МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 1977

УДК 534.222.2–13 : 541.124

О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

А. Г. БАГДОЕВ, Г. Г. ОГАНЯН

(*Ереван*)

В химически активной среде рассматривается пространственная задача определения параметров движения в окрестности каустики – огибающей лучей фронтов волн в приближении геометрической акустики. В зависимости от отношения времени протекания химической реакции к макроскопическому времени различают два предельных процесса распространения возмущений [1]: квазизамороженный и квазиравновесный. В отсутствие вязкости, теплопроводности и химической реакции задача в линейной постановке рассматривалась в [2–6]. Нелинейные уравнения для произвольной недиссипативной среды вблизи каустики выведены в [7–10].

В настоящей работе методом [1] выведены нелинейные уравнения движения среды для обоих видов процессов. Для падающей ступенчатой волны найдено распределение давления в окрестности и на самой каустике. Выявлена роль химической реакции на распределение параметров течения в окрестности каустики. Приведены уравнения для неоднородной первоначально движущейся жидкости вблизи каустики. Для случая специальных сред, в которых предельные скорости звука покоящейся смеси близки друг к другу, в окрестности каустики получено нелинейное уравнение, содержащее старшую производную третьего порядка. Показано, что решение соответствующего линейного уравнения выражается в виде квадратуры от решения для химически инертной среды и содержит осцилляции вблизи фронтов волн.

1. Основные соотношения и порядки характеристик течения. Предположим, что в потоке химически активной n-компонентной смеси вязких теплопроводных газов происходит только одна реакция типа

$$\sum_{r=1}^{n} \nu_r A_r \rightleftarrows \sum_{r=1}^{n} \nu_r' A_r$$

где слева стоят реагенты, а справа — продукты реакции, ν_r, ν_r' — стехиометрические коэффициенты, A_r — символы химических компонент. Система уравнений, описывающая движение химически активной многокомпонентной смеси вязких газов имеет вид [11]

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho \operatorname{div} \mathbf{V}=0 \tag{1.1}$$

$$\rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\nabla p+\left(\frac{1}{3}\lambda_1+\lambda_2\right)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{V})+\lambda_1\Delta\mathbf{V} \tag{1.2}$$

$$\rho\left(T\frac{dS}{dt}+Q\frac{dq}{dt}\right)=\sigma\nabla\mathbf{V}+k\Delta T \tag{1.3}$$

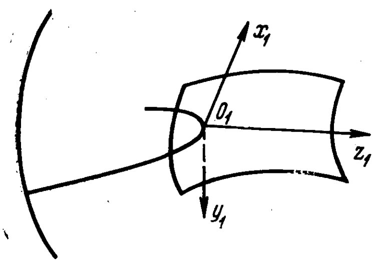
$$Q=\sum_{r=1}^{n}\Delta\nu_r\mu_r,\quad \Delta\nu_r=\nu_r'-\nu_r$$

Здесь t — время, ρ — плотность, $\mathbf{V}$ — вектор скорости частиц смеси, p — давление, T — температура, S — энтропия, λ_1 и λ_2 — первый и второй коэффициенты динамической вязкости, σ — тензор вязких напряжений, k — коэффициент теплопроводности, ∇ и Δ — операторы Гамильтона и Лапласа, μ_r — химический или термодинамический потенциал. Изменение состава смеси характеризуется параметром q, называемым полнотой (степенью развития) химической реакции, Q — сродство химической реакции.

В состоянии полного термодинамического равновесия $Q=0$. Допустим [1, 11], что вблизи этого состояния существует аналитическая зависимость между q и Q

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{\tau}H_1Q+\ldots \tag{1.4}$$

Здесь τ — время протекания химической реакции, феноменологический коэффициент $H_1>0$ ввиду того, что в необратимых процессах энтропия системы может только увеличиваться.



Фиг. 1

Для замыкания системы уравнений (1.1)—(1.4) рассмотрим соотношение Гиббса

$$de=TdS-pdV+Qdq$$

где e — удельная внутренняя энергия, $V=1/\rho$ — удельный объем. Первые частные производные

$$Q=\left(\frac{\partial e}{\partial q}\right)_{V,S},\quad -p=\left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_{q,S},\quad T=\left(\frac{\partial e}{\partial S}\right)_{V,q}$$

