

**О МАССООБМЕНЕ ЧАСТИЦ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ОСИ ПОТОКА,
ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ПЕКЛЕ**

Ю. П. ГУПАЛО, А. Д. ПОЛЯНИН, Ю. С. РЯЗАНЦЕВ

(Москва)

В работе исследуется задача о диффузионном притоке растворенного в среде вещества к поглощающим это вещество частицам, движущимся одна за другой в вязкой несжимаемой жидкости. Получено приближенное аналитическое выражение для дифференциального и интегрального потоков вещества на поверхность каждой частицы с учетом изменений полей скорости и концентрации, обусловленных присутствием других частиц.

Полученные результаты применены к цепочке сфер, обтекаемых прямолинейным и однородным на бесконечности потоком и расположенных на расстояниях $1 \ll l \ll P^{1/2}$ одна за другой. Показано, что диффузионный поток вещества на первую сферу почти в 2 раза больше, чем на вторую, а для больших порядковых номеров сферы k полный диффузионный поток стремится к нулю обратно пропорционально корню третьей степени из k .

1. Постановка задачи. Рассматривается установившаяся конвективная диффузия растворенного в потоке вещества к поверхностям нескольких осесимметричных частиц, расположенных одна за другой на оси симметрии ламинарного потока вязкой несжимаемой жидкости.

Предполагается, что для каждой частицы может быть введена сферическая система координат, в которой уравнение поверхности $r_k = R_k(\theta_k)$, k — номер частицы — однозначная функция θ_k . При наличии двух лежащих на оси симметрии критических точек полярный угол θ отсчитывается от задней критической точки (точка вытекания). Будет использоваться безразмерная форма записи. В качестве масштабов выбраны величины: a — характерный размер частиц, U , c_0 — характерная скорость и концентрация в набегающем потоке.

Обтекание частиц считается ламинарным без застойных зон; поле скоростей, определяемое функцией тока ψ , предполагается известным из решения соответствующей задачи о гидродинамическом обтекании (например, [1-4]). Для каждой частицы функция тока в области, не захватывающей другие частицы, обладает следующими свойствами:

$$(1.1) \quad \psi(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow R(\theta)} \rightarrow (r - R(\theta))^2 f(\theta), \quad f(\theta) \equiv 1/2 [\partial^2 \psi / \partial r^2]_{r=R(\theta)}$$

$$(1.2) \quad \psi(r, \theta) \Big|_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow A(r) \theta^2, \quad A(\theta) \equiv 1/2 [\partial^2 \psi / \partial \theta^2]_{\theta=0}$$

$$(1.3) \quad \psi(r, \theta) \Big|_{\substack{r \rightarrow R(\theta) \\ \theta \rightarrow 0}} \rightarrow \alpha (r - R^0)^2 \theta^2, \quad R^0 = R(0), \quad \alpha \equiv 1/2 [\partial^4 \psi / \partial r^2 \partial \theta^2]_{\substack{r=R^0 \\ \theta=0}}$$

Здесь и далее, где это не приводит к путанице, индекс k опускается, свойство (1.1) следует из условия прилипания на поверхности частицы, свойство (1.2) — из осесимметрии, свойство (1.3) — следствие (1.1) и (1.2).

Распределение концентрации в потоке определяется решением уравнения конвективной диффузии с граничными условиями постоянства концентрации вдали от частиц и полного поглощения на их поверхностях.

Число Пекле считается большим, что позволяет применить в задаче метод срачиваемых асимптотических разложений. При этом условие для концентрации растворенного вещества в набегающем потоке для каждой частицы зависит от ее относительного положения и устанавливается из решения задачи о диффузии к частицам, расположенным выше по потоку. Поэтому определение диффузионного притока вещества к каждой из частиц должно проводится последовательно, начиная с первой частицы.

Отметим, что при небольших числах Пекле решение задачи о диффузионном притоке вещества к поверхностям двух сферических частиц одинакового радиуса, расположенных на оси прямолинейного и однородного потока на бесконечности (в стоксовом приближении), было получено численными методами в работе [5].

