

ТРАНСЗВУКОВОЕ ЗАКРУЧЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ГАЗА ЧЕРЕЗ СОПЛО

В. Б. ГОРСКИЙ

(Горький)

Газовые течения с закруткой широко применяются в различных технических устройствах, таких как вихревые трубы, гидроциклоны, сопла реактивных двигателей и т. д. Они имеют сложную пространственную структуру, и их аналитическое исследование в полном объеме затруднительно. Вместе с тем, поскольку в качестве одного из видов закрутки часто используется потенциальный вихрь, полезно рассмотреть чисто безвихревое закрученное течение в канале.

Теоретические работы по потенциальным газовым потокам с закруткой в основном проводились либо в квазиодномерной постановке, либо численно. Среди работ [1-4] с квазиодномерным подходом выделяется [4], в которой исследовалось радиально-уравновешенное движение газа в канале при наложении произвольной закрутки, причем интенсивность и вид закрутки характеризовались интегральным параметром, включавшим в себя потенциальный вихрь как частный случай. Важное значение имеет также статья [2], в которой для безвихревого закрученного течения газа через сопло впервые было показано существование вакуумного ядра. Выяснению влияния закрутки закрученного потока в канале на форму вакуумного ядра посвящена работа [3], а в [4] проведено аналитическое и экспериментальное исследование безвихревого закрученного течения через кольцевое сопло.

В работах [5-7] использовались численные методы, решались точные уравнения движения и учитывался пространственный характер течения. Так, в [5] строился оптимальный контур осесимметричного сопла при заданной длине его сверхзвуковой части. В [6] решена прямая задача расчета произвольно закрученного потока через сопло, построено поле скоростей в канале и приводятся данные о влиянии различной закрутки на расход. В частности, рассматривается закрутка, большая часть которой потенциальна. Наконец, в [7] в рамках обратной задачи представлены результаты расчетов осесимметричных безвихревых потоков в кольцевых соплах сложной формы.

Лишь в [8] осесимметричное течение в канале исследуется аналитически. Основным в ней является асимптотический метод нахождения решения в виде ряда, первый член которого представляет собой одномерный закрученный поток.

В настоящей работе аналитически изучается закрученное течение газа в трансзвуковой части сопла, во многом определяющей характер всего потока. Течение предполагается безвихревым, установившимся, осесимметричным, а газ — невязким и нетеплопроводным. Получено уравнение трансзвуковых потенциальных газовых потоков с закруткой, обобщающее известное околосзвуковое уравнение Кармана — Фальковича — Гудерля [9], и его решение, описывающее непрерывное течение через сопло. Результаты сравниваются с известными численными и экспериментальными данными.

1. Основные уравнения. Для установившегося осесимметричного закрученного течения идеального газа уравнения неразрывности и Эйлера в цилиндрической системе координат x, y, θ имеют вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} (y\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (y\rho v_y) = 0$$

$$(1.2) \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\rho \partial x}, \quad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{v_\theta^2}{y} = -\frac{\partial p}{\rho \partial y}$$

$$(1.3) \quad v_x \frac{\partial}{\partial x} (y v_\theta) + v_y \frac{\partial}{\partial y} (y v_\theta) = 0$$

Здесь v_x, v_y, v_0 — проекции скорости q газа на оси координат, ось x выбрана вдоль оси симметрии потока, y — расстояние от этой оси; p, ρ — давление и плотность газа.

С помощью (1.2), (1.3) уравнение неразрывности (1.1) приводится к виду

$$(1.4) \quad (a^2 - v_x^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_x v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + (a^2 - v_y^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} + (a^2 + v_0^2) \frac{v_y}{y} = 0$$

где a — скорость звука.

Ограничимся в дальнейшем изучением безвихревых изэнтропических течений. Известно, что такие течения являются также и изэнергетическими. Следовательно, интегралы изэнтропичности и энергии выполняются здесь для всего потока

$$(1.5) \quad \rho \rho^{-k} = \text{const}, \quad 2^{-1} q^2 + (k-1)^{-1} a^2 = \text{const}$$

где k — показатель адиабаты.

Запишем далее условия отсутствия завихренности потока

$$(1.6) \quad \partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y = 0, \quad v_0 = c a y^{-1}$$

Здесь a — критическая скорость звука, c — произвольная постоянная, характеризующая закрутку потока.