представляющие собой уравнения состояния среды, являются тремя недостающими соотношениями между термодинамическими величинами. Рассматриваемую область течения считаем областью коротких волн [1]. Введем систему координат (x_1, y_1, z_1) с началом в точке O_1, находящейся в точке касания фиксированного луча с каустической поверхностью и движущейся по каустике вдоль оси O_1x_1 со скоростью a_1, являющейся линейной скоростью звука на каустике. Ось O_1x_1 направлена вдоль поверхностных лучей на каустике, ось O_1y_1 совпадает с нормалью к каустике, ось O_1z_1 направлена перпендикулярно осям O_1x_1 и O_1y_1 (фиг. 1)

$$\begin{aligned} x_1&=(x-x_0)\alpha_{11}+(y-y_0)\alpha_{12}+(z-z_0)\alpha_{13}\\ y_1&=(x-x_0)\alpha_{21}+(y-y_0)\alpha_{22}+(z-z_0)\alpha_{23}\\ z_1&=(x-x_0)\alpha_{31}+(y-y_0)\alpha_{32}+(z-z_0)\alpha_{33}\end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь (x_0, y_0, z_0) — координаты центра подвижных координат O_1 в системе неподвижных координат (x, y, z), α_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$ — косинусы углов, образованных подвижными осями координат с неподвижными, обладают свойством ортонормированности. Поскольку лучи касаются каустической поверхности в точке O_1, то

$$\frac{dx_0}{\partial t}=a_1\alpha_{11},\quad \frac{dy_0}{dt}=a_1\alpha_{21},\quad \frac{dz_0}{dt}=a_1\alpha_{31} \tag{1.6}$$

С учетом (1.6) из (1.5) можно показать, что имеет место преобразование

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{y_1}{R_1}a_1-a_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1}-a_1\left(\frac{x_1}{R_1}+z_1D_{12}\right)\frac{\partial}{\partial y_1}+y_1a_1D_{12}\frac{\partial}{\partial z_1} \tag{1.7}$$

где R_1 — кривизна нормального сечения каустики в направлении луча, D_{12} — коэффициент второй квадратичной формы каустической поверхности. Аналогичные (1.5) соотношения имеют место для проекций скорости частиц смеси на подвижные оси

$$
\begin{aligned}
&u_1=u\alpha_{11}+v\alpha_{12}+w\alpha_{13}, \quad v_1=u\alpha_{21}+v\alpha_{22}+w\alpha_{23} \\
&w_1=u\alpha_{31}+v\alpha_{32}+w\alpha_{33}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

В дальнейшем производится сжатие координат (x_1, y_1, z_1)

$$
x_1=\varepsilon^{3/2}x_1', \quad y_1=\varepsilon y_1', \quad z_1=\varepsilon^{3/2}z_1' \tag{1.9}
$$

Все порядки величин выбраны на основании линейного решения [5], причем $\varepsilon\sim\gamma^{4/5}$ — малый параметр, γ — интенсивность волны вдали от каустики. Преобразования (1.5), (1.8) и (1.9) позволяют рассматривать течение газовой смеси в окрестности каустики.

Предположим, что разность всех параметров возмущенной и невозмущенной смеси мала:

$$
\begin{aligned}
&p=p_0+\varepsilon p', \quad \rho=\rho_0+\varepsilon\rho', \quad S=S_0+\varepsilon S', \quad T=T_0+\varepsilon T', \\
&q=q_0+\varepsilon q' \\
&Q=\varepsilon Q', \quad a=a_0+\varepsilon a', \quad u_1=\varepsilon u_1', \quad v_1=\varepsilon^{3/2}v_1', \quad w_1=\varepsilon^{3/2}w_1'
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Здесь и далее параметры в состоянии термодинамического равновесия обозначены нулевым индексом.

В решениях линейной недиссипативной задачи, полученных в [2, 12], параметры течения слабо зависят от координаты z_1, т. е. движение в основном происходит в плоскости (x_1, y_1). Поэтому дифференцирование по z_1 не увеличивает порядки параметров и для возмущений можно полагать

$$
f'(x_1, y_1, z_1, t)=f_1'(x_1, y_1, t)+z_1f_2'(x_1, y_1, t) \tag{1.11}
$$

Между невозмущенной (линейной) скоростью a_0 и скоростью звука a_1 на каустике существует связь [4, 8]

$$
a_0=a_1-a_1K_2y_1, \quad K_2=1/R_2 \tag{1.12}
$$

где K_2 — проекция вектора кривизны луча на нормаль к каустике.

В дальнейшем штрихи над всеми возмущенными величинами опускаются и при выводе приближенных уравнений во всех получающихся соотношениях будут удержаны лишь главные члены.

