

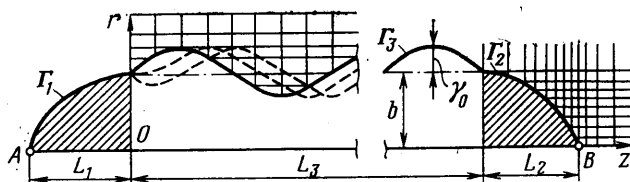
**О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ДЕФОРМИРУЮЩЕГОСЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ  
В ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

М. М. СУЛЕЙМАНОВА

(Казань)

В работе [1] описывается модель волнового движителя и экспериментальной установки для определения тяги, развиваемой моделью в воде. На поверхности модели возбуждается шесть осесимметричных бегущих волн, вызывающих движение модели и окружающей ее жидкости. Стационарное течение жидкости, вызванное колебаниями поверхности цилиндра бесконечной длины, исследовано в [2, 3].

В данной статье находится тяга удлиненного тела вращения в жидкости, порожденная бегущими по гибкой цилиндрической части тела волнами. Для опре-



Фиг. 1

деления гидродинамических поверхностных сил численно интегрируются уравнения Навье – Стокса. Приводятся графики зависимостей силы тяги от скорости и амплитуды волны.

Рассматривается удлиненное тело вращения, помещенное в вязкую несжимаемую жидкость (фиг. 1). Пусть гибкая цилиндрическая часть поверхности тела совершает поперечные колебания по закону

$$(1) \quad r^* = b + \gamma_0(z, t) \sin(kz - \sigma t)$$

Такое определение поверхности соответствует бегущим волнам в направлении оси  $z$  со скоростью  $c = \sigma/k$ , длиной волны  $\lambda = 2\pi/k$  и частотой  $\Omega = \sigma/2\pi$ . Здесь  $t$  – время,  $b$  – радиус цилиндра.

Нестационарное осесимметричное течение жидкости, обусловленное колебаниями тела, описывается уравнением

$$(2) \quad \dot{\omega} + (u\omega)_{,r} + (w\omega)_{,z} = \nu(\omega_{,rr} + \omega_{,zz} + \omega_{,r}r^{-1} - \omega r^{-2})$$

где завихренность  $\omega = u_{,z} - w_{,r}$ , функция тока  $\psi$  и компоненты скорости  $u, w$  связаны соотношениями

$$(3) \quad \omega r = \psi_{,rr} + \psi_{,zz} - \psi_{,r}r^{-1}, \quad u = \psi_{,z}r^{-1}, \quad w = -\psi_{,r}r^{-1}$$

Система (2) интегрируется при следующих начальных и граничных условиях:

$$u=0, \quad w=0 \quad (t=0)$$

$$(4) \quad u=r^*, \quad w=0, \quad (r, z) \in \Gamma_3, \quad u=w=0, \quad (r, z) \in \Gamma_1, \Gamma_2$$

$$(5) \quad u \rightarrow 0, \quad w \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \pm \infty)$$

$$(6) \quad u \rightarrow 0, \quad w \rightarrow -U(t) \quad (r \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \pm \infty)$$

Здесь  $U(t)$  – скорость модели,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – поверхности жестких обтекаемых концов тела вращения,  $\Gamma_3$  – деформирующаяся поверхность цилиндрической части модели,  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ .

Условия (6), (5) соответствуют поступательному движению и закрепленному телу.

Изгибные колебания (1) порождают тяговую силу, вследствие чего тело приходит в движение с некоторым ускорением  $m\dot{U}(t) = F(t)$ . Одновременно с тягой на поверхности последнего развиваются силы сопротивления.

Поверхностная сила, приложенная к телу со стороны жидкости

$$(7) \quad F(t) = 2\pi \int_A^B [(-p + 2\nu w_{,z})r_{,z}^* + \nu(w_{,r} + u_{,z})] (1 + r_{,z}^*)^{-0.5} r^* dz$$

$$r^* = \sqrt{z} \quad (-L_1 \leq z \leq 0), \quad r^* = b + \gamma_0 \sin(kz - \sigma t) \quad (0 \leq z \leq L_3),$$

$$z^* = \sqrt{L_3 + L_2 - z} \quad (L_3 \leq z \leq L_3 + L_2)$$

в установившемся режиме движения ( $U(t) \rightarrow \text{const}$ ) равна нулю.