Уравнения (1.4)–(1.6) образуют замкнутую систему, описывающую рассматриваемые течения. Их можно свести к одному уравнению для потенциала Φ скорости или функции тока Ψ . Так, из (1.6) следует, что $v_x = -\partial \Phi / \partial x$, $v_y = \partial \Phi / \partial y$. Подставляя эти равенства в (1.4) и используя (1.5), получим уравнение для Φ

$$(1.7) \quad \Phi_x^2 \Phi_{xx} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_y^2 \Phi_{yy} = M_m^{-2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) [\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + (1 + M_0^2) y^{-1} \Phi_y]$$

где $M_m = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} a^{-1}$ — меридиональное число Маха, $M_0 = v_0 a^{-1}$.

С другой стороны, из (1.1) находим, что $y \rho v_y = -\partial \Psi / \partial x$, $y \rho v_x = \partial \Psi / \partial y$. Внося это выражение в (1.6), получим с помощью (1.5) уравнение для Ψ

$$(1.8) \quad \Psi_x^2 \Psi_{xx} + 2\Psi_x \Psi_y \Psi_{xy} + \Psi_y^2 \Psi_{yy} = M_m^{-2} (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) [(M_m^2 - 1) (\Psi_{xx} + \Psi_{yy}) + (M_0^2 + 1) y^{-1} \Psi_y].$$

Нетрудно видеть, что дифференциальные уравнения в частных производных (1.7), (1.8) принадлежат к смешанному типу, причем конкретный их тип зависит от полного числа Маха M , а от меридионального M_m . При $M_m < 1$ эти уравнения принадлежат к эллиптическому, а при $M_m > 1$ — к гиперболическому типу. Уравнения линейного приближения для последних случаев $M_m \leq 1$ не отличаются от соответствующих уравнений дозвуковых течений без закрутки.

2. Уравнения трансзвукового приближения. Найдем приближенные уравнения движения с закруткой для трансзвукового диапазона скорости $M_m \rightarrow 1$. Для этого применим нелинейный метод малых возмущений, считая, что на однородный звуковой поток ($q = a_*$), текущий вдоль оси x , накладывается малое возмущение, так что

$$(2.1) \quad v_x = a_* (1 + u), \quad v_y = a_* v, \quad v_0 = c a_* y^{-1}$$

где $u, v, c y^{-1}$ — малые безразмерные компоненты скорости возмущения. При этом, поскольку рассматривается безвихревой пространственный поток, для которого в околосзвуковом приближении оценки для компонент скорости и координат известны [9], воспользуемся этими оценками в нашем исследовании

$$(2.2) \quad u = O(\varepsilon), \quad v = O(\varepsilon^{3/2}), \quad x = O(1), \quad y = O(\varepsilon^{-1/2})$$

где ε — малый параметр.

Подставляя (2.1) в (1.4), (1.6) и учитывая (1.5), (2.2), находим в первом приближении систему уравнений трансзвуковых течений для компонент скорости

$$(2.3) \quad - \left[\frac{k-1}{2} \frac{c^2}{y^2} + (k+1)u \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Как и точные уравнения движения, систему (2.3) можно привести к одному уравнению для потенциала ϕ или функции тока ψ скорости возмущения. Действительно, полагая

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = - \frac{1}{2} \left(\frac{k-1}{k+1} \right) \frac{c^2}{y^2} + \left[\frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{y \partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \left(\frac{c}{y} \right)^4 \right]^{1/2},$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{y \partial x}$$

из (2.3) получаем

$$(2.4) \quad - \left[\frac{k-1}{2} \frac{c^2}{y^2} + (k+1) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi}{y \partial y} = 0$$

$$(2.5) \quad \left[\frac{2}{k+1} \frac{\partial \psi}{y \partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \left(\frac{c}{y} \right)^4 \right]^{1/2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{k-1}{k+1} \frac{c^2}{y^2} \right) -$$

$$- \frac{1}{k+1} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi}{y \partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^2 \left(\frac{c}{y} \right)^4 = 0$$

Уравнения (2.4) и (2.5) являются обобщенными (на случай наличия закрутки) уравнениями трансзвуковых течений для потенциала [9] и функции тока [10]. При отсутствии закрутки ($c=0$) (2.4) и (2.5) точно переходят в указанные уравнения.