2. Квазиравновесный процесс. За независимые термодинамические переменные принимаются p, ρ, Q. Аналогично [1] для давления p можно написать

$$
\frac{dp}{dt}-a_e^2\frac{d\rho}{dt}=\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\rho,Q}\frac{dS}{dt}+\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,S}\frac{dQ}{dt}, \qquad a_e=\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{Q,S}^{1/2}
$$

где a_e — равновесная скорость звука. Комбинируя данное соотношение с уравнениями (1.1), (1.3), можно получить

$$
\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}+\rho a_e^2\operatorname{div}\mathbf{V}=L_{1e}+L_{2e} \tag{2.1}
$$

$$
L_{1e}=\frac{1}{\rho T}\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\rho,Q}(k\Delta T+\sigma\nabla\mathbf{V})
$$

$$
L_{2e}=\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,S}\frac{dQ}{dt}-\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\rho,Q}\frac{Q}{T}\frac{dq}{dt}
$$

Приращение температуры представим в виде:

$$dT=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_{\rho,Q}\left[dp-\frac{1}{\varkappa_e}a_e^2\,d\rho-\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,T}dQ\right],\qquad \varkappa_e=\frac{C_p^\circ}{C_V^\circ} \tag{2.2}$$

где C_p° — удельная теплоемкость при постоянном давлении и сродстве, C_V° — удельная теплоемкость при постоянном объеме и сродстве.

Пусть $a_0=a_{e0}$, т. е. слабая ударная волна с узкой возмущенной зоной движется с равновесной скоростью звука в покоящейся смеси. Примем

$$a_e=a_{e0}+\varepsilon a_e' \tag{2.3}$$

Преобразуя посредством (1.5), (1.7)–(1.12) уравнения (1.1) и (1.2), записанные в проекции на ось Ox, учитывая соотношения (1.12) и (2.3), а также свойство ортонормированности косинусов, получим

$$\rho=p/a_{e1}^2=\rho_0 u_1/a_{e1} \tag{2.4}$$

Аналогичные преобразования над уравнением (1.2), записанным в проекции на ось Oy, и учет второго равенства из (2.4) дают

$$\partial u_1/\partial y_1=\partial v_1/\partial x_1 \tag{2.5}$$

т. е. в окрестности пересечения ударной волны с каустикой движение смеси потенциальное. Преобразуя уравнения (1.3) и (1.2), записанные в проекции на ось Oz, и удерживая главные члены, соответственно имеем

$$S=0,\quad \partial p/\partial z_1=0 \tag{2.6}$$

или, сравнивая второе соотношение с (2.4) и (2.5), приходим к выводу, что в рассматриваемом приближении движение действительно происходит в плоскости (x_1, y_1).

Если разложить $p=p(\rho, Q, S)$ в ряд Тейлора вблизи положения равновесия и учесть (1.10), то получим

$$p=a_{e0}^2\rho+\left(\frac{\partial p}{\partial Q}\right)_{\rho,S}Q+\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\rho,Q}S$$

Имея в виду (1.12) и сравнивая полученное соотношение с (2.4), получим

$$Q=0,\quad S=0 \tag{2.7}$$

т. е. в принятом приближении сжатие газа происходит обратимо при постоянном сродстве химической реакции.

Преобразование посредством (1.5), (1.7)–(1.12) уравнения (1.4) в основном порядке даст

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}=\varepsilon^{3/2}\frac{H_{10}}{\tau a_{e1}}Q \tag{2.8}$$

Из (2.7) видно, что возмущенные энтропия и сродство — малые, более высокого порядка, чем остальные возмущенные параметры. Более точная оценка показывает, что $S\sim\varepsilon^{3/2}$, $Q\sim\varepsilon^{3/2}$. Тогда из (2.8) следует, что $\tau\sim\varepsilon^3$. Если ввести характерную длину $L\sim\varepsilon$ в области коротких волн, означающую, например, ширину прифронтовой зоны, то последнее условие означает, что время протекания химической реакции τ много меньше макроскопического времени L/a_{e1}, представляющего собой время пробега частицы смеси в области коротких волн.

Линеаризуя посредством (1.10) соотношение (2.2) и имея в виду (2.4) и (2.7), получим

$$dT=\left(\frac{qT}{\partial p_0}\right)_{\rho,Q}\left(1-\frac{1}{\varkappa_e}\right)\rho_0 a_{e1}\,du_1 \tag{2.9}$$

При разложении $a_e=a_e(\rho, Q, S)$ в ряд Тейлора вблизи положения термодинамического равновесия с учетом (2.7) находим

$$a_e=(\alpha_e^0-1)u_1,\qquad \alpha_e^0=\frac{1}{a_{e0}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_0}(\rho a_e)\right]_{Q,S} \tag{2.10}$$

