

ВЛИЯНИЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ НА СТРУКТУРУ ФРОНТА УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

А. Л. ВЕЛИКОВИЧ, М. А. ЛИБЕРМАН

(Москва)

Исследовано влияние дисперсии, связанной с разделением зарядов, на структуру фронта ударной волны в плазме. Показано, что при малых значениях β фронт ударной волны имеет осцилляторную структуру с характерной длиной порядка $r_D / \sqrt{\beta}$.

В гидродинамике нейтрального газа на малых расстояниях становятся существенными диссипативные эффекты, которые, конкурируя с нелинейностью (например, ограничивая рост кругизны фронта волны), приводят к установившимся нелинейным движениям, классический пример которых — ударные волны. Для установившихся нелинейных движений плазмы зачастую более важную роль играют дисперсионные эффекты, которые приводят, например, к возникновению колебаний вследствие конкуренции нелинейности и дисперсии. Хорошо известным примером установившихся нелинейных движений такого рода являются уединенные импульсы — солитоны [1, 2]. В отличие от диссипаций, рассеивающих энергию и приводящих к росту энтропии в конечном состоянии, дисперсия не связана с рассеянием энергии и формирует лишь колебания. Совместное действие дисперсии и диссипации приводит к ударным волнам с осцилляторной структурой.

Эффекты дисперсии в плазме связаны с инерцией электронов и с отклонением от квазинейтральности. В разреженной плазме влияние дисперсии, связанной с инерцией электронов, на структуру ударной волны в магнитном поле и дисперсии от разделения зарядов в случае без магнитного поля исследовалось в [1]. В [3] было показано, что при достаточно малых значениях $\beta = 8\pi p / H^2$ (где p — давление, H — напряженность магнитного поля) в столкновительной ударной волне в замагниченной плазме эффекты дисперсии, связанные с инерцией электронов, более существенны, чем столкновительные диссипации. При этом структура фронта ударной волны становится осцилляторной, и в этом смысле столкновительная ударная волна переходит в ламинарную бесстолкновительную. В [3, 4] плазма предполагалась квазинейтральной и эффекты, связанные с разделением зарядов, учитывались лишь как поправки по малому отношению дебаевского радиуса $r_D = (kT / 4\pi e^2 n)^{1/2}$ к ширине фронта ударной волны Δ (здесь T — температура, n — концентрация, e — заряд электронов, k — постоянная Больцмана).

Цель настоящей работы — выяснение роли дисперсии от разделения зарядов в формировании структуры ударной волны, распространяющейся в плазме поперек магнитного поля. Для установившихся ионно-звуковых колебаний в плазме без магнитного поля разделение зарядов приводит к электростатическим колебаниям электронов на малых расстояниях порядка дебаевского радиуса. В замагниченной же плазме дисперсия от разделения зарядов проявляется в электростатических колебаниях ионов, в то время как электроны привязаны к силовым линиям магнитного поля.

Нетрудно найти характерный масштаб Δ_q колебаний в этом случае. Он должен быть порядка отношения скорости распространения возмущений поперек магнитного поля u' к ионной плазменной частоте $\omega_{pi} = (4\pi e^2 n / m_i)^{1/2}$. При $\beta \ll 1$ $u' = \sqrt{u_s^2 + u_a^2} \approx u_a$, где $u_s = (2\gamma kT / m_i)^{1/2}$ — скорость звука, $u_a = H / (4\pi n m_i)^{1/2}$ — скорость альфвеновской волны, m_i — масса иона, γ — показатель адиабаты плазмы (ограничимся рассмотрением однократно ионизованного одноатомного газа, и потому далее положим $\gamma = 5/3$). Таким образом

$$\Delta_q \approx \frac{u_a}{\omega_{pi}} = \frac{r_D}{\sqrt{\beta}} \gg r_D$$

Конечно, последовательный учет влияния дисперсионных эффектов на структуру ударной волны требует решения соответствующих кинетических уравнений.

Однако это связано с большими математическими трудностями. Поэтому при решении такого рода задач с помощью тех или иных соображений замыкают систему первых моментов кинетического уравнения и исследуют полученные таким образом квазигидродинамические уравнения [1, 5-8].

Воспользуемся для решения задачи уравнениями двухжидкостной гидродинамики [9]. Поскольку, как будет показано, характерные масштабы в задаче значительно больше циклотронных радиусов электронов и ионов, имеются формальные основания для использования уравнений гидродинамики. Область применимости исходных уравнений подробно обсуждается в [3, 4].

