

## О ЗАКОНЕ ПОДОБИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ОТРАЖЕНИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЖЕСТКОЙ СТЕНКИ

В. Н. ЛЯХОВ, О. С. РЫЖОВ

(Москва)

Формулируется закон подобия, который следует из уравнений коротких волн, описывающих движение газа при отражении ударного фронта малой амплитуды от жесткого клина. Чтобы выяснить, каковы границы применимости этого закона, приводятся результаты численного анализа маховского отражения ударных волн умеренной интенсивности. В расчетах полагались постоянными угол раствора клина и критический угол падения волн, а изменение отношения удельных теплоемкостей сопровождалось варьированием относительного избыточного давления в набегающем потоке. При таком подходе данные, полученные для одного газа, можно использовать для моделирования явлений в другом.

1. Рассмотрим плоский ударный фронт  $S_1$  с равномерным потоком, который простирается за ним до бесконечности. Будем считать газ впереди ударной волны покоящимся и припишем его параметрам нулевой индекс. Зададим скорость  $N_1$  перемещения фронта и определим тем самым параметры равномерного потока за ним.

Пусть в начальный момент времени  $t=0$  ударная волна встречает на своем пути клин. Картина отражения, которая возникает при  $t>0$ , будет существенно зависеть от угла  $\alpha$  полураствора клина и скорости перемещения фронта. Для определенности выберем параметры  $\alpha$  и  $N_1$  таким образом, чтобы отражение носило маховский характер. Если ориентировать нормаль к фронту  $S_1$  падающей волны вдоль оси  $x$  декартовой системы координат  $x, y$  и совместить эту ось с осью симметрии клина, то качественно схему отражения будет представлять фиг. 1. Ввиду симметрии течения относительно оси  $x$  в дальнейшем достаточно рассматривать только верхнюю полуплоскость  $x, y$ .

Положим газ идеальным, т. е. лишенным вязкости и теплопроводности. Что касается уравнения состояния, то оно может быть задано произвольным образом. Пусть буквами  $\rho, s$  и  $p$  обозначены плотность, удельная энтропия и давление соответственно, тогда

$$(1.1) \quad p=f(\rho, s)$$

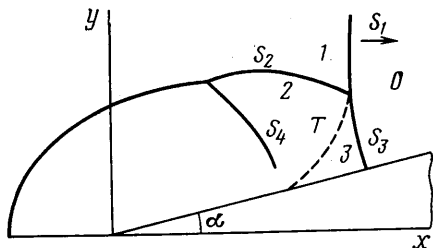
Как легко заключить из  $\pi$ -теоремы теории подобия и размерности [1], при любом уравнении состояния среды движение газа должно быть автомодельным, в котором декартовы составляющие  $v_x$  и  $v_y$  вектора скорости частиц и все термодинамические функции зависят только от отношений  $x_1=x/t$  и  $y_1=y/t$ . Поскольку интенсивность отраженной  $S_2$  и маховской  $S_3$  ударных волн переменна, течение внутри возмущенной области является неизэнтропическим и вихревым. Система уравнений Эйлера в переменных  $x_1, y_1$  может быть записана в виде

$$(v_x-x_1) \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + (v_y-y_1) \frac{\partial \rho}{\partial y_1} + \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial x_1} + \frac{\partial v_y}{\partial y_1} \right) = 0$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} (v_x - x_1) \frac{\partial v_x}{\partial x_1} + (v_y - y_1) \frac{\partial v_x}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} &= 0 \\ (v_x - x_1) \frac{\partial v_y}{\partial x_1} + (v_y - y_1) \frac{\partial v_y}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y_1} &= 0 \\ (v_x - x_1) \frac{\partial s}{\partial x_1} + (v_y - y_1) \frac{\partial s}{\partial y_1} &= 0 \end{aligned}$$

Чтобы замкнуть эту систему, к ней нужно присоединить конечное соотношение (1.1).

