

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ И ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, В. М. ШМИДТ

(Москва)

Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений в классической задаче Бенара — Рэлея рассматривалось в ряде работ [1, 2]. Как правило, исследование сводилось к построению и изучению модельных уравнений типа уравнения Ландау [3-6]. В данной работе уравнения конвекции в приближении Буссинеска решаются с помощью прямых методов [7-10]. Исследуется эволюция возмущения, которое представляет собой суперпозицию двух волн с различными волновыми числами α_1 и α_2 . Учитывается появление гармоник вида $n\alpha_1 \pm m\alpha_2$, где n и m — целые числа.

Основное внимание уделено проблеме возникновения турбулентности [11]. Проведенные численные эксперименты показали, что рассмотрение взаимодействия ограниченного числа гармоник (от 23 до 500) дает возможность воспроизвести некоторые характерные особенности движения при возникновении турбулентности.

1. Рассматривается устойчивость горизонтального слоя жидкости, ограниченного параллельными плоскостями $z=0$ и $z=d$ и равномерно вращающегося относительно вертикальной оси z с угловой скоростью Ω . Температура T_1 на границах слоя фиксирована, температура на нижней границе равна T_0 , на верхней — $(T_0 - \Delta T)$. Используются двумерные уравнения конвекции в приближении Буссинеска, записанные во вращающейся системе координат, центробежной конвективной силой пренебрегается [1]

$$(1.1) \quad \mathbf{V}_t + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} + 2\Omega \times \mathbf{V} = -\nabla P / \rho_0 - g\rho' / \rho_0 + \nu \nabla^2 \mathbf{V}$$

$$(1.2) \quad u_x + w_z = 0$$

$$(1.3) \quad T_t - w(\Delta T/d) + (\mathbf{V}\nabla)T = k\nabla^2 T$$

$$(1.4) \quad \rho' = -\rho_0 \alpha T_2; \quad T_1 = T_0 + T_2 = T_0 - (\Delta T/d)z + T(x, z, t)$$

Здесь $\mathbf{V} = \{u, v, w\}$ — вектор скорости, ν — коэффициент вязкости, g — ускорение силы тяжести, α — коэффициент теплового расширения, k — коэффициент теплопроводности, ρ_0 — плотность жидкости, соответствующая температуре T_0 , ρ' — изменение плотности за счет отклонения температуры от T_0 .

Следуя [12], преобразуем систему (1.1)–(1.4). Введем мерные η и ψ

$$\eta = u_z - w_x, \quad u = \psi_z, \quad w = -\psi_x$$

В безразмерных переменных задача сводится к изучению системы

$$(1.5) \quad \eta_t = J(\psi, \eta) + \sigma \nu z - \sigma R T_x + \sigma \nabla^2 \eta$$

$$(1.6) \quad T_t = J(\psi, \eta) - \psi_x + \nabla^2 T$$

$$(1.7) \quad v_t = J(\psi, v) - \sigma \tau \psi_z + \sigma \nabla^2 v, \quad \eta = \nabla^2 \psi.$$

$$J(\psi, f) = \psi_x f_z - \psi_z f_x$$

Здесь $\sigma = \nu/k$ — число Прандтля, $\tau = 2\Omega d^2/\nu$ — число Тейлора, $R = g\alpha\Delta T d^3/\nu k$ — число Рэлея.

Границы слоя будем считать изотермическими, плоскими и свободными от касательных напряжений при $z=0$ и 1

$$(1.8) \quad \psi = T = \psi_{zz} = v_{zz} = 0$$

2. Исследование нелинейного взаимодействия возмущений в гидродинамике представляет собой сложную и мало изученную задачу численного анализа. Небольшое число работ по данной тематике выполнялось, как правило, с существенным использованием предположения о малости амплитуд взаимодействующих возмущений; применялись обычные разложения по малому параметру, которые давали возможность проследить за взаимодействием лишь на его начальной стадии. Наиболее интересные аспекты нелинейного взаимодействия в силу выбранного метода последовательной линеаризации из рассмотрения исключались.