Рассмотрим стационарную плоскую ударную волну, распространяющуюся вдоль оси x перпендикулярно магнитному полю, направленному по оси z . В системе координат, движущейся вместе с фронтом ударной волны, поток плазмы втекает в плоскость «разрыва» из $x=-\infty$ (состояние 1) и вытекает на $x=+\infty$ (состояние 2). При этом для плоской стационарной задачи $\partial/\partial t=0$, $\nabla=\{d/dx, 0, 0\}$. Уравнения Максвелла дают

$$(1) \quad \frac{dE_x}{dx} = 4\pi e(n_i - n_e), \quad \frac{dE_y}{dx} = 0$$

$$(2) \quad \frac{dH}{dx} = \frac{4\pi e}{c} (n_e v_y^e - n_i v_y^i), \quad j_x = e(n_i v_x^i - n_e v_x^e) = 0$$

Из (2) и уравнений непрерывности для электронов и ионов следует:

$$(3) \quad n_i v_x^i = n_e v_x^e = C$$

В уравнениях (1)–(3) E – электрическое поле, j – плотность тока, v^i , v^e – скорости, n_i , n_e – концентрации ионов и электронов соответственно.

Уравнения сохранения x - и y -компонент полного импульса и энергии плазмы есть

$$(4) \quad (m_e v_x^e + m_i v_x^i) C + p_e + p_i + \pi_{xx}^e + \pi_{xx}^i + \frac{H^2 - E_x^2}{8\pi} = P$$

$$(5) \quad (m_e v_y^e + m_i v_y^i) C + \pi_{xy}^e + \pi_{xy}^i - \frac{E_x E_y}{8\pi} = Q$$

$$(6) \quad (m_e v^{e^2} + m_i v^{i^2}) C / 2 + \frac{1}{2} (p_e v_x^e + p_i v_x^i) + \pi_{\alpha x}^e v_{\alpha}^e + \pi_{\alpha x}^i v_{\alpha}^i + q_x^e + q_x^i + S_x = G$$

Здесь p_i , p_e , π^i , π^e , q^i , q^e – соответственно давления, тензоры вязки напряжений и потоки тепла ионов и электронов; S – вектор Пойнтинга C , P , Q , G – постоянные, определяемые из граничных условий.

Уравнения (1)–(6) следует дополнить уравнениями движения и теплопроводности для электронов. Обозначая через R силу трения, действующую между компонентами плазмы, а через Q_e – тепло, получаемое электронами при столкновениях с ионами, имеем

$$(7) \quad m_e n_e v_x^e \frac{dv_x^e}{dx} + \frac{dp_e}{dx} + \frac{d\pi_{xx}^e}{dx} + e n_e \left(E_x + \frac{1}{c} v_y^e H \right) = R_x$$

$$(8) \quad m_e n_e v_x^e \frac{dv_y^e}{dx} + \frac{d\pi_{xy}^e}{dx} + e n_e \left(E_y - \frac{1}{c} v_x^e H \right) = R_y$$

$$(9) \quad \frac{3}{2} C \frac{dT_e}{dx} + n_e T_e \frac{dv_x^e}{dx} + \frac{dq_x^e}{dx} + \pi_{\alpha x}^e \frac{dv_{\alpha}^e}{dx} = Q_e$$

Ищется решение уравнений (1)–(9), соответствующее ударной волне, т. е. удовлетворяющее следующим граничным условиям: в состоя-

ниях 1 и 2 имеется стационарный поток равновесной плазмы с

$$n_i = n_e = n_1(n_2), \quad v_x^e = v_x^i = v_1(v_2), \quad v_y^e = v_y^i = 0 \\ T_e = T_i = T_1(T_2), \quad E_x = 0, \quad v_1 H_1 = v_2 H_2$$

Определим звуковое и альфвеновское числа Маха соответственно как $M_1 = v_1/u_{s1}$ и $M_{a1} = v_1/u_{a1}$. Тогда

$$\beta_1 = \frac{8\pi r_1}{H_1^2} = \frac{6M_{a1}^2}{5M_1^2}$$

Обозначим $\delta = (\Omega_i \tau_{i1})^{-1}$; предположим, что ионы сильно замагничены, т. е. $\delta \ll 1$ (здесь $\Omega_i = eH/m_i c$ — циклотронная частота ионов, $\tau_i = 3m_i^{1/2} (kT_i)^{1/2} / 4\sqrt{\pi} e^4 n_i \Lambda$ — время столкновений, Λ — кулоновский логарифм [9]). Вводя $\varepsilon = (m_e/m_i)^{1/2}$, можно получить следующие выражения для циклотронных радиусов и ионов через длину свободного пробега l : $r_e = \varepsilon \delta l$, $r_i = \delta l$.