Заметим, что полученные уравнения (2.3) или эквивалентные им (2.4) и (2.5) качественно описывают наиболее сложную трансзвуковую область закрученного потока. Поэтому нам представляется, что вместо асимптотического метода в [8], сходимостью которого не доказана, достаточно ограничиться предложенным нами простым аналитическим изучением трансзвуковой области потока, которое может служить для проверки эффективных численных методов расчета всего поля течения [6, 7, 11]. Кроме того, в отличие от [8] найденные выше уравнения описывают не только сопловое, но и другие закрученные течения.

3. Поток через сопло. Исключая в системе (2.3) компоненту v , получаем одно уравнение для нахождения u

$$(k+1) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left[\frac{k-1}{2} \frac{c^2}{y^2} + (k+1)u \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{y \partial y} = 0$$

которое имеет простое автомодельное решение, описывающее сопловой поток

$$(3.1) \quad u = 2Ax + (k+1)A^2y^2$$

Из (2.3) затем легко находится и решение для v

$$(3.2) \quad v = 2(k+1)A^2xy + 2^{-1}(k+1)^2A^3y^3 + (k-1)Ac^2y^{-1} \ln y$$

где A — произвольная постоянная, характеризующая градиент скорости $\partial u / \partial x$.

Соответствующие решения уравнений (2.4), (2.5) имеют вид

$$(3.3) \quad \phi = Ax^2 + (k+1)A^2xy^2 + 2^{-3}(k+1)^2A^3y^4 + 2^{-1}(k-1)Ac^2 \ln^2 y$$

$$\psi = 2^{-1}(k+1)A^2y^2[2x^2 + (k+1)Axy^2 + 6^{-1}(k+1)^2A^2y^4] +$$

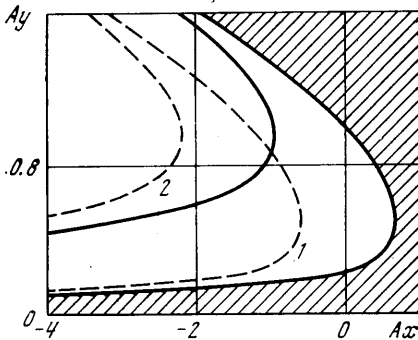
$$+ (k-1)Ac^2[x \ln y + 2^{-2}(k+1)Ay^2]$$

Уравнение звуковой линии ($M=1$) для этого потока в пределах данного приближения будет $u+2^{-1}c^2y^{-2}=0$. С помощью (3.1) представим его в виде

$$(3.4) \quad x = -2^{-1}(k+1)Ay^2 - 2^{-2}c^2A^{-1}y^{-2}$$

а линия перехода $M_m=1$, на которой как точные (1.7), (1.8), так и приближенные (2.4), (2.5) уравнения движения меняют свой тип, имеет форму $u+2^{-1}(k-1)(k+1)^{-1}c^2y^{-2}=0$ или с учетом (3.1) $x = -2^{-1}(k+1)Ay^2 - 2^{-2}(k-1) \times (k+1)^{-1}A^{-1}c^2y^{-2}$.

Существенная особенность данного течения — наличие около оси симметрии сопла вакуумной области, границу которой можно определить следующим образом. Из интеграла Бернулли (1.5)



Фиг. 1

с точностью принятого приближения получаем

$$a^2 = a.^2 [1 - (k-1)(u+2^{-1}c^2y^{-2})]$$

откуда условие вакуума $a=0$ возникает при $u+2^{-1}c^2y^{-2} = (k-1)^{-1}$.

Подставляя сюда значение u из (3.1), находим границу вакуума

$$(3.5) \quad x = -2^{-1}(k+1)Ay^2 - 2^{-2}A^{-1}c^2y^{-2} + [2(k-1)A]^{-1}$$

Линии же тока определяются уравнением $\Psi = 2^{-1}y^2 - \psi = \text{const}$, где выражение для ψ берется из (3.3).

Отметим еще, что в данном безвихревом сопловом потоке осевая компонента скорости u (3.1) не зависит от закрутки. Этот аналитический вывод подтверждается экспериментальными данными (фиг. 4 из [4]) и косвенно, учитывая комбинированный характер закрутки, численными результатами (фиг. 5, а из [6]).

Для иллюстрации решения на фиг. 1 изображены звуковая линия (3.4) (пунктир) и вакуумная граница (3.5) (сплошная линия) при $k=1.4$, $cA=0.5$ (линии 1), причем вакуумная область заштрихована, а чтобы представить влияние закрутки, эти линии показаны еще и при большей закрутке $cA=2$ (линии 2).