2. Предположим теперь, что скорость падающей ударной волны близка по величине к скорости  $a_0$  распространения звука в покоящемся газе. Тогда изменения всех избыточных величин как на падающем фронте, так и на отраженном и маховском фронтах будут малы по сравнению с теми же величинами в состоянии равновесия. Поскольку приращение энтропии при ударном сжатии газа пропорционально кубу изменения любого термодинамического параметра, им можно в первом приближении пренебречь. Последнее уравнение в системе (1.2) будет выполняться тог-



Фиг. 1

да тождественно, а в остальных уравнениях этой системы вместо плотности и давления введем в качестве искомой термодинамической функции скорость звука  $a$  посредством формул

$$dp = \frac{\rho}{a} \frac{1}{m-1} da, \quad dp = \rho a \frac{1}{m-1} da, \quad m = \frac{1}{2\rho^3 a^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right)_{,s}, \quad V = \frac{1}{\rho}$$

Маховское отражение ударных волн принадлежит к числу существенно нелинейных явлений. Наибольший интерес представляет изучение течения в области, прилегающей к отраженному фронту и маховской «ножке», где имеет место наибольшее повышение давления. Асимптотический анализ течения базируется на идее коротких волн, развитой в работе [2]. Согласно этой идее рассматриваемая область представляет собой своеобразный пограничный слой, в котором все относительные избыточные параметры газа хотя и малы, но изменяются весьма резко при переходе от точки к точке. Изменение возмущенных величин носит неоднородный характер, поскольку продольные размеры области значительно меньше поперечных. Обозначив через  $\varepsilon$  малый числовой параметр, перейдем к новым независимым переменным

$$(2.1) \quad x_1 = a_0(1 + \varepsilon \xi), \quad y_1 = \varepsilon^{1/2} a_0 \eta$$

Поскольку автономным координатам  $x_1$  и  $y_1$  принадлежит неравноправная роль, продольная и поперечная составляющие вектора скорости должны иметь существенно различный порядок. Что касается скорости звука, то она изменяется на величину порядка продольной составляющей скорости [2]. Отсюда

$$(2.2) \quad v_x = \varepsilon \frac{a_0}{m_0} v_x', \quad v_y = \varepsilon^{3/2} \frac{a_0}{m_0} v_y', \quad a = a_0 \left( 1 + \varepsilon \frac{m_0 - 1}{m_0} a' \right)$$

Подставим формулы (2.1) и (2.2) в систему уравнений (1.2) с  $s = \text{const}$  и выраженными через скорость звука плотностью и давлением. В полу-

ченных таким образом соотношениях сохраним только главные члены и опустим все члены более высокого порядка малости.

Из первых двух уравнений системы (1.2) находим в первом приближении  $a' = v_x'$ . Это соотношение справедливо для волны Римана малой амплитуды, которая распространяется вдоль оси  $x$ . Третье уравнение из системы (1.2) приводит к условию отсутствия вихрей

$$(2.3) \quad \frac{\partial v_x'}{\partial \eta} = \frac{\partial v_y'}{\partial \xi}$$

записанному в автомодельных координатах.

Чтобы получить недостающее соотношение, связывающее между собой функции  $v_x'$  и  $v_y'$ , нужно указать такую линейную комбинацию первых двух уравнений системы (1.2), в которой отсутствовали бы главные члены, связанные с переносом массы вещества. Выразив плотность и давление в названных уравнениях через скорость звука, имеем для изэнтропических течений

$$(a + v_x - x_1) \left( \frac{\partial v_x}{\partial x_1} + \frac{1}{m-1} \frac{\partial a}{\partial x_1} \right) + \\ + (v_y - y_1) \left( \frac{\partial v_x}{\partial y_1} + \frac{1}{m-1} \frac{\partial a}{\partial y_1} \right) + a \frac{\partial v_y}{\partial y_1} = 0$$

В результате подстановки сюда формул (2.1) и (2.2) находим требуемое соотношение

$$(2.4) \quad (v_x' - \xi) \frac{\partial v_x'}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial v_x'}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y'}{\partial \eta} = 0$$

Уравнения (2.3) и (2.4) образуют замкнутую систему, коэффициенты которой не зависят от параметра  $m_0$ , учитывающего в рассматриваемом приближении термодинамические свойства среды. Для совершенного газа, подчиняющегося уравнению состояния Клапейрона, подобная система коротких волн была впервые выведена в работе [2].

