

3. Федяев В. Л. Об одном способе решения задачи движения жидкости, вызванного колебаниями поверхности цилиндра. Тр. семинара по теории оболочек, вып. 6. Казанск. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1975.
4. Richtmeyer R. D. Difference methods for initial - value problems. New York - London, 1957. Interscience.
5. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. Communications in Pure and Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 2, p. 243-255.
6. Roberts K. V., Weiss N. O. Convective difference schemes. Math. Communications, 1966, vol. 20, No. 94.

УДК 532.546

ФИЛЬТРАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПОРОД С ПОВЫШЕННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Н. Н. ВЕРИГИН, В. С. САРКИСЯН, А. В. ШИБАНОВ

(Москва)

Для подземного хранения жидких и газообразных продуктов и отходов промышленности в скальных горных породах может быть образована сферическая область повышенной трещиноватости и проницаемости пород R_0 . Такие области могут создаваться с помощью гидроимпульсной техники, высоковольтных подводных разрядов, взрывов в глубоких скважинах.

Рассмотрим закачку жидкости в скважину, размещенную в центре сферической области с проницаемостью $k_s \gg k_e$, где k_e — проницаемость пород в естественном залегании, находящихся вне этой области. При решении задачи будем пользоваться методом осреднения [1, 2], основанным на введении области возмущения (влияния) радиусом $R_1(t)$, в пределах которой во время закачки наблюдается изменение давления в пласте.

Процесс закачки состоит из трех фаз. В первой фазе граница между нагнетаемой и вытесняемой жидкостями $r=R$ и граница возмущения $r=R_1$ находятся в области повышенной проницаемости k_s (фигура). Фильтрационный поток в этом случае состоит из зоны 1 (нагнетаемая жидкость в породах повышенной проницаемости) и зоны 2 (вытесняемая жидкость в тех же породах). Во второй фазе граница R еще находится в области повышенной проницаемости k_s , а граница R_1 уже переместилась в область естественной проницаемости $R_1 > R_0$. Таким образом, фильтрационный поток во вторую фазу состоит из тех же зон 1 и 2 и зоны 3 (вытесняемая жидкость в породах естественной проницаемости). В третьей фазе границы R и R_1 находятся в пределах области естественной проницаемости k_e ($R, R_1 > R_0$). В этом случае поток состоит из той же зоны 1, зоны 2 (нагнетаемая жидкость в породах естественной проницаемости k_e) и зоны 3 (вытесняемая жидкость в породах той же проницаемости k_e).

Уравнения фильтрации для этих зон имеют вид

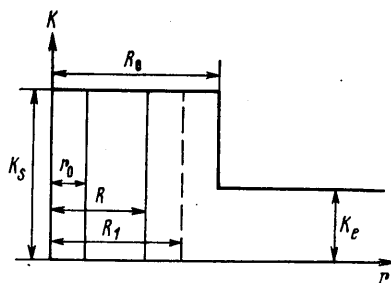
$$(0.1) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial P_i}{\partial r} \right) = \frac{1}{a_i} \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad i=1, 2, 3$$

где P_i и a_i — давления и пьезопроводность в i -й зоне.

Для первой и второй фаз можно принять $a_1 = a_2 = a_s$ и $a_3 = a_e$, а для третьей фазы $a_1 = a_s$ и $a_{2,3} = a_e$, где a_s и a_e — коэффициенты пьезопроводности зоны повышенной трещиноватости и естественного пласта.

В дальнейшем предполагаем, что закачка жидкости производится с постоянным расходом Q .

1. Первая фаза. Как в [3, 4], примем в (0.1) для зоны 1 $\partial P_1 / \partial t = 0$, а для зоны 2 осредним член $\partial P_2 / \partial t$ по координате r , считая его функцией только времени $c_2(t)$.



