.1), после преобразования получим

$$\frac{X}{{}^1/_2\rho_1U^2}=-2\int\limits_{S_w}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,dS_w+\int\limits_{S_*}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)^2\right]dS_x+$$
$$+\frac{p_B-p_1}{{}^1/_2\rho_1U^2}S'(0) \tag{2.3}$$

При получении (2.3) использовался интеграл Бернулли и условие адиабатичности [1]. Необходимость учета некоторых квадратичных членов в интеграле Бернулли обоснована в [2], однако, как показано в [6], применимость формулы Лайтхилла ограничена небольшим числом Маха. Подставляя (1.8) в (2.3), придется записать оба интеграла отдельно для ε-окрестности, где интегрируется φ_ε (трубка длины ε от -0 до ε, ее второе основание обозначим S_ε), и для остальной трубки, где интегрируется φ_0

$$\frac{X}{{}^1/_2\rho_1U^2}=-2\int\limits_{\varepsilon}^{1}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\right)_{r=r_1}r_1\,d\theta\,ds+$$
$$+\int\limits_{S_*}\left[\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\theta}\right)^2\right]dS_*-$$
$$-c_{pB}S(0)-2\int\limits_{-0}^{\varepsilon}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial r}\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial s}\right)_{r=r_1}d\theta\,ds+$$
$$+\int\limits_{S_\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial\theta}\right)^2\right]dS_\varepsilon \tag{2.4}$$

Здесь $-c_{pB}=2(p-p_1)/\rho_1U^2$ – коэффициент донного давления с обратным знаком. Преобразуем интегралы по S_* и S_ε, используя теорему Грина, используем также вторую из формул (1.7) и то, что S_ε бесконечно близко к кругу

$$\frac{X}{{}^1/_2\rho_1U^2}=-2\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\right)_{r=r_1}S'(s)\,ds- \tag{2.5}$$

$$-2\int\limits_{-0}^{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varphi_\varepsilon}{\partial s}\right)_{r=r_1}S'(s)\,ds+\varphi_0(1,r_1)S'(1)-$$

$$-\left(\int\limits_{C_*}\varphi_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}d\tau\right)_{s=1}+\varphi_\varepsilon(\varepsilon,r_1)S'(\varepsilon)-\varphi_\varepsilon(\varepsilon,R)S'(\varepsilon)-c_{pB}S'(0)$$

Из (1.12) следует, что второй интеграл в (2.5) равен нулю и

(2.6) $$\lim_{\varepsilon\to 0}S'(\varepsilon)\left[\varphi_\varepsilon(\varepsilon,r_1)-\varphi_\varepsilon(\varepsilon,R)\right]=\frac{[S'(0)]^2}{2\pi}\left(\ln\frac{Br_1}{2}-\ln\frac{BR}{2}\right)$$

После подстановки формулы (1.10) в первый интеграл из (2.5) он разобьется на три интеграла

(2.7) $$-2\int\limits_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial s}\right)_{r=r_1}S'(s)\,ds=J_1+J_2+J_3$$

Первый интеграл легко приводится к виду

(2.8) $$J_1=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{Br_1}{2}\left[S'^2(1)-S'^2(0)\right]$$

При рассмотрении J_2 меняем порядок интегрирования, расширяем предел интегрирования на ε, преобразуем по частям внутренний и внешний интегралы, в результате получим

(2.9) $$J_2=\frac{S'(1)}{\pi}\int\limits_0^1 S''(\sigma)\ln(1-\sigma)\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 S''(s)S''(\sigma)\ln|s-\sigma|\,ds\,d\sigma$$

Преобразуем J_3: расширим отрезок интегрирования на ε, преобразуем по частям и подставим асимптотическую формулу (1.7) для больших s, откуда

(2.10) $$J_3=\frac{[S'(0)]^2}{\pi}\ln\frac{2}{Br_1}-\frac{S'(0)}{\pi}\int\limits_0^1 S''(s)\ln s\,ds$$

Из (2.5)–(2.10) получаем окончательную формулу сопротивления

(2.11) $$\frac{X}{{}^1/{}_2\rho_1U^2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^1 S''(s)S''(\sigma)\ln\frac{1}{|s-\sigma|}\,ds\,d\sigma-$$

$$-\frac{S'(1)}{2\pi}\int\limits_0^1 S''(s)\ln\frac{1}{1-s}\,ds+\frac{S'(0)}{\pi}\int\limits_0^1 S''(s)\ln\frac{1}{s}\,ds+$$

$$+\frac{[S'(0)]^2}{2\pi}\ln\frac{2}{BR}-\left(\int\limits_{C_*}\varphi_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}d\tau\right)_{s=1}-c_{pB}S(0)$$

Здесь R – радиус круга в торцовом сечении. Предположим теперь, что мы рассматриваем тело вращения с двумя изломами меридионального сечения при $s=0$ и 1. Тогда, используя (1.10) и считая C_* окружностью, легко взять контурный интеграл в (2.11)

(2.12) $$-\left(\int\limits_{C_*}\varphi_0\frac{\partial\varphi_0}{\partial\nu}d\tau\right)_{s=1}=\frac{S'(1)}{2\pi}\left[S_1'(1)\ln\frac{2}{BR_1}-\int\limits_0^1\ln\frac{1}{1-\sigma}S''(\sigma)\,d\sigma\right]$$

Подставляя (2.12) в (2.11), легко получить соответствующий результат Лайтхилла [2]. При $S'(0)=0$ в (2.11) получаем формулу Уорда [1].

