

О НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ПЛОСКОМ СЛЕДЕ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, А. Н. СУХОРОКОВ, В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Задача о возникновении и развитии колебаний в следе — одна из классических задач теории гидродинамической устойчивости [1-4]. В данной работе задача решается методом разложения решения в ряд Фурье по одной из пространственных переменных [5] и с одновременным применением обобщенного метода Рэлея [6, 7]. Исследование сводится к изучению системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведенные численные эксперименты показали, что рассматриваемая модель течения (в рамках идеальной жидкости) и методы ее исследования позволяют правильно описать некоторые основные особенности нелинейного развития колебаний и возникновения турбулентности в плоском следе.

1. Неустойчивость течения рассматривается без учета сжимаемости и вязкости среды и сводится к решению уравнений Эйлера

$$(1.1) \quad \psi_{yt} + \psi_y \psi_{yx} - \psi_x \psi_{yy} = -p_x, \quad -\psi_{xt} - \psi_y \psi_{xx} + \psi_x \psi_{xy} = -p_x$$

Здесь ψ — функция тока; p — давление.

Предполагается, что основное стационарное течение $\psi = \varphi_0$, $p = p_0$, устойчивость которого исследуется, не зависит от продольной координаты x ($\varphi_0 = \varphi_0(0)$, $p_0 = p_0(y)$), а возмущения являются периодическими по x . Тогда при $t=0$ функцию тока можно представить в виде суммы основной составляющей φ_0 и суперпозиции элементарных волн

$$(1.2) \quad \psi(x, y, 0) = \varphi_0(y) + \varepsilon \operatorname{Re} [\varphi(y) \exp(i\alpha x)]$$

Здесь α — волновое число, ε характеризует амплитуду начальных возмущений, $\varphi(y)$ задается в соответствии с линейной теорией [6, 7], $\varphi_0'(y) \equiv U_0(y)$.

Рассмотрим развитие во времени возмущений, удовлетворяющих уравнениям (1.1), начальным условиям (1.2) и условиям ограниченности на бесконечности

$$(1.3) \quad \psi(x, y, t) \rightarrow \varphi_0(y), \quad y \rightarrow \pm\infty$$

Такая постановка несколько отличается от условий, выполнявшихся в экспериментах [8, 9]. В этих экспериментах возмущения были периодическими по времени и развивались по x . Хотя вопрос о соответствии временного и пространственного роста возмущений решен только при малых амплитудах возмущений вблизи нейтральной кривой [10], можно провести определенную аналогию между ними и в данном случае. Будем считать, что амплитуда пространственно нарастающего на длине L возмущения соответствует амплитуде возмущения, нарастающего в течение времени $T = L/c_r$, где c_r — фазовая скорость возмущения; экспериментальной частоте ω будем ставить в соответствие волновое число $\alpha = \omega/c_r$; при этом нелинейные искажения c_r оказываются небольшими и при сопоставлении с экспериментом не учитываются.

Для решения поставленной задачи (1.1)–(1.3) применим метод Рэлея [6, 7].

Коротко опишем алгоритм метода Рэлея в линейном случае.

Задача устойчивости плоскопараллельного потока идеальной жидкости сводится к задаче о собственных значениях для системы уравнений

$$(1.4) \quad -c\varphi'(y) + \varphi'(y) - \varphi U = -p, \quad \alpha^2 c\varphi + \alpha^2 U\varphi = -p_y$$

с однородными граничными условиями вида $\varphi(\infty) = \infty$ ($-\varphi) = 0$.