Тогда из (0.1) получим

$$(1.1) \quad P_1 = \frac{c_1}{r} + c_2, \quad P_2 = c_3 r^2 - \frac{c_4}{r} + c_5$$

где коэффициенты c_{1-5} определяются из граничных условий

$$(1.2) \quad Q = -4\pi \frac{k_s}{\mu_1} r^2 \frac{\partial P_1}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \text{const}$$

$$(1.3) \quad P_1(R) = P_2(R), \quad \frac{\partial P_1(R)}{\partial r} = \rho \frac{\partial P_2(R)}{\partial r}, \quad \rho = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$(1.4) \quad P_2(R_1) = P_e = \text{const}, \quad \frac{\partial P_2(R_1)}{\partial r} = 0$$

Здесь μ_1 и μ_2 — вязкости нагнетаемой и вытесняемой жидкостей, P_e — давление в пласте в естественных условиях, R_1 — радиус области возмущения, r_0 — радиус скважины; $R(t)$ и $R_1(t)$ находятся из следующих условий [5]:

$$(1.5) \quad n_s \frac{dR}{dt} = - \frac{k_s}{\mu_1} \frac{\partial P_1(R_1, t)}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

$$(1.6) \quad Qt = 4\pi \beta_s \int_R^{R_1} r^2 (P_2 - P_e) dr$$

где n_s — пористость пород области повышенной проницаемости, β_s — коэффициент упругости второй зоны, характеризующий деформируемость вытесняемой жидкости и пород.

Определяя из (1.2), (1.3) коэффициенты c_{1-5} и подставляя их в (1.1), получим уравнения пьезометрических кривых в зонах I и II

$$(1.7) \quad P_1 = P_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi k_s r} \left[1 - \frac{r}{R} + \frac{1}{\rho} F_1(r, R_1, R) \right]$$

$$(1.8) \quad P_2 = P_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_s r} F_2(R, R_1, r)$$

$$(1.9) \quad F_1(r, R_1, R) = \frac{r(R_1 - R)(2R_1 + R)}{2R(R_1^2 + R_1R + R^2)}$$

$$(1.10) \quad F_2(r, R_1, R) = \frac{1}{R_1^3 - R^3} \left(\frac{1}{2} r^3 + R_1^3 - \frac{3}{2} rR_1^2 \right)$$

При $r=r_0$ из (1.7) определяется забойное давление P_0 .

Вводя P_1 по (1.7) в (1.5) и интегрируя от r_0 до R и от 0 до t , найдем

$$(1.11) \quad \tau = 4\pi n_s a_e \frac{R^3 - r_0^3}{3QR_0^2}, \quad \tau = \frac{a_e t}{R_0^2}; \quad a_e = \frac{k_s}{\mu_2 \beta_s}$$

где β_s — коэффициент упругости естественного пласта.

Интегрируя (1.6) при P_2 по (1.8), получим уравнение для определения R_1

$$(1.12) \quad \tau = a_e^* (R_1 - R)^2 \frac{R_1^2 + 3R_1R + R^2}{10\rho R_0^2 (R_1^2 + R_1R + R^2)}, \quad a_e^* = \frac{a_e}{a_s}, \quad a_s = \frac{k_s}{\mu_1 \beta_s}$$

Длительность первой фазы t_1 находится из (1.10) при $R_1=R_0$.

2. Вторая фаза. Уравнения (0.1) решаем, предполагая, что $\partial P_1/\partial t=0$, а члены $\partial P_{2,3}/\partial t$ осредняем по r . Тогда P_1 будет определяться первым выражением (1.1), а

$$(1.21) \quad P_2 = Ar^2 - \frac{c_3}{r} + c_4, \quad P_3 = c_3 r^2 - \frac{c_6}{r} + c_7$$