3. Упростим краевые условия задачи. В рассматриваемом приближении клин можно считать тонким, поэтому  $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$ . Требование обращения в нуль нормальной составляющей вектора скорости на обтекаемом теле дает

$$v_y' = \varepsilon^{-1/2} \alpha v_x' \quad (\eta = \varepsilon^{-1/2} \alpha)$$

Отсюда видно, что за введенный выше формально малый параметр  $\varepsilon$  удобно принять квадрат угла полураствора клина:  $\varepsilon = \alpha^2$ . Теперь граничное условие на нем приобретает стандартный вид

$$(3.1) \quad v_y' = v_x' \quad (\eta = 1)$$

Обратимся к условиям Ренкина — Гюгоньо на фронтах ударных волн, которые должны привести к двум независимым соотношениям, связывающим между собой функции  $v_x'$  и  $v_y'$ . Обозначим через  $\gamma$  угол между нормалью к фронту произвольной ударной волны и осью  $x$ , через  $v_t$  тангенциальную составляющую вектора скорости и припишем индексы  $a$  и  $b$  параметрам газа впереди и позади разрыва. В рассматриваемой области фронты всех ударных волн мало отличаются по направлению от нормали к поверхности клина, поэтому угол  $\gamma$  мал. Требование непрерывности касательной составляющей вектора скорости при переходе через ударную волну гласит

$$(3.2) \quad v_{yb} - v_{ya} = -\gamma (v_{xb} - v_{xa})$$

Пусть уравнение ударного фронта взято в форме  $x=x_s(y)$ . Тогда

$$\gamma = \left( \frac{\partial x_s}{\partial y} \right)_t = \varepsilon^{1/2} \frac{d\xi_s}{d\eta}$$

Внося эту величину в формулу (3.2), находим

$$(3.3) \quad v_{xb}' \frac{d\xi_s}{d\eta} + v_{yb}' = v_{xa}' \frac{d\xi_s}{d\eta} + v_{ya}'$$

Второе условие на ударной волне выведем при помощи соотношения

$$N = a_a + v_{na} + \frac{1}{2} \frac{m_a}{\rho_a a_a} (p_b - p_a)$$

справедливого в предположении, что  $(p_b - p_a)/p_a \ll 1$ . В этом соотношении  $v_n$  означает нормальную составляющую вектора скорости. В рассматриваемом приближении  $v_n$  можно заменить на  $v_x$ , откуда

$$p = p_0 \left( 1 + \varepsilon \frac{\rho_0 a_0^2}{\rho_0 m_0} v_x' \right)$$

С учетом последнего равенства формула для скорости ударной волны приобретает вид

$$(3.4) \quad N = a_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon (v_{xb}' + v_{xa}') \right]$$

С другой стороны

$$\frac{N}{\cos \gamma} = \left( \frac{\partial x_s}{\partial t} \right)_y = x_{1s} - y_{1s} \frac{dx_{1s}}{dy_1}$$

Внося сюда выражения (2.1) для автомодельных координат  $x_1$  и  $y_1$ , имеем

$$(3.5) \quad N = a_0 \left\{ 1 + \varepsilon \left[ \xi_s - \eta \frac{d\xi_s}{d\eta} - \frac{1}{2} \left( \frac{d\xi_s}{d\eta} \right)^2 \right] \right\}$$