Исследование уравнений (1)–(9) удобно проводить, перейдя к безразмерным переменным

$$\omega_{i,e} = \frac{v_x^{i,e}}{v_1}, \quad \lambda_{i,e} = \frac{v_y^{i,e}}{v_1}, \quad v_{i,e} = \frac{n_{i,e}}{n_1} \\ \Theta_{i,e} = \frac{T_{i,e}}{T_1}, \quad h = \frac{H}{H_1}, \quad E = \frac{eE_x r_{D1}}{kT_1}, \quad \zeta = \frac{x}{\Delta}$$

Поскольку масштаб Δ , соответствующий эффекту разделения зарядов, заранее неизвестен, задачу можно решать в обратном порядке: записать уравнения, опустив в них все члены, кроме связанных с разделением зарядов, найти соответствующий масштаб, а затем выяснить, при каких условиях он наибольший.

Если принять $M_{a1}^2 \sim 1$, $M_1^2 \gg 1$ (ниже это будет обосновано) и перейти в уравнениях (1)–(9) к безразмерным переменным, то в результате будет получена следующая система уравнений (из которой v_i и v_e сразу исключаются с помощью соотношений $v_i \omega_i = v_e \omega_e = 1$, вытекающих из (3))

$$(10) \quad \frac{1}{\omega_i} - \frac{1}{\omega_e} = \frac{r_{D1}}{\Delta} \frac{dE}{d\zeta}$$

$$(11) \quad \frac{\lambda_e}{\omega_e} - \frac{\lambda_i}{\omega_i} = \frac{\sqrt{10} \delta M_1 l_1}{3M_{a1}^2 \Delta} \frac{dh}{d\zeta}$$

$$(12) \quad \omega_i - 1 + \frac{h^2 - 1}{2M_{a1}^2} - \frac{3}{20M_1^2} E^2 = 0$$

$$(13) \quad \lambda_i = \frac{3r_{D1}}{\sqrt{10} \delta M_1 l_1} E, \quad E = -\frac{\sqrt{10} M_1 r_{D1}}{\delta l_1} \lambda_e h$$

$$(14) \quad \omega_i^2 - 1 + \frac{2(h-1)}{M^2} = 0, \quad h \omega_e = 1$$

В уравнениях (10)–(14) члены с тепловым давлением опущены как малые по $1/M_1^2$ (следствие условия $\beta \ll 1$). Заметим, что для шести переменных ($\omega_i, \lambda_i, \lambda_e, E, h$) имеется семь уравнений, но система не переопределена, так как уравнение сохранения энергии (14) является следствием остальных уравнений.

Из (13) следует:

$$(15) \quad \lambda_i = -0.3 \left(\frac{r_{D1}}{\delta l_1} \right)^2 \lambda_e h = -0.3 \left(\frac{r_{D1}}{r_{i1}} \right)^2 \lambda_e h$$

Ограничиваясь нерелятивистской задачей, т. е. полагая $u_{a1} \ll c$ (c — скорость света), что эквивалентно, как легко видеть, $r_{D1} \ll r_{i1}$, и учитывая, что $h \sim 1$ (см. ниже), из (15) заключаем, что $|\lambda_i| \ll |\lambda_e|$, т. е. вторым членом слева в (11) можно пренебречь. Тогда из (11) и (13) имеем

$$(16) \quad E = -\frac{10M_{a1}^2 r_{D1}}{3M_{a1}^2 \Delta} \frac{dh}{d\zeta}$$

Подставляя E из (16) в (10) и (12), получим

$$(17) \quad \frac{1}{\omega_i} - h = -\frac{10}{3} \left(\frac{M_i r_{D1}}{M_{a1} \Delta} \right)^2 \frac{d^2 h}{d\zeta^2}$$

$$(18) \quad \omega_i - 1 + \frac{h^2 - 1}{2M_{a1}^2} - \frac{5}{3M_{a1}^2} \left(\frac{M_i r_{D1}}{M_{a1} \Delta} \right)^2 \left(\frac{dh}{d\zeta} \right)^2 = 0$$