В этом случае дополнительно к условиям (1.2), (1.3) имеем

$$(1.22) \quad P_2(R_0) = P_3(R_0), \quad \frac{\partial P_2(R_0)}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial P_3(R_0)}{\partial r}$$

$$\varepsilon = \frac{k_e}{k_s}, \quad P_3(R_1) = P_e = \text{const}, \quad \frac{\partial P_3(R_1)}{\partial r} = 0$$

$$(2.3) \quad Q_0(t) = \frac{\partial}{\partial t} \beta_e^* \int_{R_0}^{R_1} 4\pi r^2 (P_3 - P_e) dr$$

$$Q_0(t) = -4\pi \frac{k_e}{\mu_2} r^2 \frac{\partial P_2}{\partial r} \Big|_{r=R_0}$$

Решение задачи с учетом условия (2.3) получается громоздким и неудобным для пользования. Между тем за время t_1 объем жидкости Qt_1 весьма мал, а радиус $R(t_1) \ll R_0$, поэтому можно допустить, что во второй фазе упругий режим имеет место только в зоне β . Тогда в (0.1) $\partial P_{1,2}/\partial t = 0$, в (2.1) $A = 0$, в (1.6) $R = R_0$, а условие (2.3) отпадает. Определяя из (1.2), (1.3) и (2.2) коэффициенты c_{1-7} и вводя их значения в первое уравнение (1.1) и в (2.1), получим

$$(2.4) \quad P_1 = P_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi k_s r} \left[1 - \frac{r}{R} + \frac{r}{\rho} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) + \frac{1}{\varepsilon \rho} F_1(r, R_1, R_0) \right]$$

$$(2.5) \quad P_2 = P_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_s r} \left[1 - \frac{r}{R_0} + \frac{2}{\varepsilon} F_1(r, R_1, R_0) \right]$$

$$(2.6) \quad P_3 = P_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e r} F_2(r, R_1, R_0)$$

Здесь $F_{1,2}(r, R_1, R_0)$ определяются по (1.9) и (1.10).

Забойное давление P_0 находится по (2.4) при $r=r_0$. Положение границы раздела определяется по (1.5) при значении P_1 по (2.4) после интегрирования от R' до R и от t_1 до t

$$(2.7) \quad \tau = \tau_1 + 4\pi n_s a_e \frac{R'^2 - R^2}{3QR_0^2}, \quad \tau_1 = a_e \frac{t_1}{R_0^2}$$

где t_1 — длительность первой фазы, R' — координата границы раздела при $t=t_1$.

Радиус зоны возмущения R_1 находится из (1.6), где вместо P_2 принимается P_3 из (2.6) и интегрирование выполняется от R_0 до R_1 , что дает

$$(2.8) \quad \tau = (R_1 - R_0)^2 \frac{R_1^2 + 3R_1 R_0 + R_0^2}{10R_0^2 (R_1^2 + R_1 R_0 + R_0^2)}$$

3. Третья фаза. Для третьей фазы фильтрации давления P_{1-3} определяются по (2.1) при $A=0$ и по первому выражению (1.1); коэффициенты c_{1-7} находятся из (1.2), (2.2) и из следующих условий:

$$(3.1) \quad P_1(R_0) = P_2(R_0), \quad \frac{\partial P_1(R_0)}{\partial r} = \varepsilon \frac{\partial P_2(R_0)}{\partial r}$$

$$(3.2) \quad P_2(R) = P_3(R), \quad \frac{\partial P_2(R)}{\partial r} = \rho \frac{\partial P_3(R)}{\partial r}$$

Определяя c_{1-7} и подставляя их в (2.1) и первое выражение (1.1), получим

$$(3.3) \quad P_1 = P_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi k_s r} \left[1 - \frac{r}{R_0} + \frac{r}{\varepsilon(R_0 - R)} + \frac{1}{\varepsilon \rho} F_1(r, R_1, R) \right]$$

$$(3.4) \quad P_2 = P_e + \frac{Q\mu_1}{4\pi k_e r} \left[1 - \frac{r}{R} + \frac{1}{\rho} F_1(r, R_1, R) \right]$$

$$(3.5) \quad P_3 = P_e + \frac{Q\mu_2}{4\pi k_e r} F_2(r, R_1, R)$$

Здесь $F_{1,2}(r, R_1, R)$ находятся по (1.9), (1.10).