Заметим, что звуковые линии имеют асимптотой звуковую линию незакрученного потока $Ax = -1.2(Ay)^2$, а у вакуумных линий асимптотой является парабола $Ax = -1.2(Ay)^2 + 1.25$. Отсюда видно, что с увеличением закрутки звуковая и вакуумная линии сильнее втягиваются внутрь сопла в сторону дозвуковой части и отходят от его оси симметрии. Следует, правда, уточнить, что с изменением закрутки изменяется, хотя и незначительно, форма стенки сопла, так что последние выводы носят качественный характер. Сравнение полученной формы звуковой линии с численными результатами (фиг. 6 из [6]) показывает неплохое соответствие.

Постараемся далее, что особенно важно при вычислении расхода, решить прямую задачу теории сопла, когда его стенки заданы.

4. Решение прямой задачи теории сопла. Рассмотрим прямую задачу для осесимметричного сопла с учетом закрутки потока. Воспользовавшись методикой [12], возьмем стенку сопла в форме либо дуги окружности, либо дуги параболы, либо дуги гиперболы. Уравнение стенки вблизи критического сечения $x=0$ (горла) имеет вид

$$(4.1) \quad y = f(x) = y_* + (2R)^{-1}x^2 + \sigma(2R)^{-3}x^4 + O(R^{-5}x^6)$$

Здесь y_* — радиус горла, R — радиус кривизны стенки в горле, параметр $\sigma=1$ для окружности, $\sigma=0$ для параболы, $\sigma=-1$ для гиперболы.

Выше была выведена система уравнений трансзвукового потенциального закрученного потока (2.3) путем введения возмущения (2.1) и оценки (2.2). Заметим, что для прямой задачи в качестве малого параметра ε берется $\varepsilon=R^{-2/3}$ и считается, что R велико. Кроме того, поскольку $y=O(\varepsilon^{-1/2})=O(R^{1/6})$ и желательно, чтобы исследуемая околосзвуковая область занимала всю высоту y_* сопла, необходимо потребовать условия $y_*=O(R^{1/6})$. Для простоты положим

$$(4.2) \quad y_* = R^{1/6}$$

Найдем граничное условие на стенке сопла. В общем виде имеем

$$(4.3) \quad v_y v_x^{-1} = dy/dx, \quad y = f(x)$$

Далее удобно вместо координаты y , имеющей в трансзвуковой области большой размер, ввести координату $z=O(1)$, а также u_1, v_1

$$(4.4) \quad y = \varepsilon^{-1/2} z, \quad u = \varepsilon u_1, \quad v = \varepsilon^{1/2} v_1$$

Тогда уравнение стенки (4.1) с учетом (4.2) и (4.4) примет вид

$$z = F(x) = 1 + 2^{-1} \varepsilon^2 x^2 + 2^{-3} \sigma \varepsilon^5 x^4 + O(\varepsilon^8 x^6), \quad \varepsilon = R^{-2/3}$$

Подставим в граничное условие (4.3) выражения v_x, v_y (2.1) и введем замену (4.4)

$$\varepsilon^{1/2} v_1 (1 + \varepsilon u_1)^{-1} = (dy/dz) (dz/dx)^{-1}, \quad z = F(x)$$

получим

$$(4.5) \quad v_1[x, F(x)] = \{1 + \varepsilon u_1[x, F(x)]\} (x + 2^{-1} \sigma \varepsilon^3 x^3 + \dots)$$

Разложим теперь функции u_1, v_1 в ряды в окрестности $F(x) = 1$

$$u_1(x, F) = u_1(x, 1) + (F-1) \frac{\partial}{\partial z} u_1(x, 1) + \dots =$$

$$= u_1(x, 1) + (2^{-1} \varepsilon^2 x^2 + \dots) \frac{\partial}{\partial z} u_1(x, 1) + \dots$$

$$v_1(x, F) = v_1(x, 1) + (2^{-1} \varepsilon^2 x^2 + \dots) \frac{\partial}{\partial z} v_1(x, 1) + \dots$$

Подставляя эти разложения в (4.5) и оставляя только главные члены слева и справа, получаем граничное условие в первом приближении

$$(4.6) \quad v_1(x, 1) = x$$

Отметим далее, что уравнения движения (2.3) при введении новых переменных (4.4) сохраняют свой вид