3. Как было отмечено выше, приближенную функцию φ_0 (1.2)–(1.4) нельзя использовать из-за особенности в начальной плоскости. Этот вывод, принадлежащий Лайтхиллу [2], сейчас уточним, а формулы (1.4) обобщим на случай $S'(0)\neq 0$. Известно, что

(3.1) $$L(\ln s)=-(C+\ln p)/p$$

где L – оператор Лапласа. Из операционных формул (1.3) и первого равенства (1.4) следует:

$$L\left(b_0(s)-\frac{1}{2\pi}S''(s)\ln\frac{B}{2}\right)=-\frac{1}{p}\left[(\ln p+C)A_0(p)\right] \tag{3.2}$$

для правой части (3.2) необходимо найти обратное преобразование Лапласа. Используя формулу дифференцирования оригинала для $S'(s)$ и теорему умножения изображений, окончательно получим

$$b_0(s)=\frac{1}{2\pi}\left[S'(s)\ln\frac{B}{2}-S'(0)\ln s-\int_0^s S''(\sigma)\ln(s-\sigma)\,d\sigma\right] \tag{3.3}$$

Очевидно, что этой формулой нельзя пользоваться при $s\to 0$. При $R<r<1$ получаем формулу для потенциала (1.10). Итак, показано, что функция φ_0 является обобщением потенциала (1.4) на случай $S'(0)\neq 0$. Утверждение Лайтхилла о том, что переход от φ к φ_0 – от решения (1) к решению (2) – неверен, можно теперь уточнить по крайней мере для исследуемого класса тел. Переход от φ к φ_0 верен «почти везде», кроме непосредственной окрестности особенности если, под $b_0(s)$ к тому же подразумевать выражение (3.3), а не последнюю из формул (1.4).

Автор благодарит Г. Г. Черного за постановку задачи.

Поступила 20 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ward G. N.* Supersonic flow past slender pointed bodies. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1949, vol. 2, pt 1.
2. *Lighthill M. J.* Supersonic flow past slender bodies of revolution the slope of whose meridian section is discontinuous. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1948, vol. 1, pt 1.
3. *Ward G. N.* Linearized theory of steady high-speed flow. Cambridge, Univ. Press., 1955.
4. *Hayes W. D.* Reversed flow theorems in supersonic aerodynamics. Proc. 7-th Intern. Congress Appl. Mech., 1948, vol. 2, pt 1.
5. *Браун К. Э.* Аэродинамика удлиненных тел при больших скоростях. В сб. Аэродинамика частей самолета при больших скоростях. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
6. *Васильченко В. И., Притуло М. Ф.* Высшие приближения к точному решению задачи обтекания тела вращения сверхзвуковым потоком газа. Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1666.

УДК 533.6.011+536.37

УСИЛЕНИЕ СВЕТА В РЕКОМБИНИРУЮЩИХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТОКАХ

В. А. КОЧЕЛАП, Ю. А. КУКИБНЫЙ

(Киев)

В последнее время возрастает интерес к проблеме создания мощных химических лазеров видимого диапазона. Обсуждается возможность решения этой задачи при использовании неравновесных реакций фоторекомбинации газофазных радикалов и атомов [1–3]. Для получения значительных неравновесных потоков последних может быть применена тепловая газодинамическая накачка: радикалы и атомы образуются из стабильных веществ при нагреве до нескольких тысяч градусов, затем при выпуске газа через сопло происходит резкое охлаждение и закалка газа. Инверсная населенность и достижимый коэффициент усиления света α при такой накачке были рассмотрены в [4–8] для случая одной реакции рекомбинации $A+A\to A_2$, $A=Cl$, Br, O. Процессы [2, 3, 7, 8]

$$XO+O(+M)\to XO_2(+M)+\hbar\omega,\qquad X=N,\ S, \tag{1}$$

могут быть реализованы в потоке со многими параллельными реакциями. В [9] был предложен метод вычисления α для реакций (1), состоящий в том, что концентрации всех компонент в потоке перед началом охлаждения определялись из равновесного расчета, изменение же концентраций в процессе охлаждения оценивалось грубо. Указанная полуколичественная оценка α привела к низким его значениям [9], несмотря на большую запасенную мощность. В этой связи обещающим представляется коэффициент усиления при реакции рекомбинации атомов серы $A=S$.

В настоящей заметке предлагается получать рекомбинирующие атомы серы из газообразных серосодержащих соединений SO_2, H_2S, CS_2, OCS и приведен расчет соответствующего α при газодинамической накачке, а также аналогичный расчет