Преобразуя посредством (1.5), (1.7)—(1.11) уравнение (2.1), учитывая соотношения (2.4)—(2.10) и затем переходя к переменным без штрихов, получим в порядке ε

$$2\frac{\partial u_2}{\partial t}+2\left[\left(\frac{y_1}{R_1}-\frac{y_1}{R_2}\right)a_{e1}+\frac{\alpha_e^0}{\sqrt{\rho_0 a_{e1}}}u_2\right]\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+a_{e1}\frac{\partial v_2}{\partial y_1}=$$
$$=\left[\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{4}{3}\lambda_1+\lambda_2\right)+\frac{k}{\rho_0 T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial S_0}\right)_{\rho,Q}\left(1-\frac{1}{\varkappa_e}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\tau}{H_{10}}\left(\frac{\partial p}{\partial Q_0}\right)_{\rho,S}\left(\frac{\partial q}{\partial\rho_0}\right)_{Q,S}\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \tag{2.11}$$
$$u_2=\sqrt{\rho_0 a_{e1}}\,u_1,\qquad v_2=\sqrt{\rho_0 a_{e1}}\,v_1$$

Уравнение (2.11) совместно с (2.5) описывает течение смеси газа в окрестности каустики. Видно, что учет влияния химической реакции приводит к увеличению величины диссипативного коэффициента. Действительно

$$\left(\frac{\partial p}{\partial Q_0}\right)_{\rho,S}\left(\frac{\partial q}{\partial\rho_0}\right)_{Q,S}=-\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{\rho,S}(a_{f0}^2-a_{e0}^2),\qquad a_{f0}=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho_0}\right)_{q,S}^{1/2} \tag{2.12}$$

a_{f0} — замороженная скорость звука в состоянии равновесия. Можно показать [11], что $a_{f0}>a_{e0}$, поэтому соотношение (2.12) существенно отрицательно. С учетом вышесказанного выражение в квадратной скобке справа в (2.11) обозначим через δ и введем потенциал скорости $\varphi(x_1, y_1, t)$. Тогда уравнение (2.11) запишется в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial t}+\left(\frac{y_1}{R}a_{e1}+\frac{\alpha_e^0}{\sqrt{\rho_0 a_{e1}}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{a_{e1}}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}=0 \tag{2.13}$$

где $1/R=1/R_1-1/R_2$ — разность между кривизной нормального сечения каустики в направлении луча и проекцией вектора кривизны луча на нормаль к каустике в точке соприкосновения.

а) Пусть нелинейный и диссипативный эффекты пренебрежимо малы по сравнению с линейным. Тогда в уравнении (2.13) следует отбросить второе слагаемое в скобке и полагать $\delta=0$. Такому же уравнению в основном порядке будет удовлетворять и давление p, причем компоненты нормальной и касательной составляющих скорости к фронту слабой ударной волны равны

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{\rho_0 a_{e1}}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}=\frac{p}{\rho_0 a_{e1}}\qquad v_1=\frac{1}{\sqrt{\rho_0 a_{e1}}}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}$$

Решение линейной задачи в случае неоднородной среды получено в [2], где для давления p на скачкообразной падающей волне найдено

$$(2.14)\qquad \frac{p}{A_1}(-y_1)^{1/4}=\begin{cases} P_{-1/6}\left(\dfrac{x_1}{\alpha_1}\right) & (x_1>\alpha_1)\\ 2P_{-1/6}\left(\dfrac{x_1}{\alpha_1}\right) & (-\alpha_1<x_1<\alpha_1)\\ \sqrt{3}P_{-1/6}\left(-\dfrac{x_1}{\alpha_1}\right)+\dfrac{2}{\pi}Q_{-1/6}\left(-\dfrac{x_1}{\alpha_1}\right) & (x_1<-\alpha_1)\end{cases}$$

Здесь $P_{-1/6}$, $Q_{-1/6}$ — функции Лежандра, $p_*=A_1(-y_1)^{-1/4}$ — лучевое решение вдали от каустики, $\alpha_1={}^2/_3(2/R)^{1/2}(-y_1)^{3/2}$.

б) Пусть в уравнении (2.13) пренебрежимо мал только нелинейный член, т. е. второе слагаемое в скобке в (2.13) можно отбросить. Тогда, применяя к получаемому линейному уравнению двустороннее преобразование Лапласа по x_1, решение для неоднородной диссипативной среды вблизи каустики можно получить в виде

$$(2.15)\qquad \varphi=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x_1-\xi,y_1,t)\frac{1}{\sqrt{2\pi\delta_1}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\delta_1}\right)d\xi,\qquad \delta_1=\int_0^t\delta\,dt$$

где $\varphi_1(x_1,y_1,t)$ — решение линейной недиссипативной задачи, получаемое из (2.14). Легко видеть, что решение (2.15) переходит вдали от каустической поверхности в линейное решение для идеальной жидкости.

Отметим, что линейное диссипативное решение вблизи каустики можно получить также методом эталонных решений [3, 4], однако вычисления показывают, что примененный нами метод коротких волн более эффективный.