Если тело закреплено, сопротивление отсутствует и сила  $F(t)$  равна тяге. В формуле (7)  $m$ ,  $L$  — масса и общая длина тела,  $L = L_1 + L_2 + L_3$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  — длины жестких обтекаемых концов тела,  $L_3$  — длина цилиндра,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

Введем безразмерные величины

$$u = \bar{u}c, \quad w = \bar{w}c, \quad r = \bar{r}b, \quad z = \bar{z}b, \quad U = \bar{U}c$$

$$\psi = \bar{\psi}cb^2, \quad \omega = \bar{\omega}c/b, \quad t = \tau b/c, \quad \gamma = \gamma_0/b$$

Здесь  $\gamma$  — относительная амплитуда бегущей волны,  $b$  — радиус цилиндрической части модели. В новых безразмерных обозначениях соотношения (2) — (6) сохраняют прежнюю форму, за исключением величины  $\nu$ , равной теперь безразмерной комбинации  $1/\text{Re}$ , где  $\text{Re} = cb/\nu$ ; черта сверху у безразмерных величин далее опускается.

Система дифференциальных уравнений (2), (3) при условиях (4) — (6) решается методом конечных разностей. Принцип построения прямоугольной согласованной с неравномерным шагом расчетной сетки показан на фиг. 1. Стандартные разложения в ряд Тейлора для первой и второй производных имеют вид

$$(8) \quad \frac{\delta f}{\delta r_{i,j}} = \frac{\Delta r_{i-1} f_{i+1,j}}{\Delta r_i (\Delta r_{i-1} + \Delta r_i)} - \frac{\Delta r_i f_{i-1,j}}{\Delta r_{i-1} (\Delta r_{i-1} + \Delta r_i)} - \frac{\Delta r_{i-1} - \Delta r_i}{\Delta r_i \Delta r_{i-1}} f_{i,j}$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta r_{i,j}^2} = \frac{2f_{i+1,j}}{\Delta r_i (\Delta r_{i-1} + \Delta r_i)} + \frac{2f_{i-1,j}}{\Delta r_{i-1} (\Delta r_{i-1} + \Delta r_i)} - \frac{2f_{i,j}}{\Delta r_i \Delta r_{i-1}}$$

Здесь и далее  $i$  — индекс, увеличивающийся в направлении радиальной координаты  $r$ ;  $j$  — в направлении оси  $z$ ;  $\Delta r_i$ ,  $\Delta z_j$  — шаги по  $r$  и  $z$  соответственно. Аппроксимация производных  $\delta f/\delta z_{i,j}$  и  $\delta^2 f/\delta z_{i,j}^2$  аналогична выражениям (8).

Нелинейные члены в (2) аппроксимируются разностями, «составленными в направлении против потока» [4, 5]

$$(9) \quad \frac{\delta(u\omega)}{\delta r_{i,j}} = \begin{cases} [(u\omega)_{i+1,j} - (u\omega)_{i,j}]/\Delta r_i, & u_{i,j} < 0 \\ [(u\omega)_{i,j} - (u\omega)_{i-1,j}]/\Delta r_{i-1}, & u_{i,j} > 0 \end{cases}$$

Если знак  $u_{i,j}$  меняется вблизи узловой точки, то расчетная схема преобразуется так, чтобы выполнялся закон сохранения [8]. Выражения, аналогичные (9), используются для аппроксимации члена  $\delta(w\omega)/\delta z_{i,j}$ .

Уравнение параболического типа (2) решается по явной двухслойной схеме. На каждом шаге по времени из уравнения (3) эллиптического типа находятся искомые  $\psi_{i,j}$  по итерационной схеме

$$(10) \quad \psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n + \beta_{i,j} \left( \frac{\delta^2 \psi^n}{\delta r_{i,j}^2} + \frac{\delta^2 \psi^n}{\delta z_{i,j}^2} - \frac{\delta \psi^n}{\delta r_{i,j}} r^{-1} \right)$$

Параметры  $\beta_{i,j}$  в схеме (10) подбираются из условия

$$\beta_{i,j} \leq \frac{\alpha}{\|\Psi\|} = \frac{\alpha}{\max |\psi_{i,j}|_i}, \quad 0.5 \leq \alpha \leq 1$$

где  $\Psi$  — матрица коэффициентов разностного уравнения (10). Процесс итераций считается законченным, если выполняется условие  $\|\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n\| < 10^{-5}$ . Скорость сходимости процесса (10) тем медленнее, чем меньше  $\text{Re} = cb/\nu$ , что связано с быст-

рой диффузией вихрей за расчетный промежуток времени. Составляющие скорости  $u_{i,j}, w_{i,j}$  находятся из выражений (3) с помощью (8).