Здесь все параметры определяются тем, что функция тока для возмущения ищется в виде $\psi = \varphi(y) \exp[i\alpha(x-ct)]$, $c = c_r + ic_i$. Метод Рэлея состоит в том, что профиль скорости основного течения $U(y)$ заменяют кусочно-линейным

$$U_n = U(y_k) + (y - y_k) [U(y_{k+1}) - U(y_k)] / (y_{k+1} - y_k)$$

$$y_k \leq y \leq y_{k+1}, \quad y_k = dk/n - d \quad (k=0, 1, \dots, 2n).$$

$$U_n = U(y_1) \quad \text{при } y < y_0, \quad U_n = U(y_{2n}) \quad \text{при } y > y_{2n}$$

Это позволяет выписать аналитическое решение системы уравнений (1.4)

$$\varphi_n = a_0 \exp(-\alpha y) + \sum_{m=1}^k a_m \operatorname{sh} \alpha(y - y_m) \quad \text{при } y_k \leq y \leq y_{k+1}$$

Выражение для давления дается первым уравнением системы (1.4). Нетрудно убедиться, что второе уравнение системы (1.4) при этом тождественно удовлетворяется. Постоянные a_k выбираются так, чтобы выполнялись граничные условия и условия непрерывности давления при $y = y_k$ ($k=0, 1, \dots, 2n$)

$$\begin{aligned} \alpha^2 (U_n - c) a_{k+1} &= \\ &= \left\{ a_0 \exp(-\alpha y) + \sum_{m=1}^{k-1} a_m \operatorname{sh} \alpha(y_k - y_m) \right\} [U_n'(y_k + 0) - U_n'(y_k - 0)] \end{aligned}$$

В линейном случае сходимость метода Рэлея и некоторых его модификаций доказана в [7].

Нелинейные члены в уравнениях Эйлера содержат член, включающий в себя вторую производную по поперечной координате ψ_{yy} . Это обстоятельство несколько затрудняет применение метода Рэлея в нелинейном случае, так как приближенное решение Рэлея (в его первоначальном варианте) дает неправильные выражения для φ_{yy} : на любом отрезке (y_k, y_{k+1}) приближенное решение φ_n имеет вид $a \exp(\alpha y) + b \exp(-\alpha y)$ и $\varphi_n'' = \alpha^2 \varphi_n$, что заведомо неверно (за исключением случая $U = \text{const}$).

Можно показать, что приближенное значение φ_{yy} при $y_k < y < y_{k+1}$ дается выражением

$$(1.5) \quad f_{nk} = [\varphi_n'(y_{k+1} + 0) - \varphi_n'(y_k + 0)] / (y_{k+1} - y_k) = (\varphi_n')_{(y)}$$

Действительно, учитывая условие непрерывности давления и свойства приближенного решения φ_n , доказанные в [7], имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ y_k \rightarrow x_0}} f_{nk} &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ y_k \rightarrow x_0}} \left\{ \varphi_n'(y_{k+1} + 0) - \varphi_n'(y_{k+1} - 0) + \right. \\ &+ \varphi_n'(y_k + 0) + \left. \frac{1}{n} \varphi_n''(y_k) - \varphi_n'(y_k + 0) \right\} / (y_{k+1} - y_k) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ y_k \rightarrow x_0}} \left\{ \frac{\varphi_n(y_k)}{U_n - c} \frac{U_n'(y_{k+1}+0) - U_n'(y_{k+1}-0)}{y_{k+1} - y_k} + \alpha^2 \varphi_n(y_k) \right\} = \\ = \alpha^2 \varphi(x_0) + \varphi(x_0) U''(x_0) / [U(x_0) - c] \equiv \varphi''(x_0)$$

Сходимость метода Рэля в нелинейной задаче может быть доказана по аналогии с линейным случаем — решение раскладывается в ряд по малой амплитуде, составляются разности между точными и приближенными уравнениями, проводятся интегральные оценки разности между точным и приближенным решениями.

При этом правые части нелинейных уравнений, например, второго приближения содержат члены со второй производной по y от решения линейной задачи $\varphi(y)$, аппроксимация которого дается формулой (1.5). Аналогичная ситуация имеет место при решении уравнений третьего приближения и т. д. Поэтому хотя на каждом интервале (y_k, y_{k+1}) ломаной $U_n(y)$ общее выражение для функций тока можно представить в виде суммы

$$(1.6) \quad \psi^{(n)} = \sum_{n=1}^N \sin n\alpha x \sum_{j=1}^k [A_{1n0,N} \exp(-\alpha ny) + A_{1nj,N} \operatorname{sh} \alpha n(y-y_j)] + \\ + \sum_{n=1}^N \cos n\alpha x \sum_{j=1}^k [A_{2n0,N} \exp(-\alpha ny) + A_{2nj,N} \operatorname{sh} \alpha n(y-y_j)] + \\ + \sum_{j=1}^{k-1} (y_k - y_j) A_{j,N} + (y - y_k) A_{k,N} + \psi_0, \quad \psi_{0y}(y) \equiv U_0(y)$$