Один из главных факторов, позволивших существенно продвинуться в понимании рассматриваемых физических процессов, — разработка эффективной численной методики исследования.

Основные положения этой методики вкратце сводятся к следующему.

1. По одной из пространственных переменных решение представляется в виде ряда Фурье. Тем самым сокращается число независимых переменных. Здесь существенно используется тот хорошо известный физический факт, что по одной из пространственных переменных искомые функции имеют волновую природу. В частности, для возмущений с достаточно малой амплитудой форма волны имеет чисто синусоидальный вид.

2. По остальным пространственным переменным решение представляется в виде ряда по известной полной системе функции (метод Галеркина), но с неопределенными коэффициентами $A_i(t)$, которые зависят только от времени. Существенно, что система функций выбирается таким образом, чтобы рассматриваемое приближенное решение содержало разложения по малому параметру. Другими словами, решение ищется в таком виде, что по меньшей мере при малых амплитудах оно практически совпадает с точным. Данное обстоятельство является решающим при численной реализации метода, так как в ряде случаев гарантирует его быструю сходимость.

3. Удалось расписать и запрограммировать данную вычислительную схему в самом общем виде, т. е. машина «сама» подставляет ряды в исходные дифференциальные уравнения и «сама» формирует систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $A_i(t)$, что дает практическую возможность рассмотрения нелинейных взаимодействий большого числа гармоник в самых разнообразных ситуациях.

Решение системы уравнений (1.5) — (1.8), удовлетворяющее граничным условиям (1.9), представим в виде

$$(2.1) \quad \psi = \sum_{n=1}^N \sin \pi n z \sum_{m=0}^M \sum_{l=l_1}^L A_{1nml}(t) \sin \pi x \alpha_{m1}$$

$$(2.2) \quad T = \sum_{n=1}^N \sin \pi n z \sum_{m=0}^M \sum_{l=l_0}^L A_{2nml}(t) \cos \pi x \alpha_{m1}$$

$$(2.3) \quad v = \sum_{n=0}^N \cos \pi n z \sum_{m=0}^M \sum_{l=l_1}^L A_{3nml}(t) \sin \pi x \alpha_{m1}$$

$$\alpha_{m1} = m\alpha_1 + l\alpha_2, \quad l_0 = -L \operatorname{sign} m, \quad l_1 = 1 - (1+L) \operatorname{sign} m$$

Представление решения в виде (2.1) – (2.3) соответствует описанию нелинейного развития и взаимодействия возмущений с несоизмеримыми волновыми числами α_1 и α_2 . Случай большего или меньшего числа взаимодействий легко выписывается по аналогии с рассмотренным.

Подставляя выражения (2.1) – (2.3) в уравнение (1.5) – (1.8) и собирая члены при $\sin \pi n z$, $\cos \pi n z$ и $\sin \pi n x \alpha_{mi}$, $\cos \pi x \alpha_{mi}$, можно выписать систему уравнений для неизвестных функций

$$A_{inmi}(t) \quad (i=1, 2, 3)$$

$$\frac{dA_{1nmi}}{dt} = -\{\sigma[\pi^4(n^2 + \alpha_{mi}^2)^2 A_{1nmi} + \pi R \alpha_{mi} A_{2nmi} - \pi n \tau A_{3nmi}]\} +$$

$$+ J_{1nmi} / \{\pi^2(n^2 + \alpha_{mi}^2)\}$$

$$\frac{dA_{2nmi}}{dt} = -\pi^2(n^2 + \alpha_{mi}^2) A_{2nmi} - \pi \alpha_{mi} A_{1nmi} + J_{2nmi}$$

$$\frac{dA_{3nmi}}{dt} = -\pi^2(n^2 + \alpha_{mi}^2) \sigma A_{3nmi} - \pi n \sigma \tau A_{1nmi} + J_{3nmi}$$