Сравнение формул (3.4) и (3.5) дает искомое соотношение

$$(3.6) \quad v_{xb}' + v_{xa}' = 2 \left[ \xi_s - \eta \frac{d\xi_s}{d\eta} - \frac{1}{2} \left( \frac{d\xi_s}{d\eta} \right)^2 \right]$$

4. В выбранной системе координат величины  $\gamma_1$  и  $v_{y1}'$ , задающие угол наклона падающей ударной волны и поперечную составляющую вектора скорости набегающего потока, равны нулю. Уравнение (3.3) удовлетворяется тождественно. Уравнение (3.6) позволяет определить координату  $\xi_{s1}$  пересечения падающего фронта с осью  $x$ , именно  $\xi_{s1} = 1/2 v_{x1}'$ .

Существенно, что граничное условие (3.1) на жесткой поверхности и условия (3.3) и (3.6) в применении к маховской ударной волне не зависят от величин  $v_{x1} = v_1$ ,  $\alpha$  и  $m_0$ , которые задают амплитуду падающего фронта, угол полураствора клина и термодинамические свойства среды. Единственный параметр  $v_{x1}'$ , который фигурирует в условиях (3.3) и (3.6), записанных для фронта отраженной ударной волны, представляет собой комбинация названных величин:

$$(4.1) \quad v_{x1}' = K = \frac{m_0 v_1}{\alpha^2 a_0}$$

Он является параметром подобия в рассматриваемой задаче. Выражение для параметра подобия удобно преобразовать, используя понятие критического угла падения. Рассмотрим для этой цели регулярное отражение, в котором падающий  $S_1$  и отраженный  $S_2$  фронты пересекаются на поверхности клина, а маховская «ножка»  $S_3$  отсутствует. Огнем индексом 2 состояние газа за отраженной ударной волной. Возвращаясь в формулах (3.3) и (3.6) к исходным размерным переменным, имеем

$$\gamma_2(v_{x_2} - v_{x_1}) + \alpha v_{x_2} = 0, \quad \gamma_2^2 + 2\alpha\gamma_2 + \frac{m_0}{a_0} v_{x_2} = 0$$

Отбрасывая тривиальное решение  $\gamma_2 = v_{x_2} = 0$ , получим квадратное уравнение для угла отражения

$$\gamma_2^2 + 3\alpha\gamma_2 + 2\alpha^2 + \frac{m_0}{a_0} v_{x_1} = 0$$

Поскольку действительные решения существуют только при  $\alpha^2 \geq 4m_0 v_{x_1}/a_0$ , то угол падения

$$(4.2) \quad \alpha_* = 2 \sqrt{\frac{m_0}{a_0} v_{x_1}}$$

является критическим (при котором прекращает существовать регулярное отражение). При  $\alpha < \alpha_*$  отражение становится маховским. Для совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей  $\kappa$  последней формуле удобно придать вид [2]

$$(4.3) \quad \alpha_* = 2 \sqrt{\frac{\kappa+1}{2\kappa} \frac{p_1 - p_0}{p_0}}$$

Объединяя равенства (4.1) и (4.2), имеем

$$(4.4) \quad K = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha_*}{\alpha} \right)^2$$

Закон подобия при отражении слабой ударной волны от жесткой стенки можно сформулировать теперь следующим образом: при произвольном уравнении состояния среды безразмерные параметры течений в возмущенной области у клиньев будут одинаковы, если выбрать равными отношения угла их полураствора к критическому углу падения волн. Этот закон в равной мере справедлив как для регулярного, так и для маховского режимов отражения. Его можно применять и при изучении дифракционной картины, когда падающая ударная волна встречает на своем пути тупой угол; в этом случае  $\alpha < 0$ , а на жесткой поверхности вместо граничного условия (3.1) необходимо удовлетворить требованию  $v_y' = -v_x'$  ( $\eta = -1$ ).