Граничные условия на бесконечности (5), (6) заменяются условиями на конечном расстоянии

$$\begin{aligned} u=0, \quad w &= -U(t) \quad \text{или} \quad u=w=0 \quad (r=3b, \quad -4b \leq z \leq L+4b) \\ u=0, \quad \omega &= 0 \quad (z = -4b, \quad 0 \leq r \leq 3b) \\ u_{,z}=0, \quad \omega_{,z} &= 0 \quad (z=L+4b, \quad 0 \leq r \leq 3b) \end{aligned}$$

При  $r=0, -4b \leq z \leq L+4b$  выполняются условия симметрии  $u_r=w_r=0$ .

Амплитуда возрастает по закону  $\gamma_0(z, t) = \gamma_1 \exp(-\tau^2) [1 - (\xi - 1)^6]$ ,  $\xi = 2zL_3^{-1}$ .

Вычисления проводятся в следующей последовательности: а) при  $\tau = \Delta t$  задается первоначальная форма поверхности с минимальной амплитудой и соответствующие значения скоростей (4) в узловых точках этой границы; б) формируется соответствующая  $\Gamma_3$  сеточная область; в) определяются искомые  $\psi_{i,j}, u_{i,j}, w_{i,j}, \omega_{i,j}$  в узлах расчетной области; г) интегрированием вдоль линий  $z = \text{const}$  находится давление на поверхности тела из выражения

$$\begin{aligned} p^* &= \int_{\Gamma} (-\omega_{,z} R e^{-1} + \dot{u} + w\omega) dr - 0.5(u_{\Gamma}^2 + w_{\Gamma}^2) + 0.5(u_{\infty}^2 + w_{\infty}^2) - \dot{U}, \\ p^* &= (p_{\Gamma} - p_{\infty}) / \rho c^2 \end{aligned}$$

где  $u_{\Gamma}, w_{\Gamma}$  — компоненты скорости на поверхности тела,  $u_{\infty}, w_{\infty}$  — при  $r=3b$ ; д) с использованием  $u_{i,j}, w_{i,j}, p^*$  вычисляется поверхностная сила, действующая на тело. Сила  $\bar{F}(\tau) = F(t) / (\rho c^2 b^2 2\pi)$  равна тяге, если расчеты выполнены при граничных условиях (5).

В том случае, когда тело, свободное от связей (условия (6)), движется, его скорость определяется из выражения

$$U^{k+1}(\tau) = U^k(\tau) + AF(\tau), \quad A = 2\pi \eta b^3 G^{-1} \Delta t, \quad \eta = \rho g$$

Здесь  $g$  — ускорение силы тяжести,  $G$  — вес модели, кг,  $U = \bar{U}c$ .

Далее шаг по времени наращивается, волна, увеличивая амплитуду, перемещается. При этом она пересекает (через каждые  $\Delta t_1 = k\Delta t, k \geq 1$ ) сеточную область в узловых точках (фиг. 1). Процесс повторяется до тех пор, пока картина течения или значения  $\bar{F}(\tau)$  не будет повторяться с определенной частотой.

Используемая в расчетах сетка состояла из 104 ячеек в направлении потока и 35 ячеек поперек основного течения. Амплитуда волны по высоте делилась на 4, 5 и 6 частей.

Программа, составленная в кодах ЭЦВМ М-222, позволяла исследовать влияние амплитуды, длины, скорости, числа и конфигурации бегущих волн, а также размеров и формы тела на величину силы тяги и скорости поступательного движения осесимметричного тела вращения.

Оценка численных результатов получена в основном сравнением с экспериментом. Приведем некоторые соображения о возможных источниках погрешности используемого метода. Одним из них являются ошибки аппроксимации, связанные с заменой дифференциальных уравнений и граничных условий их разностными аналогами. В данном случае эффект сеточной вязкости, создаваемый непосредственно разностной схемой, есть основной источник погрешности. Ее значение приблизительно равно  $\Delta r/\delta$ , где  $\delta$  — локальная толщина погранслоя. Чтобы оценить влияние последних, проводятся расчеты при различных шагах сетки в пространстве и времени.