$$J_{inmi} = \pi/2 \left\{ \sum_{r=1}^{n+\delta_{3i}-1} r [(\psi_{n-r})_x' B_{ir} - (B_{in-r})_x' \psi_r]_{mi} + \right.$$

$$+ \sum_{r=1-\delta_{3i}}^{N-n} \{r(1-2\delta_{3i}) [(\psi_{n+r})_x' B_{ir} - (1-2\delta_{3i})(B_{in+r})_x' \psi_r]_{mi} -$$

$$- (n+r) [(\psi)_r]_x' B_{in+r} - (1-2\delta_{3i})(B_{ir})_x' \psi_{n+r}]_{mi} \text{ sign } n \}$$

$$- [(\psi_p)_x' B_{iq} \pm (B_{ip})_x' \psi_q]_{mi} =$$

$$= \pi/2 \left\{ \sum_{r=0}^M \sum_{j=\max(l_2, l_4-l)}^{\min(L, l-l_2)} \alpha_{rj} (A_{1prj} B_{iqm-r-l-j} \pm B_{iprj} A_{1qm-r-l-j}) + \right.$$

$$+ \sum_{r=0}^{M-m} \sum_{j=\max(l_2, l_4-l)}^{\min(L, L-l)} [\alpha_{rj} (A_{1prj} B_{iqm+r+l+j} \pm (1-2\delta_{2j}) B_{iprj} A_{1qm+r+l+j}) -$$

$$- \alpha_{m+r+l+j} (A_{1pm+r+l+j} B_{iqrj} \pm (1-2\delta_{2i}) B_{ipm+r+l+j} A_{1qrlj}) (1-2\delta_{2i}) \text{ sign}(m+|l|)] \}$$

$$B_{inmi} = \{[-\pi^2(n^2 + \alpha_{mi}^2) - 1] \delta_{i1} + 1\} A_{inmi}$$

$$l_2 = -L \text{ sign } r, \quad l_3 = -L \text{ sign}(m-r), \quad l_4 = -L \text{ sign}(m+r)$$

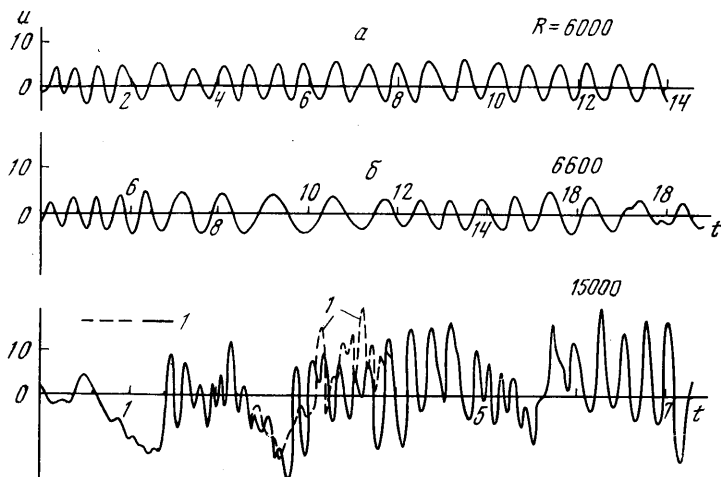
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

3. Для различных значений N, M, L была проведена серия предварительных расчетов, которая показала правомерность рассмотрения небольшого числа приближений. Так, расчет одноволнового возмущения ($\alpha_1=0.6, \alpha_2=0$) при $\sigma=0.025, \tau=10, R=1000$ для различных комбинаций N и M , где N принимало значения 2 и 3, а $M=2, 3, 4, 6$, показал, что величины установившихся значений амплитуд первых гармоник отличаются не более чем на 5%. Поэтому, за исключением отдельных вариантов, основные расчеты были проведены для $N=M=L=2$. Взаимодействия вида $\alpha_1 \pm 2\alpha_2$ и $2\alpha_1 \pm \alpha_2$ при этом, как правило, не учитывались.