Заметим также, что для неоднородной движущейся среды лучевое решение имеет вид [13, 14]

$$u=\Phi=\text{const}\left(\rho_0u_n^2\frac{1}{a_0}\Sigma\right)^{-1/2}$$

где $u_n=a_0+V_n$ — нормальная составляющая скорости волны, Σ — площадь фронта волны внутри выбранной лучевой трубки.

Для $V_n=0$, т. е. для уравнения (2.13), имеет место

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ln\Sigma)=a_0K$$

где K — полная кривизна фронта волны. Тогда видно, что уравнения (2.11) и (2.13) из всего лучевого решения содержат лишь множитель $(\rho_0a_{e1})^{-1/2}$, т. е. первое слагаемое в скобке в указанных уравнениях как бы заменяет выражение [13]

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t}(\ln\sqrt{\Sigma})$$

В более общем случае для первоначально движущейся со скоростью $\mathbf{V}$ жидкости, обозначая значения $\mathbf{V}$ в точке O_1 через $\mathbf{V}_0(t)$, записывая систему (1.1)—(1.4) в системе координат (x_1,y_1,z_1), движущейся со скоростью $\mathbf{V}_0$, и повторяя предыдущие выкладки, можно показать, что снова имеет место уравнение (2.13), только

$$u_1=\Phi\sqrt{\Sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\qquad K=\frac{\partial}{u_n\,\partial\tau_*}\ln\Sigma$$

где τ_* — время пробега волны до данной точки.

Для давления p также имеет место свертка (2.15), где за $p_1(x_1, y_1, t)$ следует принять решение (2.14). Таким образом,

(2.16)
$$\frac{p}{A_1}(-y_1)^{1/4}(2\pi\delta_1)^{1/2}=\int_{-\infty}^{x_1-\alpha_1} P_{-1/6}\left(\frac{x_1-\xi}{\alpha_1}\right)\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\delta_1}\right)d\xi+$$
$$+2\int_{x_1-\alpha_1}^{x_1+\alpha_1} P_{-1/6}\left(\frac{x_1-\xi}{\alpha_1}\right)\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\delta_1}\right)d\xi+$$
$$+\int_{x_1+\alpha_1}^{0}\left[\sqrt{3}P_{-1/6}\left(-\frac{\xi-x_1}{\alpha_1}\right)+\frac{2}{\pi}Q_{-1/6}\left(-\frac{\xi-x_1}{\alpha_1}\right)\right]\exp\left(-\frac{\xi^2}{2\delta_1}\right)d\xi$$

Для определения значения p при $y_1<0$ необходимо разложить $P_{-1/6}(z)$ и $Q_{-1/6}(z)$ в ряды по степеням $1/z$ и вычислить квадратуры в (2.16). Не выписывая громоздкого решения в окрестности каустики ($y_1<0$), напишем окончательное решение на самой каустике ($y_1=\alpha_1=0$):

(2.17)
$$p=A_1(R\delta_1)^{-1/12}\cdot 0.5319\exp\left(-\frac{x_1^2}{4\delta_1}\right)\left[D_{-5/6}\left(-\frac{x_1}{\sqrt{\delta_1}}\right)+\sqrt{3}D_{-5/6}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\delta_1}}\right)\right]$$

где $D_{-5/6}(z)$ — функции параболического цилиндра.

В точке O_1 ($x_1=y_1=0$) полученное решение еще более упростится и запишется в виде $p=1.82A_1(R\delta_1)^{-1/12}$. Решение для чисто линейной задачи на самой каустике ($y_1=0$) и в точке O_1 ($x_1=y_1=0$) имеет особенность. Из полученных решений видно, что, хотя учет диссипативных эффектов и устраняет особенность, наличие каустики понижает порядок малости решения по сравнению с решением вдали от нее, причем учет химической реакции приводит к уменьшению фокусирования, так как при этом δ_1 увеличивается.

Изучая асимптотику решения (2.17), можно получить, что на каустике для $|x_1|\gg 1$ решение затухает по закону $|x_1|^{-1/4}$, т. е. как и в решении для идеальной задачи. Численные расчеты показывают, что влияние химической реакции наиболее существенно сказывается в окрестности точки O_1— начала подвижной системы координат, или, что то же самое, в точке пересечения падающей ступенчатой волны с каустической поверхностью.