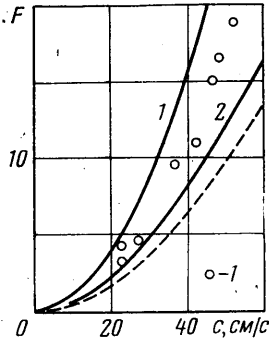
На фиг. 2 приводятся данные, характеризующие изменение силы тяги  $F(\Gamma)$  в зависимости от скорости бегущей волны  $c$  (см/сек) при следующих значениях параметров:  $b=6$  см,  $\lambda=12$  см,  $\gamma_1=0.06$  см,  $L_1=L_2=1.0$  б,  $L_3=6\lambda$  (кривая 1 соответствует шести осесимметричным волнам),  $L_3=3\lambda$  (кривая 2 соответствует трем волнам). Там же штриховой линией нанесены аналитические решения [2, 3] для бесконечного цилиндра ( $L_3 = \infty$ ).

В работе [4] представлены результаты эксперимента в виде зависимости  $F(c)$  при различных глубинах погружения  $h$ . Наибольшая тяга при этом достигалась при малом значении  $h$ . Как отмечено в [4], с увеличением глубины  $h$  возрастает статическое противодавление со стороны жидкости и вследствие этого изменяется форма и уменьшается амплитуда поверхностной волны. Последнее обстоятельство является наиболее существенным, так как сила тяги зависит от амплитуды почти по квадратическому закону. Результаты рис. 3 в [4] при больших глубинах погружения  $h \geq 6$  соответствуют фактически меньшим значениям амплитуды волны. В повторных экспериментах удалось выдерживать амплитуду постоянной на больших глубинах. Результаты замеров силы тяги в последнем случае отмечены точками 1.

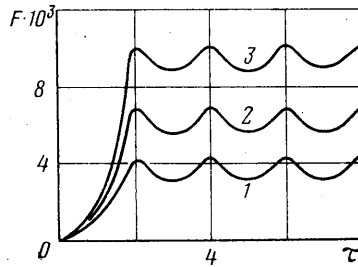
Из фиг. 2 следует: а) качественное согласие численных решений (кривая 1,  $L_3=6\lambda$ ) с экспериментальными данными, б) при увеличении скорости волны в указанных пределах тяга возрастает примерно по квадратичному закону.

Далее все результаты получены при  $L_3=3\lambda$ ,  $\lambda=2b$ ,  $L_1=L_2=1.0b$ .

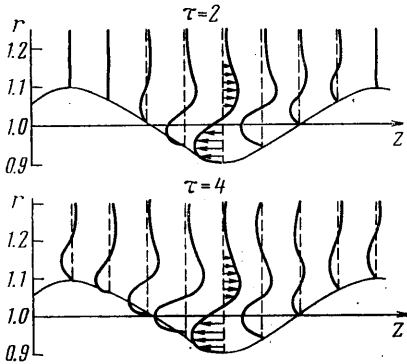
Графики зависимостей безразмерной силы тяги  $F$  от времени при  $Re=7200$ , 1800, 900 (кривые 1-3 соответственно) приведены на фиг. 3. До  $\tau \approx 2$  наблюдается



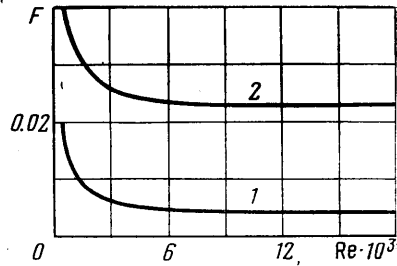
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

переходный режим, связанный с нарастанием амплитуды, далее зависимость тяги от времени принимает установившийся колебательный характер. Аналогичное поведение тяги во времени наблюдается и в эксперименте.

На фиг. 4 изображены эпюры продольной скорости  $w$  на подвижной поверхности тела (здесь показана одна волна) в моменты времени  $\tau=2, 4$  при  $\gamma=0.1$ ,  $Re=7200$ .

Изменение силы тяги  $F$  в зависимости от параметра  $Re$  показано на фиг. 5 (кривые 1, 2 соответствуют значениям  $\gamma=0.05, 0.1$ ). Как и следовало ожидать, чем меньше характерный размер тела и скорость распространения волны  $c$ , тем больше влияние вязкостных сил. Для крупных тел с большими скоростями волны это влияние незначительно.