Представляется интересным проследить, как изменяется процесс нелинейного взаимодействия возмущений с увеличением числа R .

На фиг. 1 дана компонента скорости $u(t)$ в точке $z=0.3$, $x=0.3/\alpha_2$ при $\sigma=0.025$, $\tau=1000$, $R=6000 \div 15\,000$, $\alpha_1=1.2$, $\alpha_2=0.025$.

Для чисел Рэлея, близких к критическому (R^*), характерно, как правило, образование конвективных движений, близких к синусоидальным. При этом нелинейное взаимодействие нарастающих возмущений приводит к сильной конкуренции, в результате которой «выживает» лишь одно из них. Интересно, что при малых числах Прандтля выделяется не максимально



Фиг. 1

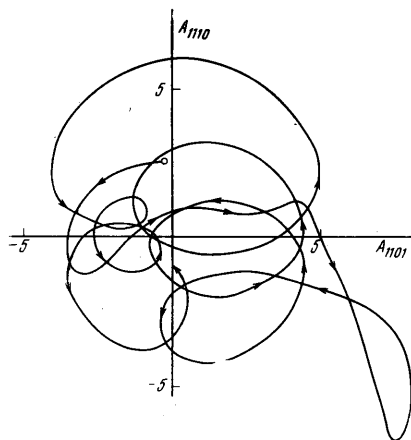
нарастающее по линейной теории возмущение, а возмущение со значительно меньшим волновым числом. При достаточно больших числах Рэлея амплитуда рассматриваемого возмущения значительно возрастает, и оно оказывается способным поддерживать возмущения, которые по линейной теории должны бы затухать; при этом амплитуды колебаний оказываются промодулированными низкочастотной составляющей (фиг. 1, кривая б).

Взаимодействие возмущений, нарастающих по линейной теории, в этой области параметров по-прежнему приводит к выживанию возмущения с меньшим волновым числом.

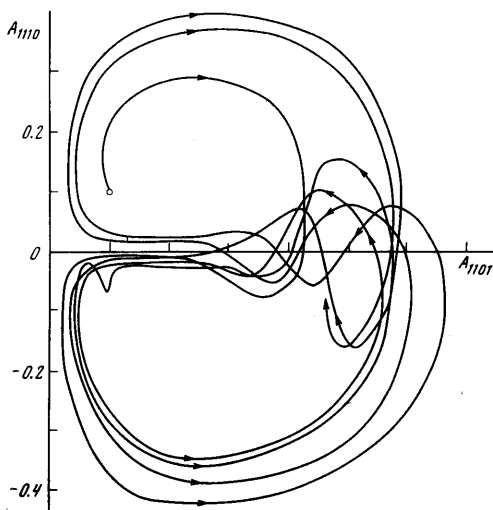
Наибольший интерес представляют исследования процессов нелинейного взаимодействия при числах Рэлея, превышающих критическое примерно в 2÷3 раза, при этом наблюдаемые в эксперименте течения турбулентны. Проведенные при высоких числах Рэлея и Тейлора расчеты обнаружили качественные изменения в характере нелинейного взаимодействия, приводящие к возникновению высокочастотных пульсаций весьма сложного вида (фиг. 1, кривая в). Пунктиром на фиг. 1 показано решение, которое в начальный момент времени незначительно (примерно на 1%) отличается от первоначального. Представленные на фиг. 1 данные свидетельствуют о чрезвычайно сильной зависимости локальных параметров от начальных данных и вместе с тем показывают слабое влияние начальных данных на средние характеристики. Отметим, что экспоненциальная расходимость в данном случае весьма высока (траектория с близкими начальными данными удаляется от исходной примерно как $e^{\lambda t}$, $\lambda=3 \div 6$). Динамические системы с подобной экспоненциальной расходимостью относятся к классу стохастических [13]. Проекция фазовой траектории на плоскость A_{1110} , A_{1101} (фиг. 2) дает представление о характере заполнения части фазового про-

пространства и позволяет провести сравнение некоторых известных случаев [14–21]. На фиг. 2 приведена проекция фазовой траектории на плоскость $A_{1110}A_{1101}$ при $\sigma=0.025$, $\tau=1000$, $R=15\,000$, $\alpha_1=1.2$, $\alpha_2=0.025$. В частности, сопоставление с [17] отчетливо демонстрирует качественно новые особенности системы, возникающие при больших числах Рэлея и Тейлора: уменьшение диссипации приводит к расширению области фазового пространства, в которой наблюдается стохастичность.

