

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ,
ВЫЗВАННЫХ НЕОДНОРОДНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ
ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

В. М. ШИХОВ, В. И. ЯКУШИН

(Пермь)

Исследуется устойчивость стационарных конвективных плоскопараллельных течений в вертикальном слое вязкой несжимаемой жидкости толщиной h . Движение обусловлено источниками тепла, распределенными в жидкости с объемной плотностью $Q=Q_0 \exp(-\alpha x)$ (ось x направлена перпендикулярно границам слоя).

Определены области неустойчивости для разных значений числа Прандтля и параметра $N=\alpha h$, характеризующего неоднородность внутренних источников. Показано, что с ростом N происходит качественная перестройка границ устойчивости для возмущений гидродинамического типа и нарастающих тепловых волн.

1. Рассмотрим конвекцию в вертикальном канале, ограниченном плоскостями $x=0$ и h , имеющими одинаковую температуру. Конвективное течение возникает благодаря источникам тепла, неоднородно распределенным в жидкости с плотностью $Q=Q_0 \exp(-\alpha x)$. Такое распределение внутренних источников может возникнуть, например, в поглощающей жидкости при прохождении через нее светового потока.

Выберем в качестве единиц измерения расстояния, времени, скорости, температуры и давления соответственно h , h^2/ν , $g\beta Q_0 h^4 / (2\nu\rho C_p \chi)$, $Q_0 h^2 / (2\rho C_p \chi)$, $g\beta Q_0 h^3 / (2\rho C_p \chi)$; здесь все обозначения обычные. В безразмерных переменных уравнения конвекции в приближении Буссинеска для среды с внутренними источниками тепла примут вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + G(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{v} + T\boldsymbol{\gamma}$$

$$(1.1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + G\mathbf{v}\nabla T = \frac{1}{P}\nabla^2 T + \frac{1}{P}e^{-Nx}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

Здесь $P=\nu/\chi$ — число Прандтля, $G=g\beta Q_0 h^3 / (2\nu^2 \rho C_p \chi)$ — число Грасгофа, $N=\alpha h$ — параметр, характеризующий степень неоднородности внутренних источников (для поглощающей жидкости N имеет смысл оптической глубины), $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Будем искать стационарное решение уравнений (1.1) в виде плоскопараллельного течения, удовлетворяющего граничным условиям и условию замкнутости потока

$$(1.2) \quad \mathbf{v} = (0, 0, v_0(x)), \quad T_0(x), \quad p_0(z)$$

$$(1.3) \quad x=0, 1; \quad T_0=v_0=0$$

$$(1.4) \quad \int_0^1 v_0 dx = 0$$

Такое движение реализуется в средней части достаточно протяженного вертикального канала, закрытого сверху и снизу.

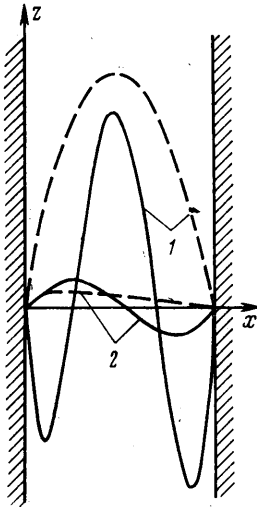
Для профилей температуры и скорости из (1.1) и (1.2) — (1.4) получим

$$T_0 = \frac{1}{N^2} [1 - x(1 - e^{-N}) - e^{-Nx}]$$

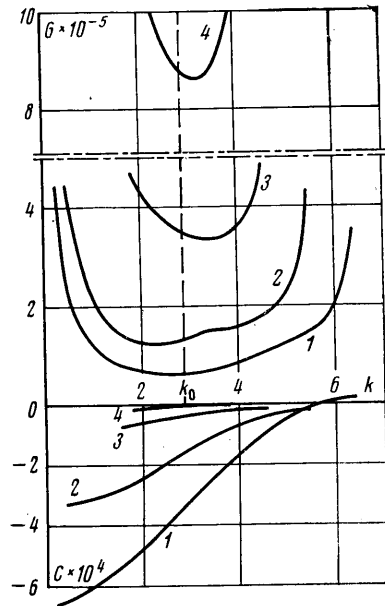
$$(1.5) \quad v_0 = -\frac{1}{N^2} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} (1 - e^{-N}) - \frac{1}{N^2} e^{-Nx} \right] + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

Постоянные C_1, C_2, C_3 определяются из условий (1.2) — (1.4) и зависят от значения N .

На фиг. 1 приведены распределения скорости (сплошные линии) и температуры (пунктирные) для $N=0.5$ и 10 (кривые 1, 2 соответственно). Для малых N (слабая неоднородность) конвективное течение по струк-



Фиг. 1



Фиг. 2

туре аналогично движению жидкости, вызванному однородными внутренними источниками. Устойчивость такого течения (с четными профилями скорости и температуры относительно середины слоя) исследована в [1, 2]. При увеличении N движение непрерывно трансформируется в течение, подобное движению жидкости в плоском вертикальном канале, границы которого нагреты до разных температур. Устойчивость этого конвективного течения подробно обсуждается в [3]. Представляет интерес проследить за характером неустойчивости движения (1.5) для разных N , так как имеется существенное различие в возникновении неустойчивости конвективных течений в слое с однородными внутренними источниками и между вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур [2, 3].