В заключение автор благодарит М. А. Ильгамова за внимание к работе и полезные советы.

Поступила 18 X 1976

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильгамов М. А., Талдыкин М. В. Управление деформацией цилиндрической оболочки, находящейся в жидкости. Тр. семинара по теории оболочек, вып. 6. Казанск. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1975.
2. Ильгамов М. А., Федяев В. Л. О стационарном движении жидкости, вызванном колебаниями поверхности цилиндра. Тр. семинара по теории оболочек, вып. 6. Казанск. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1975.

3. Федяев В. Л. Об одном способе решения задачи движения жидкости, вызванного колебаниями поверхности цилиндра. Тр. семинара по теории оболочек, вып. 6. Казанск. физ.-техн. ин-т АН СССР, 1975.
4. Richtmyer R. D. Difference methods for initial - value problems. New York - London, 1957. Interscience.
5. Courant R., Isaacson E., Rees M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. Communications in Pure and Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 2, p. 243-255.
6. Roberts K. V., Weiss N. O. Convective difference schemes. Math. Communications, 1966, vol. 20, No. 94.

УДК 532.546

### ФИЛЬТРАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В СФЕРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ПОРОД С ПОВЫШЕННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Н. Н. ВЕРИГИН, В. С. САРКИСЯН, А. В. ШИБАНОВ

(Москва)

Для подземного хранения жидких и газообразных продуктов и отходов промышленности в скальных горных породах может быть образована сферическая область повышенной трещиноватости и проницаемости пород  $R_0$ . Такие области могут создаваться с помощью гидроимпульсной техники, высоковольтных подводных разрядов, взрывов в глубоких скважинах.

Рассмотрим закачку жидкости в скважину, размещенную в центре сферической области с проницаемостью  $k_s \gg k_e$ , где  $k_e$  — проницаемость пород в естественном залегании, находящихся вне этой области. При решении задачи будем пользоваться методом осреднения [1, 2], основанным на введении области возмущения (влияния) радиусом  $R_1(t)$ , в пределах которой во время закачки наблюдается изменение давления в пласте.

Процесс закачки состоит из трех фаз. В первой фазе граница между нагнетаемой и вытесняемой жидкостями  $r=R$  и граница возмущения  $r=R_1$  находятся в области повышенной проницаемости  $k_s$  (фигура). Фильтрационный поток в этом случае состоит из зоны 1 (нагнетаемая жидкость в породах повышенной проницаемости) и зоны 2 (вытесняемая жидкость в тех же породах). Во второй фазе граница  $R$  еще находится в области повышенной проницаемости  $k_s$ , а граница  $R_1$  уже переместилась в область естественной проницаемости  $R_1 > R_0$ . Таким образом, фильтрационный поток во вторую фазу состоит из тех же зон 1 и 2 и зоны 3 (вытесняемая жидкость в породах естественной проницаемости). В третьей фазе границы  $R$  и  $R_1$  находятся в пределах области естественной проницаемости  $k_e$  ( $R, R_1 > R_0$ ). В этом случае поток состоит из той же зоны 1, зоны 2 (нагнетаемая жидкость в породах естественной проницаемости  $k_e$ ) и зоны 3 (вытесняемая жидкость в породах той же проницаемости  $k_e$ ).

Уравнения фильтрации для этих зон имеют вид

$$(0.1) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial P_i}{\partial r} \right) = \frac{1}{a_i} \frac{\partial P_i}{\partial t}, \quad i=1, 2, 3$$

где  $P_i$  и  $a_i$  — давления и пьезопроводность в  $i$ -й зоне.

Для первой и второй фаз можно принять  $a_1 = a_2 = a_s$  и  $a_3 = a_e$ , а для третьей фазы  $a_1 = a_s$  и  $a_{2,3} = a_e$ , где  $a_s$  и  $a_e$  — коэффициенты пьезопроводности зоны повышенной трещиноватости и естественного пласта.

В дальнейшем предполагаем, что закачка жидкости производится с постоянным расходом  $Q$ .

1. Первая фаза. Как в [3, 4], примем в (0.1) для зоны 1  $\partial P_1 / \partial t = 0$ , а для зоны 2 осредним член  $\partial P_2 / \partial t$  по координате  $r$ , считая его функцией только времени  $c_2(t)$ .