Некоторые из приведенных выше физических результатов были воспроизведены с учетом большого числа гармоник. Расчеты показали, что введе-



Фиг. 2



Фиг. 3

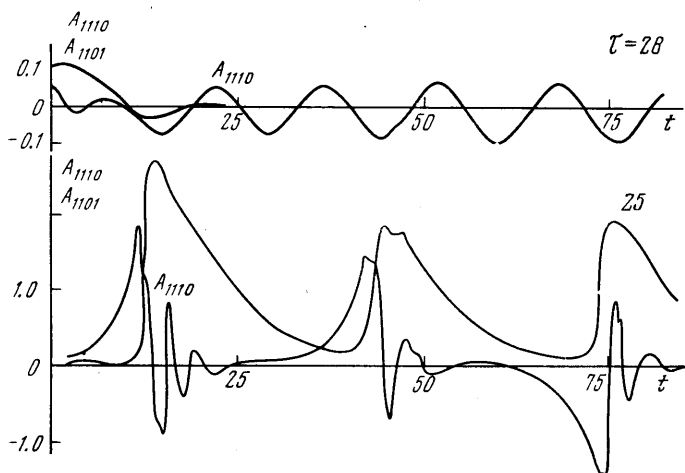
ние большого числа гармоник, как правило, приводит лишь к некоторым несущественным количественным изменениям. В частности, введение гармоник $\alpha_1 \pm 2\alpha_2$ и $2\alpha_1 \pm \alpha_2$ несколько усложняет поведение возмущений при малых значениях амплитуд, но в целом характеристики процесса (характерные амплитуды и времена) не изменяются. Далее, введение гармоник $3\alpha_1$ и $3\alpha_2$, например, при $\sigma=0.025$, $\tau=25$, $R=1500$, $\alpha_1=0.6$, $\alpha_2=0.2$ также оказывается несущественным (первоначальные значения амплитуд A_{1110} и A_{1101} за характерное время задачи $t \sim 20$ изменились лишь во втором знаке).

Следует подчеркнуть, что обнаруженные при высоких числах R и τ режимы (фиг. 2) существенно отличаются от характера случайных процессов (фиг. 3), описанных ранее [17]. В [17] «работает» крупномасштабный механизм обмена энергией между частотами из различных областей спектра; здесь же характерно возникновение и взаимодействие высокочастотных пульсаций. На фиг. 3 показана проекция фазовой траектории на плоскость $A_{1110}A_{1101}$ при $\sigma=0.025$, $\tau=10$, $R=1500$, $\alpha_1=1.2$, $\alpha_2=0.2$.

Расчеты, проведенные при больших значениях чисел Прандтля, показали ряд существенных изменений в характере нелинейного взаимодействия. В частности, конкурирующее взаимовлияние двух монотонно нарастающих возмущений при $\sigma < 0.6$ приводит к выделению возмущения с большей длиной волны, а при $\sigma > 0.6$ может выделяться возмущение с меньшей длиной волны. Оказалось возможным также образование стационарных состояний, представляющих собой суперпозицию нескольких стационарных волн ко-

нечной амплитуды (например, при $\sigma=0.025$, $\tau=0$, $R=2000$, $\alpha_1=0.25$, $\alpha_2=0.05$).