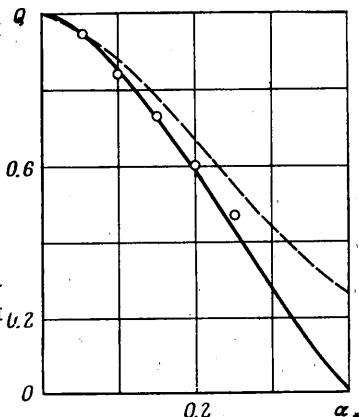
$$-\left[\frac{k-1}{2} \frac{c^2}{z^2} + (k+1) u_1 \right] \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{v_1}{z} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0$$

В качестве решения этой системы возьмем несколько более общее решение, чем (3.1), (3.2)

$$(4.7) \quad \begin{aligned} u_1 &= 2Ax + (k+1)A^2z^2 + B \\ v_1 &= 2(k+1)A^2xz + 2^{-1}(k+1)^2A^3z^3 + \\ &+ (k-1)Ac^2z^{-1} \ln z + (k+1)ABz \end{aligned}$$

где B — произвольная постоянная.

Удовлетворяя условию (4.6), отыскиваем значения $A = [2(k+1)]^{-1/2}$, $B = -1/4$, так что (4.7) с учетом (4.4) дает решение прямой задачи. При этом выводы п. 3 о влиянии закрутки на звуковую и вакуумную линии сохраняются.



Фиг. 2

Подсчитаем теперь расход газа Q в критическом сечении сопла, отнеся его к одномерному расходу $\rho_* a_* y_*^2$. Из интеграла Бернулли (1.5) имеем

$$(4.8) \quad \rho = \rho_* [1 - (k-1)(u + 2^{-1}c^2 y^{-2} + \dots)]^{1/(k-1)}$$

Отсюда в рассматриваемом приближении находится радиус y_{b*} вакуумной зоны в горле, если положить $\rho = 0$, $x = 0$: $y_{b*}^2 = 2^{-1}(k-1)c^2$. Поделив на y_*^2 и вводя параметр закрутки [2] $\alpha_*^2 = 2^{-1}(k-1)\Gamma^2 a_0^{-2} y_*^{-2}$, где $\Gamma = ca_*$ — циркуляция скорости v_θ , a_0 — заторможенная скорость звука, получаем

$$(4.9) \quad \xi_{b*}^2 = 2^{-1}(k+1)\alpha_*^2 \quad (\xi = y y_*^{-1}, \xi_{b*} = y_{b*} y_*^{-1})$$

Эта формула другим путем была получена в [2].

Используя (4.8), (4.9), находим расход

$$Q = 2\rho_*^{-1} a_*^{-1} y_*^{-2} \int_{y_{b*}}^{y_*} (\rho v_x)_{x=0} y dy = 2 \int_{\xi_{b*}}^1 [1 - (k-1)^{-1} \beta \xi^{-2}] \xi d\xi =$$

$$= 1 - \beta [1 - (k-1)^{-1} \ln \beta], \quad \beta = 2^{-1}(k+1)\alpha_*^2$$

На фиг. 2 этот результат для расхода изображен сплошной линией; видно хорошее соответствие экспериментальным точкам [13]. Пунктиром представлен также расход Q , рассчитанный по одномерной теории.

Поступила 28 IX 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Закрученные течения сжимаемого газа в каналах. Изв. АН СССР, ОТН, 1956, № 6.
2. Mager A. Approximate solution of isentropic swirling flow through a nozzle. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 8.
3. Lewellen W. S., Burns W. J., Strickland H. J. Transonic swirling flow. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7.
4. Gillespie T. D., Shearer J. L. The control of thrust and flow rate in choked nozzles by vortex generation. Fluid. Quart., 1972, vol. 4, No. 1.
5. Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. Увеличение тяги сопла вращением потока. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
6. Славянов Н. Н. Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 6.
7. Пирумов У. Г. Обратная задача теории сопла и численное решение внутренних задач газовой динамики. В сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 6. М., Изд. МГУ, 1974.
8. Voerner C. J., Sparrow E. M., Scott C. J. Compressible swirling flow through convergent — divergent nozzles. Wärme, und Stoffübertrag., 1972, Bd 5, Nr 2.
9. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
10. Горский В. Б. Асимптотическое исследование трансзвуковых течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
11. Рычков А. Д. Расчет закрученного течения идеального газа в сопле Лавала. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
12. Hall I. M. Transonic flow in two-dimensional and axially-symmetric nozzles. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1962, vol. 15, No. 4.
13. Parkinson R. C. The effect on the mass-flow of swirl in a supersonic nozzle. Spaceflight, 1967, vol. 9, No. 10.