Радиус границы раздела R определяется из уравнения

$$(3.6) \quad n_e \frac{dR}{dt} = - \frac{k_e}{\mu_1} \frac{\partial P_2(R)}{\partial r}$$

Интегрируя (3.6) от R_0 до R и от t_1 до t_2 , найдем

$$(3.7) \quad \tau = \tau_2 + \frac{4\pi n_e a_e (R^3 - R_0^3)}{3QR_0^2}, \quad \tau_2 = \frac{a_e t_2}{R_0^2}$$

Длительность первой и второй фаз t_2 определяется по (1.9) при $R=R_0$. Радиус зоны влияния в этом случае находится из соотношения

$$(3.8) \quad \tau = (R_1 - R)^2 \frac{R_1^2 + 3R_1 R + R^2}{10R_0^2 (R_1^2 + R_1 R + R^2)}$$

Для всех трех фаз можно получить решение частных задач (закачка газа в водоносный пласт ($\mu_1 \approx 0$) и жидкости в газонасыщенный пласт ($\mu_2 \approx 0$); закачка жидкости или газа в однородный пласт ($\varepsilon=1, k_s=k_s$). Случай $a_e \rightarrow \infty$ соответствует жесткому режиму фильтрации [6]. Тогда из (3.7), (3.8) следует: $R_1 \rightarrow \infty$. При этом имеют место только вторая и третья фазы фильтрации.

Численный анализ при значениях параметров

$$r_0' = \frac{r_0}{R_0} = 0.2923, \quad \psi = 4\pi \frac{k_s R_0}{Q\mu_2} = 0.01634$$

$$a_e^* = \frac{a_e}{a_s} = 5 \cdot 10^{-4}, \quad \rho = \frac{\mu_1}{\mu_2} = 0.1, 1, 10, \quad \varepsilon = \frac{k_s}{k_s} = 10^{-3}$$

показал, что продолжительность первой фазы t_1 составляет доли секунды. Результаты вычисления величин $\tau = a_e t / R_0^2$ и $\Delta = 4\pi k_s (P_0 - P_e) R / Q\mu_2$ для разных ρ и $R_1^* = R_1 / R_0$ как функций от $R^* = R / R_0$ при жестком и упругом режимах фильтрации приведены в таблице.

R *	$\tau \cdot 10^{-4}$	Жесткий режим			Упругий режим			R ₁ *
		$\rho=0.1$	1.0	10.0	$\rho=0.1$	1.0	10.0	
0.308	2.272	1.0023	—	1.0040	0.7202	0.7203	0.7219	5.1538
0.462	39.93	1.0013	—	1.0137	0.9268	0.9279	0.9392	20.077
0.615	113.3	1.0008	1.0024	1.0186	0.9564	0.9580	0.9742	33.769
0.764	234.2	1.0005	—	1.0216	0.9696	0.9717	0.9906	48.446
1.0	530.9	1.0002	—	1.0242	0.9796	0.9818	1.0036	72.908

Из таблицы (жесткий режим) следует, что при закачке менее вязких жидкостей в более вязкие ($\rho < 1$) давление в скважине P_0 со временем падает, стремясь к предельному случаю, когда весь пласт насыщен менее вязкой жидкостью. При закачке более вязких жидкостей в менее вязкие ($\rho > 1$) наблюдается обратная картина, т. е. с течением времени давление P_0 возрастает, стремясь к предельному случаю, когда весь пласт насыщен более вязкой жидкостью. Однако изменения давления при $\rho = 0.1 - 10$ незначительны. Так, при значениях $R^* = 0.31 \div 1$ величина Δ меняется от 0.2% при $\rho = 0.1$ до 1.7% при $\rho = 10$. Таким образом, изменение соотношения вязкостей не приводит к существенному изменению забойного давления, которое оказывается практически равным давлению при фильтрации однородных жидкостей ($\rho = 1, \mu_1 = \mu_2$).