тем не менее вторая производная от ψ_n по y не может быть получена непосредственным дифференцированием $\psi^{(n)}(x, y, t)$ по y и дается формулой типа (1.5). В расчетах было удобно аппроксимировать значение функции $\psi_x \psi_{yy}$ выражением

$$(1.7) \quad [\psi_x^{(n)} \psi_y^{(n)}]_{(y)} - \psi_x^{(n)} \psi_{yy}^{(n)} \Big|_{y=y^0} + \psi_x^{(n)} \psi_{yy}^{(n)} \equiv \rho_n \\ y_k < y < y_{k+1}, \quad y^0 = (y_k + y_{k+1})/2$$

Давление по-прежнему определяется первым уравнением системы (1.1). При этом точно так же, как и в линейной задаче, второе уравнение системы (1.1) при $y_k < y < y_{k+1}$ тождественно выполняется. Условие непрерывности нормальной составляющей скорости при $y = y_k$ приближенное выражение для функции тока (1.6) удовлетворяет. Условие непрерывности давления заменялось эквивалентным условием непрерывности p_x при $y = y_j$

$$(1.8) \quad p_x^{(n)}(y_k+0) = p_x^{(n)}(y_k-0), \quad p_x^{(n)} \equiv -\psi_{yt}^{(n)} - \psi_y^{(n)} \psi_{yx}^{(n)} + \rho_n$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в (1.8) и собирая коэффициенты при $\sin n\alpha x$ и $\cos n\alpha x$, можно получить нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $A_{ijk,N}(t)$, $A_{i,N}(t)$, разрешенную относительно производных. При этом выписывание правых частей этих уравнений можно автоматизировать с помощью рекуррентных соотношений и выполнять эту операцию на ЭВМ, что позволит рассмотреть разложение (1.6) при достаточно большом числе гармоник.

2. Численное исследование полученной системы проводилось применительно к экспериментам [9, 10]. Профили скорости основного течения задавались в виде кривой

$$U_0 = 1 - \Delta / ch^2(\gamma y)$$

Здесь $\Delta = 0.7$ и $\gamma = 0.9$ (в соответствии с [9]).

Профиль скорости $U_0(y)$ аппроксимировался несколькими ломаными U_m : при $m=4$, $y_1 = -1.8$, $y_2 = -0.2$, $y_3 = -y_2$, $y_4 = -y_1$; при $m=10$, $y_1 = -1.8$, $y_k = y_1 + 0.4(k-1)$ ($k=2, 3, \dots, 10$); при $m=18$, $y_1 = -1.8$, $y_{10} = -0.2$, $y_{k+1} = y_k + 0.2k$ ($k=1, 2, \dots, 8, 10, 11, 12, \dots, 17$).

Проведенная серия предварительных расчетов в рамках линейной теории ($N=M=1$) показала быструю сходимость метода Рэлея; оказалось вполне достаточным рассмотрение профиля $U_{10}(y)$. Сравнение, например, коэффициента экспоненциального нарастания возмущений $\lambda = \alpha c_i$ при $\alpha = 0.5$ дает для U_4 , U_{10} , U_{18} соответственно $\lambda = 0.083$, 0.114 , 0.121 .

Собственные функции в линейной теории также вычисляются с достаточной точностью.