5. Фактически первая проверка закона подобия была осуществлена в работе [3], хотя он и не был там явно сформулирован. Использовались экспериментальные данные [4] для максимального избыточного давления за отраженным ударным фронтом при регулярном отражении и в основании маховской «ножки» при нерегулярном. Значительно более полные экспериментальные данные содержатся в работах [5, 6], где угол полураствора клиньев варьировался в пределах  $\alpha = 6 \div 50^\circ$ , а относительное давление на фронте падающих ударных волн лежало в диапазоне  $p_1/p_0 = 1.01 \div 1.56$ . Обработка полученных интерферограмм показала, что параметр подобия в форме (4.4) с большой точностью определяет весь процесс отражения волн, если значение критического угла  $\alpha_*$  находить из опытов (в экспериментах этот угол получается [6, 7] на  $1 \div 2^\circ$  больше того, который предсказывает теория регулярного отражения).

В последние годы для изучения нерегулярного отражения стали широко использоваться электронные вычислительные машины, которые позволяют проводить своеобразные численные опыты. Их результаты содержатся в работе [8] для регулярного и маховского режимов отражения достаточно сильных ударных волн с  $p_1/p_0=1.5\div 2.9$  от сравнительно толстых клиньев, у которых  $\alpha=10\div 55^\circ$ ; расчеты проводились для совершенного газа при  $\kappa=1.4$ . Качественно эти результаты подтверждают выводы асимптотического анализа, основанного на идее коротких волн.

Другого рода математический эксперимент был проделан в работе [9] для ударных волн с постоянным числом Маха  $M_1=N_1/a_0=3$ , встречающих на своем пути фиксированный клин, у которого  $\alpha=40^\circ$ . Оказалось, что характер изменения эпюр давления и плотности на поверхности клина при увеличении  $\kappa$  от 1.2 до 3 такой же, какой наблюдается при уменьшении  $p_1/p_0$  или увеличении  $\alpha$ . Как легко видеть из формул (4.3) и (4.4), это заключение является прямым следствием сформулированного выше закона подобия, хотя в рассматриваемом случае интенсивность падающих ударных волн отнюдь не мала.

Было отмечено [9], что влияние показателя адиабаты проявляется не только в количественных, но и в качественных изменениях всего поля течения. Например, при малых значениях  $\kappa$  на фронте отраженной ударной волны  $S_2$  образуется излом, от которого внутрь возмущенной области отходит еще одна ударная волна, обозначенная на фиг. 1 через  $S_4$ . Этот режим характеризуется, кроме того, наличием мощного вихря, скручивающего контактный разрыв  $T$  и деформирующего маховскую «ножку». Только при  $\kappa > 2$  общая картина отражения близка к той, которая присуща слабым ударным волнам. Отраженный фронт получается гладким, а контактный разрыв стелется вдоль поверхности клина по направлению к его острию. Таким образом, даже явления, имеющие место при отражении лишь достаточно сильных ударных волн, соответствуют обсуждаемому закону подобия. В связи с этим изучение влияния термодинамических свойств среды на картину отражения имеет практический смысл, поскольку позволяет понять, до какого предела можно использовать данные, полученные при отражении волн в одном газе, для моделирования аналогичных процессов в другом.

6. Для количественной проверки закона подобия была проведена серия расчетов маховского отражения ударных волн от клина при постоянном значении  $\alpha/\alpha_*=0.933$ . Углы выбирались следующими:  $\alpha=28^\circ$ ,  $\alpha_*=30^\circ$ , а показатель адиабаты варьировался в диапазоне  $\kappa=1.2\div 3$ . Значения отношения  $p_1/p_0$  и числа Маха  $M_1$  падающей волны приведены ниже

$\kappa$	$p_1/p_0$	$M_1$
1.2	1.1154	1.0516
1.4	1.1205	1.0504
1.67	1.1260	1.0492
2	1.1313	1.0481
3	1.1410	1.0459

Поскольку интенсивности ударных волн относятся к умеренным, критический угол  $\alpha_*$  с учетом рекомендаций работ [5, 9] вычислялся по точным формулам теории регулярного отражения [10]. Для численного интегрирования уравнений газовой динамики применялся метод сквозного счета [8, 9].