Из таблицы вытекает, что при упругом режиме со временем давление P_0 в обоих случаях ($\rho \geq 1$) возрастает. Оно возрастает также с увеличением ρ . Максимальный рост давления с увеличением ρ достигается при $R^* = 1$. Однако здесь рост давления при $\tau \geq 40$ несуществен и составляет 2.5% при $\rho = 0.1$ и 6% при $\rho = 1.0$. Различие Δ при упругом и жестком режимах фильтрации при $\tau \geq 40$ не превышает 7.5%.

Из вышеизложенного следует, что при проектировании полигонов захоронения гидродинамические расчеты можно провести по формулам, полученным для жесткого режима фильтрации [6]. При этом как первое приближение при определении забойного давления можно принять $\rho = 1$.

Поступила 2 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов Ю. Д. Об одной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод. Укр. матем. ж., 1953, т. 5, № 2.
2. Пирсертян А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Баку, Азнефтеиздат, 1956.
3. Лейбензон Л. С. Собр. тр., т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1953.
4. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. М.-Л., Гостехиздат, 1948.

5. Веригин Н. Н. Нагнетание вязущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТИ, 1952, № 5.
6. Веригин Н. Н., Саркисян В. С. Закачка жидкостей в пласты-коллекторы, имеющие локальную зону искусственно повышенной трещиноватости, насыщенную водой, при постоянном дебите. Тр. ВНИИ водоснабж., канализ., гидротехн. сооруж. и инж. гидрогеол., 1973, вып. 37.
7. Веригин Н. Н., Саркисян В. С., Тарощин Ю. Л. О сферической задаче фильтрации жидкости и газа при изменении проницаемости пород по экспоненциальному закону. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.

УДК 532.58.011

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ЗАКОН РАСШИРЕНИЯ КАВЕРНЫ ПРИ НАЛИЧИИ В ПОТОКЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ

Н. Б. СОТИНА

(Москва)

Асимптотический закон расширения осесимметричного полутела конечного сопротивления, обтекаемого потоком идеальной, несжимаемой жидкости, и его связь с силой, действующей на полутело, получен в [1]. Очевидно, что деформация носовой части тела не изменит вида найденных выражений. Ниже будет показано, как изменится асимптотический закон и величина гидродинамических реакций для полутел конечного сопротивления при наличии в потоке источников (стоков).

1. Не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что на оси x перед телом находится один точечный источник мощности m . По аналогии с [2] потенциал скоростей зададим в виде

$$\varphi = \int_{-N}^0 a(n) [r^n P_n(\cos \theta) - 1] dn - rv_\infty \cos \theta - \frac{m}{4\pi R}$$

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}$$

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \int_{-N}^0 na(n) r^{n-1} P_n dn - v_\infty \cos \theta + \frac{m}{4\pi} \frac{(r - a \cos \theta)}{R^3}$$

$$v_\theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = - \int_{-N}^0 a(n) \sin \theta r^{n-1} P_n' dn + v_\infty \sin \theta + \frac{ma \sin \theta}{4\pi R^3}$$

(1.1)

Здесь a — координата источника, P_n — функции Лежандра, $N > 0$.
Форма тела определяется уравнением

$$\Psi = \frac{1}{2} v_\infty r^2 \sin^2 \theta - \int_{-N}^0 a(n) r^{n+1} (\cos \theta P_n - P_{n+1}) dn + m \cos \theta_1 = -m$$

(1.2)

Разделим (1.2) на $r \sin^2 \theta$, тогда, учитывая, что при больших r

$$\frac{m(1 + \cos \theta_1)}{r(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \approx \frac{m}{r}$$

получим

$$r \frac{1 + \cos \theta}{2} v_\infty \approx \int_{-N}^0 r^n a(n) \frac{\sin n\pi}{\pi(1+n)} dn$$

(1.3)