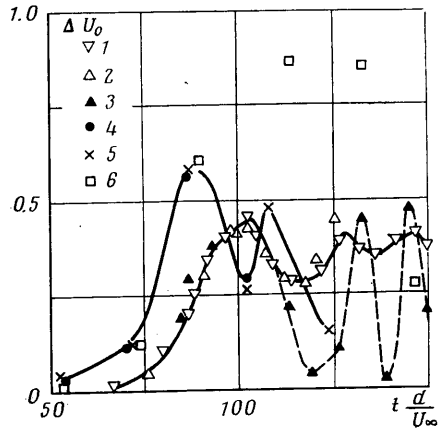
Основные расчеты поэтому были проведены при $m=10$. На фиг. 1–3 $\Delta u_0(n, t)$ — осредненное по x приращение продольной скорости на оси следа $u(x, 0, t) - U(0)$, n — используемое число гармоник по x .

На фиг. 1 точки, соответствующие $\Delta u_0(6, t)$, $\Delta u_0(10, t)$, $\Delta u_0(2, t)$, $A_{111,6}(t)$, $A_{111,10}(t)$, $A_{111,2}(t)$, обозначаются индексами 1–6. Фиг. 1 соответствует $\alpha = 0.5$, фиг. 2, 3 — $\alpha = 0.1$.

Приведенные числовые данные (например, при $\alpha = 0.5$, $m = 10$, $n = 2 \div 10$, фиг. 1) показывают, что взаимодействие первичной моды с высшими гармониками на начальной стадии развития возмущения приводит к заметному ослаблению экспоненциального роста; через некоторое время амплитуда первичной моды начинает даже убывать. В экспериментах [9] это явление также наблюдается, соответствующие времена развития $t = T_1$, при которых достигаются первые локальные экстремумы, вполне сопоставимы: в расчетах $T_1 \approx 100 [d/U_\infty] \approx 10^{-2}$ сек, в экспериментах $T_1 \approx 80 \text{ мм/с}_r \approx 0.9 \cdot 10^{-2}$ сек.

При дальнейшем развитии возмущения ($\alpha = 0.5$, $m = 10$, $n = 2 \div 10$) оказываются промодулированными низкочастотной составляющей, период которой примерно в $2 \div 3$ раза больше периода колебаний в следе. Отметим, что увеличение числа высших гармоник заметно влияет на амплитуду первой моды, которая уменьшается примерно в 2 раза (фиг. 1, $\alpha = 5$, $t \approx 100 d/U_\infty$), но общая картина течения в начале нелинейного взаимодействия меняется несущественно и уже при $n = 2$ описывается качественно правильно фиг. 1–3. Увеличение числа звеньев ломаной также в целом не изменяет ситуации (при $m \geq 10$) и приводит главным образом лишь к некоторым изменениям в среднем профиле скорости.

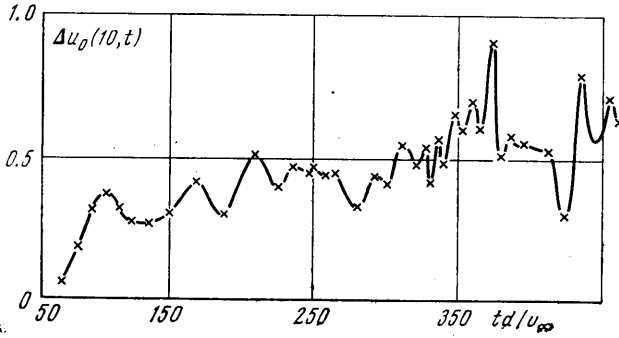
Для среднего профиля скорости характерно наполнение профиля. Соответствующие параметры при этом хорошо согласуются с экспериментальными: при $m = 10$, $n = 10$, $\alpha = 0.5$ за 100 единиц безразмерного времени максимальное значение средней скорости на оси следа увеличилось до



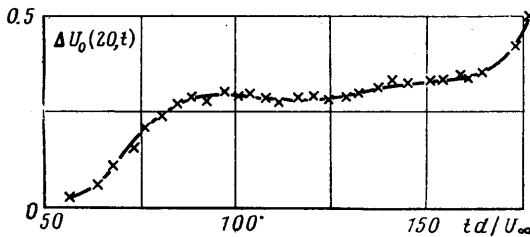
Фиг. 1

$0.72U_\infty$, в эксперименте [9] соответственно до $0.85U_\infty$. Интересно, что в дальнейшем рост гармоник в расчетах сопровождается колебательными процессами, т. е. осредненное по продольной координате течение во времени ведет себя довольно сложно.