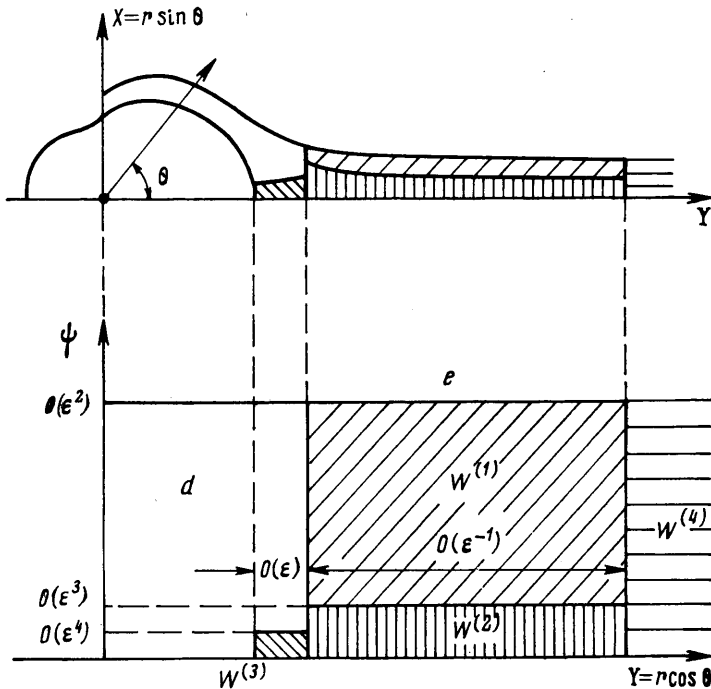
2. **Одиночная частица.** При анализе распределения концентрации около одиночной поглощающей частицы будем следовать работе [6], в которой соответствующее рассмотрение выполнено для случая стока обтекания сферической частицы прямолинейным и однородным на бесконечности потоком. В сферической системе координат, связанной с частицей, уравнение конвективной диффузии и граничные условия имеют вид

$$(2.1) \quad \frac{1}{\sin \theta_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} \frac{\partial c_1}{\partial r_1} - \frac{\partial \psi}{\partial r_1} \frac{\partial c_1}{\partial \theta_1} \right) = \\ = \varepsilon^3 \left[\frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial c_1}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{\sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial c_1}{\partial \theta_1} \right) \right] \\ c_1|_{r_1 \rightarrow \infty} = 1, \quad c_1|_{r_1=R_1(\theta_1)} = 0; \quad \frac{\partial c_1}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=0} = \frac{\partial c_1}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta_1=\pi} = 0 \\ \varepsilon = p^{-1/2}, \quad p = aU/D$$

Асимптотический анализ уравнения (2.1) с учетом (1.1)–(1.3) показывает, что при $\varepsilon \ll 1$ в окрестности частицы в потоке можно выделить несколько областей с различным механизмом массопереноса, которые схематически показаны на фиг. 1. Это — внешняя область e , область передней критической точки b , диффузионный пограничный слой d и область диффузионного следа W_1 , которая в свою очередь состоит из подобластей $W_1^{(1)} - W_1^{(4)}$. В каждой из областей уравнение (2.1) заменяется приближенным путем выделения главных членов разложений по малому параметру ε . Соответствие между решениями в отдельных областях устанавливается асимптотическим срачиванием.

Во внешней области $e = \{ \varepsilon \ll (r_1 - R_1(\theta_1)), \varepsilon \ll \theta_1 \}$, здесь и далее неравенства в фигурных скобках указывают порядок характерных размеров рассматриваемой области, правая часть уравнения (2.1) пренебрежимо мала, роль диффузии в переносе вещества незначительна, концентрация растворенного компонента сохраняет постоянное значение, равное исходному, т. е. $c^{(e)} = 1$.