2. Исследуем устойчивость конвективного движения (1.5) относительно малых нормальных плоских возмущений скорости и температуры

$$\psi(x, z, t) = \varphi(x) \exp(-\lambda t + ikz), \quad T(x, z, t) = \vartheta(x) \exp(-\lambda t + ikz)$$

В этих выражениях $\psi(x, z, t)$ — функция тока, связанная с компонентами скорости возмущений соотношениями

$$v_x = -\partial\psi/\partial z, \quad v_z = \partial\psi/\partial x$$

где φ и θ — амплитуды, $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ — комплексный декремент, k — вещественное волновое число («сносовая» неустойчивость в данной работе не рассматривается).

Для определения φ и θ из уравнений (1.1) стандартной процедурой получим следующую систему уравнений и граничных условий

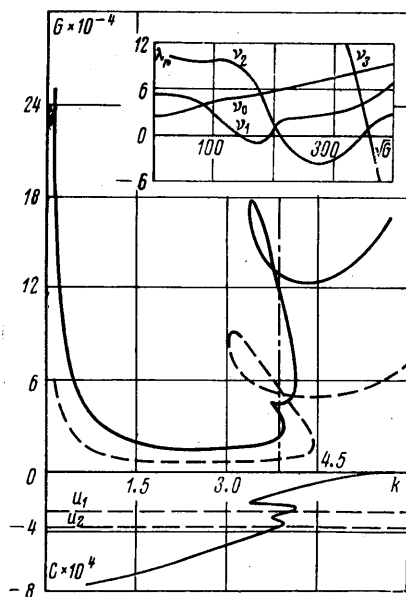
$$(2.1) \quad \begin{aligned} \Delta^2\varphi + ikG(v_0''\varphi - v_0\Delta\varphi) + \theta' &= -\lambda\Delta\varphi \\ \Delta\theta + ikG(T_0'\varphi - v_0\theta) &= -\lambda P\theta \\ \Delta &\equiv d^2/dx^2 - k^2 \\ x=0, 1; \quad \varphi = \varphi' = \theta = 0 \end{aligned}$$

Для решения краевой задачи (2.1) применялся метод пошагового интегрирования Рунге — Кутты — Мерсона с ортогонализацией, который успешно использовался ранее [4, 5] для исследования устойчивости конвективных течений более простой структуры.

3. Перейдем к обсуждению результатов. На фиг. 2 показаны нейтральные кривые и соответствующие им фазовые скорости $c = \lambda_i/(kG)$ для значений $N = 0.5, 2, 5, 10$ (кривые 1–4 соответственно) и числа Прандтля $P = 1$. С ростом N устойчивость течений повышается, что связано с уменьшением суммарного тепловыделения в слое и изменением характера конвективного движения. С увеличением неоднородности происходит сокращение интервала длин волн, вызывающих неустойчивость. Минимальное критическое волновое число стремится к значению $k_0 \approx 2.8$, определяющему длину волны наиболее опасных гидродинамических возмущений течения с кубическим профилем скорости.

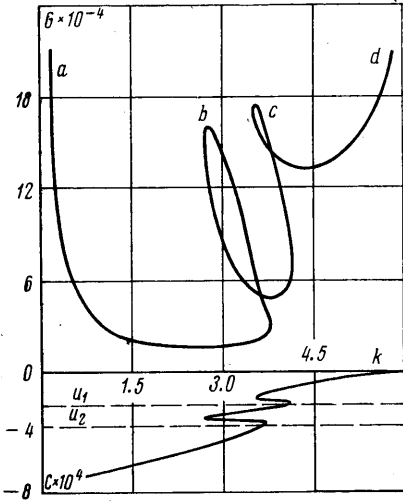
Изменение N сказывается и на величине фазовой скорости нейтральных возмущений. При слабой неоднородности внутренних источников ($N = 0.5$) с вдоль нейтральной кривой меняет знак: длинноволновые возмущения с $k < 5.72$ бегут вниз, а возмущения с $k > 5.72$ центральным восходящим потоком сносятся вверх. Значению волнового числа $k = 5.72$ соответствует стоячее возмущение.

Для больших чисел Прандтля вид нейтральных кривых усложняется. На фиг. 3 для примера представлена нейтральная кривая с $P = 10$ и $N = 0.5$. Пунктирной линией отмечено положение кривой нейтральной устойчивости для конвективного течения в слое с однородными внутренними источниками тепла ($N = 0$). Появление на кривой дополнительного минимума свидетельствует о неустойчивости данного течения по отношению к еще одной моде. Анализ зависимости фазовой скорости от волнового числа (фиг. 3) позволяет указать характер этих возмущений.