Как видно из приведенных данных, число Маха падающего фронта изменяется чрезвычайно мало. Этому факту можно дать простое объяснение. Поскольку для слабых ударных волн  $p_b - p_a = \rho_a a_a (v_b - v_a)$ , то с учетом равенства (4.2) для критического угла  $\alpha_*$  имеем

$$N_1 = a_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{m_0}{a_0} v_1 \right) = a_0 \left( 1 + \frac{1}{8} \alpha_*^2 \right)$$

Отсюда следует, что при  $\alpha_* = \text{const}$  число Маха  $M_1 = \text{const}$ . Для ударных волн умеренной интенсивности этот параметр на самом деле варьируется в чрезвычайно узких пределах.

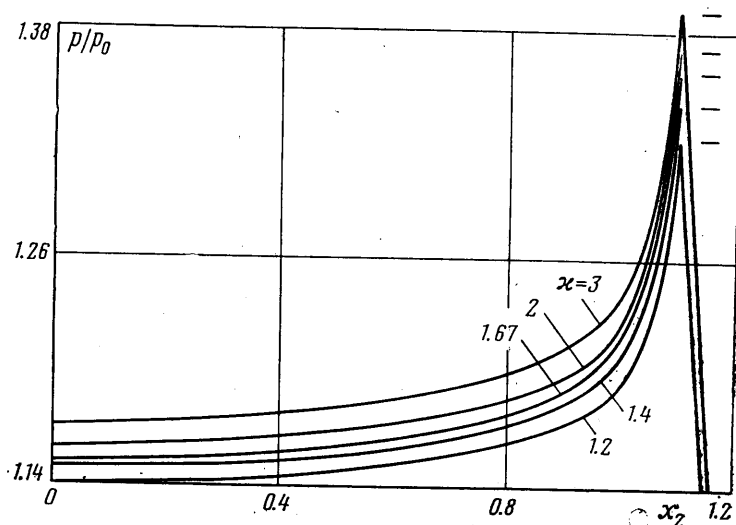
На фиг. 2 представлены кривые распределения относительного давления  $p/p_0$  на поверхности клина в зависимости от безразмерной длины  $x_2 = x_1/N_1 \cos \alpha$  его щеки. Вершина клина находится в точке  $x_2 = 0$ , фронтам маховских волн соответствует координата  $x_2 \approx 1.15$  середин отрезков с большими градиентами газодинамических параметров, продолжение

кривых вниз до  $p/p_0=1$  обрезано. Величины максимального давления  $p_m/p_0$  отмечены в правом верхнем углу горизонтальными отрезками.

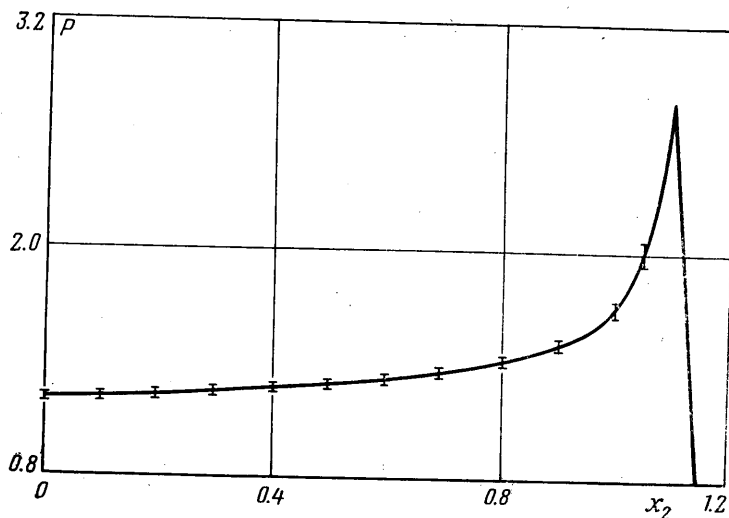
Используя равенство (4.2) для критического угла  $\alpha_*$ , выражение для избыточного давления в приближении коротких волн можно записать как

$$(6.1) \quad \frac{p-p_0}{p_1-p_0} = 4 \left( \frac{\alpha}{\alpha_*} \right)^2 v_x'$$