Показано также, что учет нелинейного взаимодействия возмущений может существенно влиять на интегральные характеристики течения. В частности, для малых чисел Прандтля ($\sigma=0.025$) в чисто колебательной (по линейной теории) области параметров могут устанавливаться стационарные конвективные валы большой амплитуды (например, при $\tau=1000$, $R=10\,000$,



Фиг. 4

$\alpha_1=1.2$, $\alpha_2=0.2$). Потоки тепла при этом увеличиваются в несколько раз. Отметим, что в тех случаях, когда нелинейное взаимодействие волновых возмущений приводит к образованию нестационарного процесса, носящего случайный характер, поток тепла также может существенно изменяться во времени. Интересно, что в области перехода от этого режима к обычной колебательной неустойчивости начальная стадия взаимодействия возмущений может характеризоваться сильными «всплесками» потоков тепла.

Существенно, что исследуемая динамическая система довольно хорошо в качественном отношении согласуется с известными экспериментальными данными [22]. В частности, в соответствующей области параметров (вблизи точки пересечения нейтральных кривых для монотонной и колебательной неустойчивости) уменьшение числа Тейлора также сопровождается резким переходом от правильных синусоидальных колебаний к «неустановившемуся» режиму (фиг. 4). Характерный период при этом в эксперименте увеличивается примерно в 1.5–2 раза, что находится в хорошем соответствии с расчетными данными. (На фиг. 4 изображены зависимости $A_{1110}(t)$ и $A_{1101}(t)$ при $\sigma=0.025$, $\tau=25$, 28, $R=1500$, $\alpha_1=0.6$, $\alpha_2=0.2$). Увеличение чисел Рэлея в [22] также вначале сопровождается появлением низкочастотной модуляции, а при числах Рэлея, примерно в 3–4 раза больших критического, наблюдаются развитые турбулентные режимы. При этом числа Рэлея меньше, чем критическое число Рэлея для монотонной неустойчивости. Рассматриваемая модель позволяет также воспроизвести немонотонный характер зависимости числа Нуссельта от числа Тейлора, обнаруженный в [22] при экспериментах с водой.

Поступила 10 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, т. 1. М., «Наука», 1965.
3. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М.—Л., Гостехиздат, 1944.
4. Stuart I. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable und unstable parallel flows. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 3.
5. Юдович В. И. О возникновении конвекции. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
6. Струминский В. В. К нелинейной теории аэродинамической устойчивости. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 5.
7. Мизлин С. Г. Прямые методы в математической физике. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
8. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. ПММ, 1940, т. 4, вып. 3.
9. Шкадов В. Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1973, № 25.
10. Должанский Ф. В., Кляцкин В. И., Обухов А. М., Чусов М. А. Нелинейные системы гидродинамического типа. М., «Наука», 1974.
11. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys., 1971, vol. 20, No. 3.
12. Veronis G. Motions at subcritical values of the Rayleigh number in a rotating fluid. J. Fluid. Mech., 1966, vol. 24, No. 3.
13. Заславский Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний. Усп. физ. н., 1971, т. 105, вып. 1.
14. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmosph. Sci., 1963, vol. 20, No. 2.
15. Lorenz E. N. The mechanics of vacillation. J. Atmosph. Sci., 1963, vol. 20, No. 5.
16. Вышкинд С. Я., Рабинович М. И., Тарангович Т. М. О неколомгоровской турбулентности при параметрическом возбуждении звука в вязкой среде. 6-й Международнй симпозиум по нелинейной акустике, М., 1975. (Тез. докл.) МГУ, 1975.
17. Герценштейн С. Я., Шмидт В. М. Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя. Докл. АН СССР, 1975, т. 225, № 1.
18. McLaughlin J. B., Martin P. C. Transition to turbulence of a statically stressed fluid. Phys. Rev., Ser. A, 1975, vol. 12, No. 1.
19. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1975.
20. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., «Наука», 1970.
21. Аносов Д. В., Синай Я. Г. Некоторые гладкие эргодические системы. Усп. матем. н., 1967, № 5.
22. Rossby H. T. A study of Benard convection with and without rotation. J. Fluid. Mech., 1969, vol. 36, No. 2.