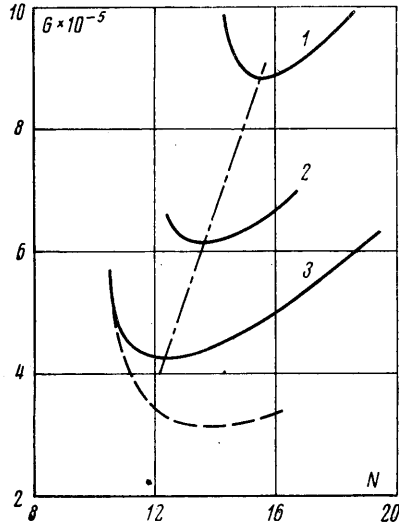


Фиг. 3

Из фигуры видно, что они распространяются со скоростью $c \approx u_1$ (u_1, u_2 — максимальные значения скоростей потоков возле левой и правой границ канала, причем в нашем случае $u_1 < u_2$, а при $N=0$ $u_1 = u_2$). Другой минимум (абсолютный) связан с возмущениями, бегущими с фазовой скоростью $c \approx u_2$, и представляющими собой (см. [2]) нарастающие тепловые волны. Таким образом, новая мода неустойчивости также является тепловыми волнами, связанными с потоком вблизи левой стенки канала.



Фиг. 4



Фиг. 5

Третий минимум нейтральной кривой соответствует, как и для $N=0$, возмущениям гидродинамического типа, т. е. вихрям на границе раздела двух встречных потоков.

Следовательно, данное конвективное течение неустойчиво по отношению к трем модам возмущений.

В верхней части фиг. 3 показано также поведение декрементов некоторых возмущений при $k=3.86$. Соответствующий разрез на нейтральной кривой отмечен штрихпунктирной линией. Неустойчивость течения относительно тепловых волн и гидродинамических возмущений определяется уровнями спектра ν_1, ν_2 и ν_3 . Положительные тепловые волны (фазовая скорость $c > 0$) затухают (декремент ν_0).

Для $N \geq 0.5$ на кривых нейтральной устойчивости появляется еще одна область (петля), в которой течение неустойчиво по отношению сразу к двум модам. Характерная кривая изображена на фиг. 4 при $N=0.7$ и $P=10$. Участки ab и bc определяют границы устойчивости относительно тепловых волн, связанных с потоками соответственно у правой и левой границ канала. Участок cd ограничивает область неустойчивости течения относительно возмущений гидродинамического типа. Фазовая скорость этих возмущений мала по сравнению с максимальными скоростями потоков в канале.

Замкнутые петли на нейтральных кривых существуют в сравнительно узком интервале значений $0.5 < N < 1$. Это обусловлено структурой конвективного течения, которое для таких N состоит из трех достаточно интенсивных потоков. Дальнейшее увеличение N приводит к исчезновению петли в коротковолновой области, что происходит из-за малой скорости движения жидкости возле левой стенки канала.

Сильно неоднородные внутренние источники ($N \geq 5$) вызывают конвективное течение, состоящее из двух встречных потоков с практически линейным распределением температуры в большей части слоя жидкости. При такой структуре движения границы устойчивости для гидродинамических возмущений и тепловых волн, как и для конвективного течения с кубическим профилем скорости [3], определяются различными нейтральными кривыми.

Для рассмотренных значений параметров P , $N < 10$ исследуемое конвективное течение оказалось устойчивым относительно тепловых волн с положительной фазовой скоростью, связанных с восходящим потоком в центре канала. Неустойчивость для такого вида возмущений наступает лишь при достаточно больших значениях P и N . На фиг. 5 приведены границы устойчивости течения для положительных тепловых волн с $k=1$. Кривые 1–3 соответствуют $P=40, 60, 100$. Наличие минимумов на кривых $G(N)$ при разных величинах числа Прандтля свидетельствует о существовании «оптимального» распределения внутренних источников, при котором течение наименее устойчиво относительно тепловых волн с $c > 0$. Отметим, что с ростом P происходит уменьшение предельного значения N , с которого появляется неустойчивость такого типа. Пунктирной линией на фиг. 5 показана зависимость минимального критического числа Грасгофа от N (абсолютная граница устойчивости) для $P=100$.

В заключение заметим, что отличие в развитии возмущений типа бегущих тепловых волн с положительной и отрицательной фазовой скоростью обусловлено характером распределения температуры в потоках, с которыми связаны эти возмущения. Если в нисходящем потоке у правой границы стационарное распределение температуры близко к линейному, то в восходящем потоке профиль температуры имеет максимум. В его окрестности тепловые волны распространяются в почти изотермической жидкости. Как было показано в [6], в изотермических потоках бегущие тепловые волны затухают. По-видимому, этим же можно объяснить отсутствие неустойчивости, связанной с положительными тепловыми волнами, течения в канале с однородными внутренними источниками [2].

Поступила 13 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А. Об устойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А. О двух типах неустойчивости стационарного конвективного течения, вызванного внутренними источниками тепла. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шихов В. М. Об устойчивости конвективного течения жидкости с вязкостью, зависящей от температуры. Теплофизика высоких температур, 1975, т. 13, № 4.
5. Шихов В. М. Устойчивость конвективного движения в плоском вертикальном слое жидкости с проницаемыми границами. ПМТФ, 1976, № 1.
6. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. О спектре тепловых возмущений в потоках несжимаемой жидкости. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.