Проведенные числовые эксперименты показали сильное влияние ундетонов на общую картину неустойчивости течения в следе. Введение в рассмотрение низких гармоник приводит к передаче энергии к ним от



Фиг. 2



Фиг. 3

исходной моды. При этом с течением времени амплитуды последних значительно вырастают и даже превышают амплитуду исходной моды; в спектре происходит существенное перераспределение в сторону более длинных волн. Нечто аналогичное наблюдается в эксперименте [9] при рассмотрении нелинейного взаимодействия двух близких частот ($f_1=700$ гц и $f_2=630$ гц). Роль низкочастотных составляющих играет разностная компонента $f_1-f_2=70$ гц, рост которой заметно преобладает среди прочих компонент $-2f_1$, $2f_2$, f_1+f_2 и т. д.

В расчетах было изучено нелинейное развитие возмущения при $\alpha=0.1$ с учетом 14 гармоник. В ходе численного эксперимента пятая ($\alpha_1=0.5$) и седьмая ($\alpha_2=0.7$) гармоники задавались равными 10^{-2} , амплитуды остальных гармоник в начальный момент времени приравнялись 10^{-4} . Решение задачи с такими начальными данными действительно показало преимущественный рост разностной гармоники ($\alpha_2-\alpha_1=0.2$), т. е. перераспределение энергии в сторону больших масштабов. При этом обе взаимодействующие моды уменьшались (табл. 1, 2). В таблицах дается типичное сопоставление амплитуд гармоник в один из моментов времени $t=T$, при котором достигается локальный экстремум. Сравнение проводится со случаем, когда взаимодействие отсутствует (на табл. 2 $\alpha_1=0.5$, $h=2$; $\alpha_2=0.7$, $h=2$). Существенно, что амплитуда разностной гармоники $\alpha_1-\alpha_2$ появляется раньше, чем гармоники $2\alpha_1$ и $2\alpha_2$.

Конкурирующее взаимовлияние возмущений является важным механизмом, способствующим распространению энергии по спектру, амплитуды

Таблица 1

$\alpha=0.1$ $N=14$	$A_{1,5,3}$	$A_{1,7,3}$	$A_{1,10,3}$	$A_{1,14,3}$	$A_{1,12,3}$	$A_{1,2,3}$
$t=0$ $T \cong 47$	10^{-2} 0.24	10^{-2} 0.28	10^{-4} 0.045	10^{-4} 0.02	10^{-4} 0.03	10^{-4} 0.86

Таблица 2

$\alpha=0.5$ $N=2$	$A_{1,1,3}$	$A_{1,2,3}$	$\alpha=0.7$ $N=2$	$A_{1,1,3}$	$A_{1,2,3}$
$t=0$ $T \cong 50$	10^{-2} 0.42	10^{-4} 0.12	$t=0$ $T=49$	10^{-2} 0.38	10^{-4} 0.09

конкурирующих мод α_1 и α_2 уменьшаются, но это уменьшение сопровождается увеличением интенсивности комбинационных частот $m\alpha_1 + n\alpha_2$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). При этом из двух взаимодействующих колебаний α_1 и α_2 сильнее ослабляется колебание с меньшей амплитудой.

Были также проведены расчеты с прямой целью воспроизвести экспериментальное распределение энергии по спектру. Например, при $\alpha=0.1$ и при наличии 10 гармоник (охватывается весь диапазон неустойчивых по линейной теории возмущений) нелинейное взаимодействие приводило к заметному преобладанию в спектре длинных волн. Начальные данные задавались в различных вариантах: либо все гармоники в начальный момент времени равны 10^{-4} , либо наибольшей задавалась волна, близкая к максимально нарастающей по линейной теории (остальные амплитуды малы, но не нулевые). Окончательные результаты практически не зависят от задаваемых начальных данных — преобладают длинные волны (табл. 3).

