5. *Веригин Н. Н.* Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
6. *Веригин Н. Н., Саркисян В. С.* Закачка жидкостей в пласты-коллекторы, имеющие локальную зону искусственно повышенной трещиноватости, насыщенную водой, при постоянном дебите. Тр. ВНИИ водоснабж., канализ., гидротехн. сооруж. и инж. гидрогеол., 1973, вып. 37.
7. *Веригин Н. Н., Саркисян В. С., Тарощин Ю. Л.* О сферической задаче фильтрации жидкости и газа при изменении проницаемости пород по экспоненциальному закону. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.

УДК 532.58.011

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСШИРЕНИЯ КАВЕРНЫ ПРИ НАЛИЧИИ В ПОТОКЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Н. Б. СОТИНА

(Москва)

Асимптотический закон расширения осесимметричного полутела конечного сопротивления, обтекаемого потоком идеальной, несжимаемой жидкости, и его связь с силой, действующей на полутело, получен в [1]. Очевидно, что деформация носовой части тела не изменит вида найденных выражений. Ниже будет показано, как изменится асимптотический закон и величина гидродинамических реакций для полутел конечного сопротивления при наличии в потоке источников (стоков).

1. Не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что на оси x перед телом находится один точечный источник мощности m. По аналогии с [2] потенциал скоростей зададим в виде

$$\varphi=\int_{-N}^{0} a(n)\,[r^nP_n(\cos\theta)-1]\,dn-rv_\infty\cos\theta-\frac{m}{4\pi R}$$

$$R=\sqrt{r^2+a^2-2ra\cos\theta}$$

$$v_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\int_{-N}^{0} na(n)r^{n-1}P_n\,dn-v_\infty\cos\theta+\frac{m}{4\pi}\frac{(r-a\cos\theta)}{R^3}$$

$$v_\theta=\frac{\partial\varphi}{r\,d\theta}=-\int_{-N}^{0} a(n)\sin\theta r^{n-1}P_n'\,dn+v_\infty\sin\theta+\frac{ma\sin\theta}{4\pi R^3}\tag{1.1}$$

Здесь a — координата источника, P_n — функции Лежандра, $N>0$.

Форма тела определяется уравнением

$$\Psi=\frac{1}{2}v_\infty r^2\sin^2\theta-\int_{-N}^{0} a(n)r^{n+1}(\cos\theta P_n-P_{n+1})\,dn+m\cos\theta_1=-m\tag{1.2}$$

Разделим (1.2) на $r\sin^2\theta$, тогда, учитывая, что при больших r

$$\frac{m(1+\cos\theta_1)}{r(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\approx\frac{m}{r}$$

получим

$$r\frac{1+\cos\theta}{2}v_\infty\approx\int_{-N}^{0} r^na(n)\frac{\sin n\pi}{\pi(1+n)}\,dn\tag{1.3}$$

Таким образом, приходим к асимптотическому закону расширения тела, уже найденному ранее [1] в случае отсутствия источника.

Силу, действующую на источник, определим по формуле

$$\mathbf{F}=\frac{1}{2}\rho\int\limits_S[v^2\mathbf{n}-2\mathbf{v}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})]dS$$

Здесь S — некоторая поверхность, охватывающая источник. Суммарная сила сопротивления, действующая на часть тела, отсекаемую сферой радиуса r, и источник, будет равна

$$X=2\pi r^2\int\limits_0^\theta(p-p_\infty)\cos\theta\sin\theta\,d\theta+2\pi r^2\rho\int\limits_0^\theta v_xv_r\sin\theta\,d\theta \tag{1.4}$$

Здесь θ — значение полярного угла, соответствующее концу головной части тела. Учитывая, что

$$2\pi\int\limits_0^\theta r^2v_r\sin\theta\,d\theta=m$$

при помощи (1.1) формулу (1.4) представим в виде

$$X-v_\infty\rho m=\rho\pi\int\limits_{-N}^0\int\limits_{-N}^0 dn\,dm\,r^{n+m}a(n)a(m)I_{n,m}- \tag{1.5}$$

$$-\frac{\rho m}{2}\int\limits_1^z\int\limits_{-N}^0 a(n)r^{n+1}\frac{[rP_n'(1-z^2)+nP_n(rz-a)]}{(r^2+a^2-2raz)^{3/2}}dn\,dz-$$

$$-\frac{m^2\rho}{16\pi}\int\limits_1^z\frac{r^2(r^2+a^2)z}{(r^2+a^2-2raz)^3}dz,\qquad z=\cos\theta$$

$$I_{n,m}=\frac{nm}{2(n+m)}[(P_{m-1}+P_m)(P_{n-1}-P_n)+(P_{n-1}+P_n)(P_{m-1}-P_m)]$$