В условиях проводимого численного эксперимента, в котором углы  $\alpha$  и  $\alpha_*$  сохраняются постоянными, стоящая справа в формуле (6.1) функ-



Фиг. 2



Фиг. 3

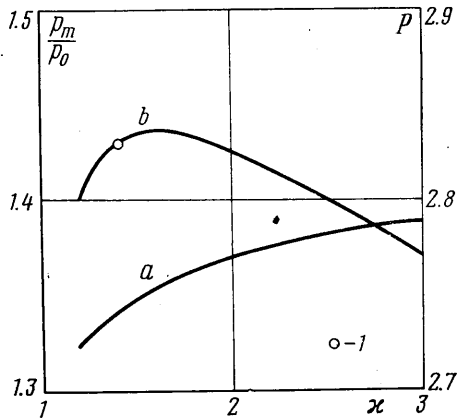
ция  $v_x'$  должна быть универсальной для всех рассчитываемых случаев. Действительно, если полученные данные перестроить в соответствии с законом подобия, то пять кривых (фиг. 2) дадут одну и ту же зависимость относительного избыточного давления  $P = (p-p_0)/(p_1-p_0)$  от безразмерной длины  $x_2$ , отсчитываемой вдоль щеки клина. Эта зависимость изобра-

жена на фиг. 3, максимальные отклонения от нее, указанные вертикальными отрезками, в расчетах не превышали 6%.

Фиг. 4 иллюстрирует влияние показателя адиабаты  $\kappa$  на вычисленные значения отношений  $p_m/p_0$  и  $P=(p_m-p_0)/(p_1-p_0)$ . Первое из них задается кривой *a*, второму соответствует кривая *b*; шкалы для ординат указаны слева и справа, символ *I* соответствует экспериментальной величине [°]. В соответствии с законом подобия отношение  $P=(p_m-p_0)/(p_1-p_0)$  не должно изменяться во всем диапазоне  $\kappa=1.2\div 3$ . Как видно из фиг. 4, максимальный разброс в найденных значениях этого отношения не превышает 4%.

Следует заметить, что в проведенных расчетах не ставилась цель изучить особо параметры течения вблизи волны Маха; это потребовало бы специального выделения ее фронта и сгущения сетки в окрестности последнего. Можно ожидать, что если принять упомянутые меры, то максимальное давление  $p_m$  на фронте волны Маха окажется несколько выше полученного.

Поступила 14 IX 1976



Фиг. 4

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
2. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
3. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
4. White D. R. An experimental survey of the Mach reflection of shock waves. Proc. Sec. Midwest. Conf. Fluid Mech., 1952. Ohio State Univ. Engng. Experiment Station. Bull., 1952, No. 149.
5. Заславский Б. И., Сафаров Р. А. О подобии течений, возникающих при отражении слабых ударных волн от жесткой стенки и свободной поверхности. Физика горения и взрыва, 1973, т. 9, № 4.
6. Заславский Б. И., Сафаров Р. А. О маховском отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПМТФ, 1973, № 5.
7. Bleakney W., Taub A. H. Interaction of shock waves. Rev. Mod. Phys., 1949, vol. 21, No. 4.
8. Липницкий Ю. М., Ляхов В. Н. Численное решение задачи дифракции ударной волны на клине. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 6.
9. Ляхов В. Н. Математическое моделирование маховского отражения ударных волн в средах с различными показателями адиабаты. Изв. АН СССР, МЖГ, 1976, № 5.
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Изд-во иностр. лит., 1950.