3. Квазизамороженный процесс. Примем за независимые термодинамические переменные давление p, плотность ρ и полноту химической реакции q. Аналогично выводу (2.1) можно получить

(3.1)
$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}+\rho a_f^2\operatorname{div}V=L_{1f}+L_{2f}$$
$$a_f=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{q,S}^{1/2},\quad L_{1f}=\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\rho,q}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_{\rho,Q}L_{1e}$$
$$L_{2f}=\left[\left(\frac{\partial p}{\partial q}\right)_{\rho,S}-\frac{Q}{T}\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_{\rho,q}\right]\frac{dq}{dt}$$

Предположим, что $a_0=a_{f0}$, т. е. слабая ударная волна распространяется с замороженной скоростью звука в покоящейся среде. Примем $a_f=a_{f0}+\varepsilon a_f'$, причем связь между a_{f0} и замороженной скоростью звука на каустике a_{f1} задается в виде (1.12).

Подобно п. 2 можно получить соотношение (2.4)–(2.6) и (2.8) с заменой a_{e1} на a_{f1}, а также условие потенциальности течения в окрестности каустики. Можно показать, что $S=q=0$, т. е. возмущенные энтропия и полнота химической реакции являются величинами более высокого порядка малости, чем остальные возмущенные параметры ($S\sim q\sim\varepsilon^{1/2}$), откуда следует, что в рассматриваемом приближении сжатие газа происходит обратимо при постоянной полноте химической реакции. Тогда из (2.8) следует, что $\tau\sim\varepsilon^\circ=1$, т. е. время протекания химической реакции много больше макроскопического времени L/a_{f0}.

В принятом приближении [1]

$$Q=\left(\frac{\partial Q}{\partial\rho_0}\right)_{q,s}\frac{\rho_0}{a_{f1}}u_1,\qquad a_f=(\alpha_f{}^\circ-1)u_1,\qquad \alpha_f{}^\circ=\frac{1}{a_{f0}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho_0}(\rho a_f)\right]_{q,s}\tag{3.2}$$

Имея в виду соотношения (2.4) и (3.2), применяя преобразования (1.5), (1.7)–(1.11) к уравнению (3.1) и переходя к новым функциям $u_1{}^*=\sqrt{\rho_0a_{f1}}e^{1/2\gamma t}u_1$, $v_1{}^*=\sqrt{\rho_0a_{f1}}e^{1/2\gamma t}v_1$, $V^*=\{u_1{}^*,\ v_1{}^*\}$ приведем (3.1) в порядке ε к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+\left(\frac{y_1}{R}a_{f1}+\frac{\alpha_1{}^\circ}{\sqrt{\rho_0a_{f1}}}e^{-1/2\gamma t}u_1{}^*\right)\frac{\partial u_1{}^*}{\partial x_1}+\frac{a_{f1}}{2}\frac{\partial v_1{}^*}{\partial y_1}=\frac{\delta_2}{2}\frac{\partial^2u_1{}^*}{\partial x_1{}^2}\tag{3.3}$$

$$\gamma=\frac{H_{10}}{\tau}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)_{\rho,s}\left(1-\frac{a_{e1}{}^2}{a_{f1}{}^2}\right),$$

$$\delta_2=\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{4}{3}\lambda_1+\lambda_2\right)+\frac{k}{\rho_0T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial S_0}\right)_{\rho,q}\left(1-\frac{1}{\varkappa_f}\right)$$

Уравнение (3.3) совместно с условием потенциальности течения (2.5) описывает течение газовой смеси в окрестности каустики. Если обозначить $V^*=\nabla\varphi^*$, то получаемое уравнение относительно φ^* без учета нелинейного члена совпадает с (2.13) с заменой a_{e1} на a_{f1} и δ на δ_2. Поэтому решение вида (2.17) на самой каустике применимо и в рассматриваемом процессе. Напомним, что φ^* связано с φ в (2.13) соотношением

$$\varphi^*(x_1,\ y_1,\ t)=e^{-1/2\gamma t}\varphi(x_1,\ y_1,\ t)$$

т. е. скорость частиц смеси при квазизамороженном процессе распространения возмущений убывает с течением времени по экспоненциальному закону по сравнению с квазиравновесным процессом.

4. Среды, в которых скорости звука близки. Аналогично [1, 11] можно найти связь между равновесной и замороженной скоростями звука

$$a_f{}^2-a_e{}^2=\frac{1}{\rho^2}\frac{e_{12}{}^2}{e_{11}}\geqslant0,\qquad e_{12}=\left(\frac{\partial^2e}{\partial V\,\partial q}\right)_S,\qquad e_{11}=\left(\frac{\partial^2e}{\partial q^2}\right)_{V,S}$$

Знак неравенства исходит из условия термодинамической устойчивости системы. Видно, что a_e может достичь значения a_f только при $e_{12}=0$.