В области передней критической точки $b = \{ (r_1 - R_1(\theta_1)) \ll \varepsilon, \pi - \theta_1 \ll \varepsilon \}$ уравнение (2.1) может быть несколько упрощено, однако в нем сохраняются члены, описывающие диффузию как в тангенциальном, так и в нормальном направлениях. Анализ показывает, что влияние этой области на распределение концентрации в диффузионном пограничном слое, как и относительный вклад этой области в величину полного диффузионного притока вещества на поверхность частицы, оказываются малыми, так что при расчете интегрального массообмена частицы с потоком с точностью до главного члена разложения по степеням ε ими можно пренебречь.



Фиг. 1

Массообмен в пограничном слое $d_1 = \{(r_1 - R_1(\theta_1)) \ll \varepsilon, \varepsilon \ll \theta_1\}$, состоящий из конвекции вдоль поверхности частицы и диффузии в поперечном направлении, играет определяющую роль в переносе растворенной компоненты к поверхности частицы и рассматривается во многих работах (например, [7-10]). Распределение концентрации в диффузионном пограничном слое имеет вид [9]

$$(2.2) \quad c_1^d(\xi, \theta) = \Gamma^{-1}(1/3) \gamma(1/3; \xi^3/9t_1(\theta_1)), \quad \xi = \varepsilon^{-1} \psi^{1/2}$$

$$\gamma(1/3, x) = \int_0^x e^{-\tau} \tau^{-2/3} d\tau$$

$$t_1(\theta_1) = 1/2 \int_{\theta_1}^{\pi} [R_1(\tau)^2 + (dR_1/d\tau)^2] f_1^{1/2}(\tau) \sin \tau d\tau$$

Здесь функция $f_1(\theta)$ определена в (1.2).

Область диффузионного следа, границе которого соответствует $\theta \sim \varepsilon$, вносит относительно малый вклад в интегральную величину массообмена частицы с потоком, равным $O(\varepsilon)$ [6, 11]. Однако поле концентрации в следе существенно влияет на интенсивность массообмена частиц, движущихся за первой частицей.

Оценка отдельных членов уравнения (2.1) в конвективно-погранслойной области следа $W_1^{(1)} = \{\varepsilon \ll (r_1 - R_1^0), \varepsilon^3 \ll \psi \ll \varepsilon^2\}$ показывает, что здесь правая часть уравнения пренебрежимо мала, поэтому концентрация зависит только от функции тока и вдоль линий тока сохраняет значения, равные значениям на выходе из диффузионного пограничного слоя. Явное выражение для концентрации в $W_1^{(1)}$ определяется сращиванием с реше-

нием (2.2) и имеет вид

$$(2.3) \quad c^{(1)}(\xi) = c^d(\xi, \theta_1) |_{\theta_1 \rightarrow 0} = \Gamma^{1/3} \gamma^{(1/3)}, \quad \xi^2/t_1^0 = \varphi_1(\xi); \quad t_1^0 = t_1(0)$$

Во внутренней области следа $W_1^{(2)} = \{\varepsilon \ll (r_1 - R_1^0) < \varepsilon^{-1}, \psi \ll \varepsilon^3\}$ в правой части уравнения (2.1) можно пренебречь только первым слагаемым. С учетом (1.2) уравнение и граничные условия для концентрации $c_1^{(1)}$ можно представить в виде

$$(2.4) \quad \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \xi} \right), \quad y = r_1 - R_1^0, \quad \zeta = \varepsilon^{-3} \psi$$

$$\zeta^{1/2} \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta \rightarrow 0} = 0, \quad c_1^{(2)} \Big|_{\zeta \rightarrow \infty} = c_1^{(1)}(\xi) \Big|_{\zeta \rightarrow 0} = \varepsilon^{1/3} \frac{3^{1/2} \zeta^{1/2}}{\Gamma^{(1/3)}(t_1^0)^{1/2}}$$

Последнее граничное условие в (2.4) выражает условие сращивания $c_1^{(2)}(\zeta)$ с решением в конвективно-пограничной области $W_1^{(1)}$. Формулировка задачи (2.4) должна быть дополнена условием сращивания $c_1^{(2)}$ с решением в области кормовой критической точки $W_1^{(3)}$.