Таблица 3

$\alpha=0.1$ $N=10$	A_{113}	A_{133}	A_{153}	A_{173}	A_{193}
$t=0$ $T \cong 19$	10^{-4} $0.8 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} $1 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} $1.3 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} $1.1 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} $1 \cdot 10^{-3}$
$T \cong 228$	1.1	0.8	0.5	0.4	0.2
$t=0$ $T \cong 12$	10^{-4} $0.55 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} $0.5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2} $0.5 \cdot 10^{-1}$	10^{-4} $0.6 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} $0.4 \cdot 10^{-3}$
$T \cong 93$	0.55	0.13	0.46	0.075	0.075

Для первых четырех гармоник в табл. 1 $T=48$, для двух последних $T=44$; в табл. 2 в третьем столбце $T=48$, в остальных $T=50$.

Один из наиболее важных и характерных процессов — модуляция колебаний в следе низкочастотной составляющей (фиг. 2). Появление в спектре медленных нерегулярных колебаний отчетливо наблюдается в эксперименте [9, 10] и носит, по-видимому, довольно общий характер. Объясняется это явление резонансными эффектами и сильным ростом разностной составляющей двух близких частот. Данное явление служит одним из основных механизмов «рандомизации» [9, 10] при переходе от ламинарного течения к турбулентному. При процессе рандомизации энергия основной моды распределяется по остальным составляющим спектра, при этом незначительные погрешности в частоте могут увеличиваться более чем на

порядок. Например, при $\alpha_1=0.5$, $\alpha_2=0.45$ изменение на 1% приводит к изменению в разностной составляющей ($\alpha_1-\alpha_2$) на 10%.

В процессе нелинейного развития колебаний в следе энергия может передаваться не только от основного течения к колебаниям, но также и от колебаний к основному течению. Этот факт подтверждается как прямыми расчетами осредненного течения, так и полученным распределением рейнольдсовых напряжений поперек следа

$$\frac{1}{20} \int_{84}^{104} uv(0, -0.8, t) dt \cong 0.011, \quad \frac{1}{20} \int_{104}^{124} uv(0, -0.8, t) dt \cong -0.012$$

$$\frac{1}{20} \int_{84}^{104} uv(0, 0.8, t) dt \cong -0.009, \quad \frac{1}{20} \int_{104}^{124} uv(0, -0.8, t) dt \cong 0.018$$

$$(\alpha=0.1, N=10, M=10, A_{ijk, N}(0)=10^{-4})$$

Поступила 24 XI 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. Об устойчивости вихревых слоев. Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 304.
2. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
3. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. М., Изд-во МГУ, 1973.
4. Ko D. R. S., Kybota T., Lees L. Finite disturbance effect on the stability of a laminar incompressible wake behind a flat plate. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, pt 2.
5. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
6. Стрэтт Д. В. (Рэлей) Теория звука, т. 1-2. М., Гостехиздат, 1955.
7. Герценштейн С. Я. О сходимости метода Рэля. Докл. АН СССР, 1969, т. 187, вып. 5.
8. Sato H. An experimental study of non-linear interaction of velocity fluctuations in the transition region of a two-dimensional wake. J. Fluid Mech., 1970, vol. 44, No. 4.
9. Sato H., Saito H. Fine-structure of energy spectra of velocity fluctuations in the transition region of a two-dimensional wake. J. Fluid Mech., 1975, vol. 67, pt 3.
10. Gaster M. A note on a relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability. J. Fluid Mech., 1963, vol. 14, pt 2.
11. Герценштейн С. Я., Лезин Е. М., Шкадов В. Я. О нелинейном развитии и взаимодействии колебаний в плоском следе. 2-я Всес. конф. «Современные проблемы тепловой конвекции». (Тез. докл.) Пермь, 1975.
12. Герценштейн С. Я., Сухоруков А. Н., Шкадов В. Я. Численные эксперименты с нелинейными волнами в следе. Всесоюзный симпозиум по методам аэрофизических исследований. (Тез. докл.) Новосибирск, 1976.