Предположим, что значения скоростей a_e и a_f в покоящейся среде, представляющей собой состояние полного термодинамического равновесия, близки. Тогда величина $e_{12}=e_{120}$ в покоящейся смеси мала. Положим $e_{120}=\varepsilon_ae_{120}'$. Здесь и далее параметры в покоящейся смеси обозначены, как и прежде, нулевыми индексами, ε_a – новый малый параметр порядка $\varepsilon^{1/2}$. При квазиравновесном и квазизамороженном процессах распространения возмущений время протекания химической реакции τ имело соответственно порядки ε^3 и 1. Если же рассматривать процесс, в котором $\tau\sim\varepsilon^{3/2}$, то необходимо в (1.10) сделать замену $q'\to\varepsilon_aq'$, $Q'\to\varepsilon_aQ'$.

Как и в пп. 2, 3, при упрощении уравнений будут удержаны лишь главные члены. Так как невозмущенная скорость a_0 не совпадает со скоростями a_{e0} и a_{f0}, значения которых близки, то положим

$$a_0 - a_{f0} = \varepsilon_a^2 a_0 \sigma_{f1}, \qquad a_0 - a_{e0} = \varepsilon_a^2 a_0 \sigma_{e1} \tag{4.1}$$

Разлагая $p=p(\rho, q, S)$ и $p=p(\rho, Q, S)$ в ряд Тейлора в порядке $\varepsilon_a^2\varepsilon$, получаем соотношения, комбинация которых с (4.1) дает

$$\sigma_{e1} = \sigma_{f1} + \frac{e_{120}^2}{2\rho_0 a_0^2 e_{110}}$$

Как и прежде, снова выполняются соотношения коротких волн (2.4) с заменой a_{e1} на a_1. В принятом приближении $Q=(e_{110}q-\rho_0^{-2}e_{120}\rho)$. Комбинируя полученное соотношение с (2.8) и (2.4), находим

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{H_{10}}{\tau}\left(\frac{e_{110}}{a_0} q - \frac{e_{120}}{\rho_0 a_0^2} u_1\right) \tag{4.2}$$

Преобразуя посредством (1.5), (1.7)–(1.11) и учитывая соотношения (1.12), (2.4), уравнение (3.1) в порядке ε приведем к виду

$$2\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial}{\partial t}\ln(\rho_0 a_1) + 2\left(\frac{y_1}{R}a_1 - \varepsilon_a^2 a_1\sigma_{f1} + \alpha_f^\circ u_1\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + a_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1} =$$
$$= \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{4}{3}\lambda_1+\lambda_2\right)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{k}{T_0\rho_0^2 a_1}\left(\frac{\partial p}{\partial S_0}\right)_{\rho,q}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \varepsilon_a\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial q_0}\right)_{\rho,S}\frac{\partial q}{\partial x_1} \tag{4.3}$$

Аналогичное упрощение уравнения (2.1) приводит его к виду, который, как легко показать [10], совпадает с (4.3).

Запишем уравнение (4.3) через возмущение скорости u_1 и с помощью (4.2) исключим из получаемого уравнения параметр q'. Далее, переходя от u_1, v_1 к новым функциям u_2, v_2, аналогичным п. 2, и вводя согласно (2.5) потенциал скорости $\varphi(x_1, y_1, t)$, получим относительно φ уравнение, описывающее течение газовой смеси в окрестности каустики для случая специальных сред:

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t} + 2\left(\frac{y_1}{R}a_1 - \varepsilon_a^2 a_1\sigma_{e1} + \frac{\alpha_f^\circ}{\sqrt{\rho_0 a_1}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + a_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} -$$
$$-(\beta+\delta_2)\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3} + l\delta_2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x_1^4} = l\frac{\partial}{\partial x_1}\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t} + \right. \tag{4.4}$$
$$\left. + 2\left(\frac{y_1}{R}a_1 - \varepsilon_a^2 a_1\sigma_{e1} + \frac{\alpha_f^\circ}{\sqrt{\rho_0 a_1}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + a_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}\right]$$
$$l = \frac{\tau a_1}{H_{10}e_{110}} = \frac{\tau}{H_{10}}\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{\rho,S} a_1, \qquad \beta = \frac{\tau e_{120}^2}{H_{10}\rho_0^2 e_{110}^2} = \frac{\tau}{H_{10}}\left(\frac{\partial q}{\partial Q_0}\right)_{\rho,S}(a_{f1}^2 - a_{e1}^2)$$

Здесь коэффициент δ_2 тот же, что и в п. 3. Аналогично [1] можно показать, что в предельных случаях (4.4) переходит в уравнения (2.13) и (3.3).