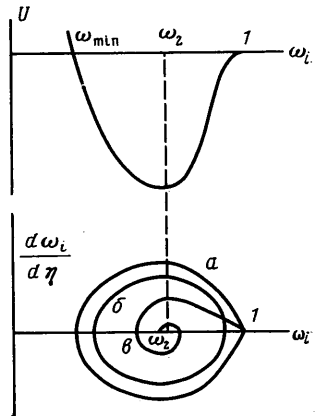
откуда видно, что масштаб, отвечающий разделению зарядов

$$\Delta = \Delta_q = M_i r_{D1} / M_{a1} \approx r_{D1} / \sqrt{\beta}$$

Основные процессы, определяющие структуру фронта в замагниченной плазме ($\delta \ll 1$) — это ионная вязкость и дисперсия, связанная с инерцией электронов [3]. Соответственно масштабы, характерные для этих процессов, есть $\Delta_v = l/M$ и $\Delta_d = \epsilon \delta M l / M_a$.

Чтобы эффект отклонения от квазинейтральности был определяющим для структуры ударной волны, необходимо выполнение неравенств $\Delta_q \gg \Delta_v$, $\Delta_q \gg \Delta_d$. Учитывая условие $M_{a1} \sim 1$, получим из первого неравенства требование $r_{D1} \gg l_i / M_i^2$, а из второго $r_{D1} \gg r_{e1}$ (последнее можно записать и в другом виде: $H_i^2 \gg 4\pi n_i m_e c^2$). Комбинируя эти два неравенства с упомянутым выше нерелятивистским ограничением, получим

$$(19) \quad \max \{ l_i M_i^{-2}, r_{e1} \} \ll r_{D1} \ll r_{i1}$$



Из неравенства (19) следует, что эффект разделения зарядов может доминировать при формировании фронта ударной волны в разреженной плазме в сильных магнитных полях, например при $n = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $H = 5 \cdot 10^3 \text{ э}$, $T = 1 \text{ эв}$. При этом величина Δ_q больше циклотронных радиусов ионов и электронов и одного порядка с длиной свободного пробега.

Исключая h из (17) и (18) с помощью уравнения (14) и переходя к лагранжевой координате η заменой $d/d\eta = \omega_i d/d\zeta$, получим

$$(20) \quad \frac{d^2 \omega_i}{d\eta^2} = \frac{3}{20} (\omega_i - 1) \left[\omega_i (\omega_i + 1) - \frac{2}{M_{a1}^2} \right]$$

$$(21) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_i}{d\eta} \right)^2 + \frac{3}{80} (\omega_i - 1)^2 \left[\frac{4}{M_{a1}^2} - (\omega_i + 1)^2 \right] = \\ \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_i}{d\eta} \right)^2 + U(\omega_i) = 0$$

Уравнения (20) и (21) имеют естественную механическую аналогию. Это есть уравнение движения и интеграл энергии точки единичной массы,

движущейся в поле потенциала $U(\omega_i)$, причем ω_i играет роль координаты, а η — времени (см. фигуру).

В поле $U(\omega_i)$ имеются две точки равновесия

$$\omega_i = 1, \quad \omega_i = \omega_2 = \frac{\sqrt{8 + M_{a1}^2} - M_{a1}}{2M_{a1}}$$

Наименьшее значение ω_i есть $\omega_{\min} = 2/M_{a1} - 1$.

Из условия $\omega_{\min} > 0$ следуют неравенства:

$$(22) \quad M_{a1} < 2, \quad h_{\max} < 3$$

Полное совпадение ограничений (22) с теми, которые имеют место в случае, когда структура ударной волны определяется инерцией электронов [1-3], конечно, не случайно. Эти ограничения являются следствиями уравнений сохранения импульса и энергии и не зависят от причины дисперсии, подобно тому как условия Гюгонио не зависят от механизма диссипаций.

Чтобы сделать более ясным физический смысл неравенств (22), введем электрический потенциал согласно формуле $E_x = -d\phi/dx$. В безразмерной форме $\Phi = e\phi/kT_1$.