При $r\to\infty$ два последних слагаемых стремятся к нулю и, следовательно, получаем следующий асимптотический закон:

$$X+v_\infty\rho m\approx\frac{\pi}{2}\rho v_\infty^2r^2(1+z)^2\ln\frac{2}{1+z}$$

или, переходя к декартовым координатам по формулам $r\approx|x|$, $1+z\approx{}^1/_2y^2/|x|^2$ и обозначая $X_\infty=\lim\limits_{x\to\infty}X$, найдем

$$\frac{X_\infty}{{}^1/_2\rho v_\infty^2}=\pi p-\frac{2m}{v_\infty},\qquad y^4\approx\frac{4p|x|^2}{\ln|x|} \tag{1.6}$$

Таким образом, зная форму тела, суммарную силу можно определить по формуле (1.6). Из этой формулы видно, что в зависимости от закона расширения и мощности источника суммарная сила может быть как силой сопротивления, так и силой тяги, причем при $p=0$ сила тяги будет максимальной. Очевидно, что все эти рассуждения будут справедливы и в случае кавитационного обтекания осесимметричного препятствия, поскольку при таком обтекании суммарная сила должна быть величиной конечной и, следовательно, каверна в бесконечности должна расширяться по закону (1.6).

2. Рассмотрим плоский поток идеальной несжимаемой жидкости, набегающей из бесконечности на препятствие, причем в потоке содержится k источников с мощностями m_k и несколько вихрей. Считая давление в каверне равным нулю, суммарную силу, действующую на тело, и особенности можно определять по формуле

$$X+iY=\frac{i\rho}{2}\left[v_\infty^2\int\limits_K dz-\int\limits_K\frac{d\overline{W}}{dz}d\overline{W}\right] \tag{2.1}$$

Здесь K – контур, включающий в себя все особенности. Отобразим область течения на верхней единичный полукруг плоскости ζ так, чтобы точкам схода струй соответствовали точки $\zeta_A=-1$, $\zeta_B=1$, а бесконечно удаленная точка потока попала в начало координат. На вспомогательной плоскости ζ контуру K соответствует полуокружность K_ζ бесконечно малого радиуса с центром в точке $\zeta=0$, причем эта точка обходится по часовой стрелке. Учитывая, что

$$\int\limits_{K_\zeta} \frac{d\overline{W}}{dz}\, d\overline{W} = v_\infty{}^2 \int\limits_{\overline{K_\zeta}} \frac{dz}{dW}\, dW$$

формулу (2.1) можно привести к виду

$$X + iY = -\frac{i\rho v_\infty}{2} \oint \frac{v_\infty\, dz}{dW}\, dW = -\frac{i\rho v_\infty}{2} \oint e^{i\omega}\, dW \tag{2.2}$$

$$\omega=\theta+i\ln v/v_\infty$$

При $\zeta=0$ функция $\omega(\zeta)$ регулярна, поэтому в окрестности этой точки справедливо разложение

$$e^{i\omega(\zeta)} = 1 + i\omega'(0)\zeta + \frac{i\omega''(0)-\omega'^2(0)}{2}\zeta^2 + \ldots \tag{2.3}$$

причем коэффициенты ω', ω'', ... действительные.

При симметричном течении функция $dw/d\zeta$ в окрестности $\zeta=0$ разлагается в ряд

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{M}{\zeta^3} - \frac{1}{\pi}\sum_k \frac{m_k}{\zeta} + R(\zeta) \tag{2.4}$$

Здесь $R(\zeta)$ — регулярная функция. Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.2) и вычисляя интеграл, получим

$$X = \rho v_\infty \pi \left[-\frac{M\omega'^2(0)}{2} - \sum_k \frac{m_k}{\pi} \right] \tag{2.5}$$

Найдем теперь асимптотический закон расширения струй

$$x + iy = \int dz = \frac{1}{v_\infty}\left[-\frac{M}{2\zeta^2} - \frac{i\omega'(0)M}{\zeta} + \ldots \right]$$

$$x \sim -\frac{M}{2v_\infty\zeta^2}, \qquad y \sim -\frac{\omega'(0)M}{v_\infty\zeta}$$

Таким образом, в бесконечности струи расширяются параболически, причем

$$y^2 = -\frac{M\omega'^2(0)}{v_\infty} 2x = 2px$$

При этих обозначениях формула (2.5) примет вид

$$\frac{X}{{}^1/_2\rho v_\infty{}^2} = \pi p - \frac{2}{v_\infty}\sum_k m_k$$

Следует учесть, что p в последнем выражении есть также функция m_k. Таким образом, приходим к формуле, уже найденной ранее в случае осесимметричного обтекания полубесконечного тела. При отсутствии источника получаем известную формулу Чаплыгина [2].

Автор благодарит Г. Ю. Степанова за внимание к работе.

Поступила 11 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуревич М. И.* Обтекание осесимметричного полутела конечного сопротивления. ПММ, 1947, т. 11, вып. 1.
2. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.