Пусть нелинейный член пренебрежимо мал по сравнению с остальными. В этом случае, применяя к получаемому из (4.4) линейному уравнению преобразование Фурье по x_1, находим

$$\varphi = \varphi_1 \exp\left[f(\omega)t\right]$$
$$f(\omega) = i\omega\varepsilon_a^2 a_1\sigma_{e1} - \frac{(\beta+\delta_2)\omega^2 - i\omega^3 l\delta_2}{2(1-i\omega l)} \tag{4.5}$$

где ω – параметр преобразования Фурье, φ_1 – решение чисто линейного уравнения.

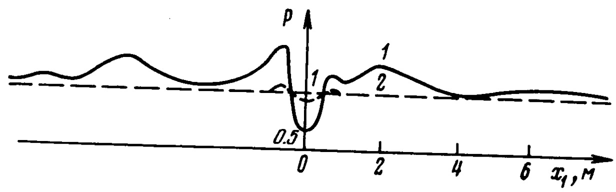
Применяя обратное преобразование Фурье к (4.5), находим

$$\varphi(x_1, y_1, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(\omega, y_1, t)e^{f(\omega)t}e^{i\omega x_1}d\omega \tag{4.6}$$

Для давления p также имеет место формула (4.6), в которой за p_1 следует брать функцию [2, 5]

$$p_1 = 2A_1 \frac{(\pm i\omega)^{1/6}}{-i\omega} \left(\frac{2}{R}\right)^{1/12} e^{\mp {}^1\!/_4 i\pi} \operatorname{Ai}(\eta)$$

где верхний знак соответствует положительным ω, $\operatorname{Ai}(\eta)$ – функция Эйри, $\eta = (2/R)^{1/3}(\omega/a_1)^{2/3}(-y_1)$.



Фиг. 2

Найдем распределение давления на самой каустике ($y_1=0$). Подставляя значение p_1 в (4.6) и преобразуя контурные интегралы, получим

$$p = B \int\limits_0^\infty e^{-\psi(\omega^2)t} \omega^{-5/6} \cos\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right) d\omega$$

$$\xi = (x_1 + \varepsilon_a{}^2 a_1 \sigma_{e1} t)\,\omega - \frac{\beta l t}{2(1+l^2\omega^2)}\,\omega^3 \tag{4.7}$$

$$B = \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}} A_1 \left(\frac{2}{R}\right)^{1/12} \left(\frac{1}{3}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\psi(\omega^2) = \frac{(\beta+\delta_2)\,\omega^2 + l^2\delta_2\omega^4}{2(1+l^2\omega^2)}$$

Легко показать, что полученное решение в пределе переходит в (2.17). Решение (4.7) было численно проинтегрировано при следующих значениях параметров: $t=1$ *сек*, $\beta=\delta_2=10^{-5}$, $l=10^{-3}$, $a_1=220$. На фиг. 2 линией *1* показаны изменения отношения $p=p/p_*$ в зависимости от расстояния x_1 на каустике. Линией *2* представлен график p/p_*, где p вычислено уже по формуле (2.17), а p_* – давление, вычисленное без учета химической реакции. Видно, что учет дисперсионных эффектов существенно меняет картину распределения давления на каустической поверхности.

Институт механики АН АрмССР

Поступила 20 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
2. *Газарян Ю. Л.* О распространении звука в неоднородных средах. В сб. «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн», № 5, Л., ЛГУ, 1961.
3. *Кравцов Ю. А.* Об одной модификации метода геометрической оптики. Изв. вузов, Радиофизика, 1964, т. 7, № 4.
4. *Ludwig D.* Uniform asymptotic expansions at a caustic. Communs on Pure and Appl. Math., 1966, vol. 19, No. 2.
5. *Бабич В. М.* Аналитический характер поля нестационарной волны в окрестности каустики. В сб. «Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн», № 5, Л., ЛГУ, 1961.
6. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Определение параметров газа вблизи каустики. Докл. АН АрмССР, 1969, т. 49, № 2.
7. *Guiraud J. P.* Le acoustique géométrique et la focalisation. Comptes Rendus Acad. Sci., 1965, vol. 260, No. 6.
8. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1967.

9. *Багдоев А. Г.* Определение нелинейного решения вблизи каустики. 3-й Всес. съезд по теор. и прикл. механ., 1968 (Аннот. докл.) М., 1968.
10. *Hayes W. D.* Similarity rules for nonlinear acoustic propagation through a caustic. Second Conf. on Sonic Boom Res., Washington, 1968, Washington, NASA, 1968.
11. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М., «Мир», 1964.
12. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
13. *Рыжов О. С., Шефтер Г. М.* Об энергии звуковых волн, распространяющихся в движущихся средах. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
14. *Bretherton F. P., Garret C. R.* Wavetrains in inhomogenous moving media. Proc. Roy. Soc., 1968, A 302.