Из уравнения (16) с учетом граничных условий $\Phi(-\infty) = 0$ и $h(-\infty) = 1$ получаем

$$(23) \quad \Phi = \frac{10M_1^2}{3M_{a1}^2}(h-1) = \frac{4}{\beta_1}(h-1)$$

Подставляя h из (23) в (22) и возвращаясь к размерным переменным, имеем $e\phi_{\max} < \frac{1}{2}m_i v_1^2$. Нарушение этого неравенства означало бы, что ионы в набегающем потоке не могут перевалить через потенциальный барьер высотой $e\phi_{\max}$ и, отражаясь от него, приводят к многопоточковому движению и раскочке пучковых неустойчивостей.

Уравнение (21) легко интегрируется. Для граничного условия $\omega_i(-\infty) = 1$ его решение есть солитон

$$\omega_i = 1 - \frac{2(M_{a1}^2 - 1)}{M_{a1} \{M_{a1} + \text{ch}[\eta \sqrt{0.3(1 - M_{a1}^{-2})}]\}}$$

Затухание такого рода солитона, приводящее к образованию ударной волны с осцилляторной структурой, рассмотрим здесь лишь с точки зрения гидродинамики (хотя, разумеется, полное исследование должно включать и бесстолкновительные эффекты: отражение тепловых ионов от потенциального горба, имеющее место и для докритических значений M_{a1} , возбуждение различных неустойчивостей и т. п.). Это означает, что в качестве основного диссипативного механизма следует выбрать вязкость. Поскольку джоулевы потери имеют меньший характерный масштаб, чем дисперсия от электронной инерции [3], их учет следует рассматривать лишь на фоне одновременного действия обоих дисперсионных механизмов, что не входит в задачу настоящей работы.

Учет вязкости в следующем приближении приводит вместо (20) к уравнению, имеющему вид уравнения колебаний с трением

$$(24) \quad \frac{d^2 \omega_i}{d\eta^2} + \mu \left(\frac{3}{10} \Theta_i^{1/2} \frac{d\omega_i}{d\eta} - \frac{d}{d\eta} \frac{1}{\omega_i} \frac{d}{d\eta} \Theta_i^{1/2} \frac{d\omega_i}{d\eta} \right) - \frac{3}{20} (\omega_i - 1) \left[\omega_i (\omega_i + 1) - \frac{2}{M_{a1}^2} \right] = 0$$

$$\mu = \frac{0.32}{\sqrt{10}} \Delta_{v1}/\Delta_q \approx \frac{0.32}{\sqrt{10}} l_1/M_1^2 r_{D1} \ll 1$$

Уравнение (24) необходимо решать совместно с уравнением теплопроводности для ионов. Качественный характер решения ясен из рассмотрения движения с трением в потенциальной яме на фигуре: это ударная волна с колебаниями, затухающими за фронтом. Вблизи точки 2, определяемой условиями Гюгонио для заданных чисел Маха M_1 и M_{a1} [4], по-прежнему может иметь место неравенство (19) (с заменой индекса 1 на 2), и тогда решение здесь будет иметь вид затухающих гармонических колебаний $\omega_i \propto \exp(i\Omega_0 \eta - \gamma \eta)$, $\Omega_0 = 0.3(1 + M_{a2}^{-2})$, $\gamma = 3\mu/20M_{a2}^2 \ll 1$. Если же (19) нарушается, это означает, что вязкость, увеличиваясь с ростом температуры ионов как $T_i^{1/2}$, преобладает над дисперсией и все переменные, совершив конечное число колебаний, монотонно приближаются к своим граничным значениям.

На фигуре представлены вид функции $U(\omega_i)$ и фазовые кривые, отвечающие солитону (а), периодическому решению (б), затухающим осцилляциям (в).

Авторы благодарят Л. П. Питаевского за полезные обсуждения.

Поступила 21 VI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. Вопросы теории плазмы, т. 4. М., Атомиздат, 1964.
2. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
3. Великович А. Л., Либерман М. А. Структура поперечной ударной волны в плазме. ЖЭТФ, 1976, т. 71, стр. 1390.
4. Великович А. Л., Либерман М. А. Структура фронта поперечной ударной волны в замагниченной плазме. Физика плазмы, 1976, т. 2, стр. 334.
5. Coffey T. P. Transverse resistive shock waves. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, p. 1249.
6. Hu P. N. Structure of a perpendicular shock wave in a plasma. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, p. 89.
7. Grad H., Hu P. N. Unified shock profiles in plasma. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, p. 2597.
8. Hu P. N., Grad H. Charge separation effects on the profile of a perpendicular shock wave. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, p. 402.
9. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме. Вопросы теории плазмы, т. 1. М., Атомиздат, 1963.