В области $W_1^{(3)} = \{\theta \ll \varepsilon, r_1 - R_1^0 \ll \varepsilon\}$ из анализа порядков отдельных слагаемых в уравнении (2.1) с учетом (1.3) следует, что уравнения и граничные условия для $c_1^{(3)}$ могут быть записаны в виде

$$(2.5) \quad \frac{3}{2} Y^2 \frac{\partial c_1^{(3)}}{\partial Y} - \frac{3}{2} Y S \frac{\partial c_1^{(3)}}{\partial S} = \frac{\partial^2 c_1^{(3)}}{\partial Y^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial S} S \frac{\partial c_1^{(3)}}{\partial S}$$

$$Y = (\varepsilon \lambda R_1^0)^{-1} y, \quad S = (\varepsilon \lambda)^{-1} \theta, \quad y = r - R_1^0, \quad \lambda = [3 / (4 \alpha R_1^0)]^{1/2}$$

$$c_1^{(3)} \Big|_{Y=0} = 0, \quad \frac{\partial c_1^{(3)}}{\partial S} \Big|_{S=0} = 0, \quad c_1^{(3)} \Big|_{S \rightarrow \infty} = c_1^d \Big|_{\theta \rightarrow 0} \rightarrow \varepsilon \frac{3^{3/2} (R_1^0 \lambda)^{1/2}}{2 \Gamma^{(1/3)}(t_1^0)^{1/2}} Y S$$

Последнее граничное условие в (2.5) выражает условие сращивания с решением в диффузионном пограничном слое. Формулировку задачи (2.5), как и задачи (2.4), необходимо дополнить условием соответствия решений в областях $W_1^{(2)}$ и $W_1^{(3)}$

$$(2.6) \quad c_1^{(3)}(Y \rightarrow \infty) = c_1^{(2)}(y \rightarrow 0)$$

Из соотношений (2.4), (2.5) видно, что концентрация во внутренней области следа по порядку величины равна $c_1^{(2)} \sim O(\varepsilon^{1/3})$, а в области задней критической точки $c_1^{(3)} \sim O(\varepsilon)$. Поэтому следует, что

$$(2.7) \quad c_1^{(2)}(y, \zeta(y, \theta)) \Big|_{y \rightarrow 0, \theta = \text{const}} \rightarrow 0$$

Решение задачи (2.4), (2.7) для распределения концентрации в $W_1^{(2)}$ следует искать в виде [12]

$$c_1^{(2)}(y, \zeta) = \frac{(2\varepsilon)^{1/2} 3^{1/2}}{\Gamma^{(1/3)}(t_1^0)^{1/2}} y^{1/2} F(x), \quad x = -\frac{\zeta}{2y}; \quad x \in (-\infty, 0]$$

Тогда для функции $F(x)$ имеем

$$x F_{xx}'' + (1-x) F_x' + 1/2 F = 0$$

$$(-x)^{1/2} F_x' \Big|_{x=0} = 0, \quad F \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow [-x]^{1/2}, \quad x \in (-\infty, 0]$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по переменной x .
Далее можно получить

$$(2.8) \quad c_1^{(2)}(y, \xi) = (2\varepsilon)^{1/2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/3)} \frac{3^{1/6}}{(t_1^0)^{1/6}} y^{1/2} \Phi\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{\xi}{2y}\right)$$

$$\Phi(a, c, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{c(c+1)\dots(c+k-1)} \frac{x^k}{k!}$$

Здесь $\Phi(a, c, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Из выражений (2.6), (2.8) получаем в явном виде условие для концентрации $c_1^{(3)}$

$$(2.9) \quad c_1^{(3)}|_{Y \rightarrow \infty} \rightarrow \varepsilon \frac{\Gamma(3/2) 3^{1/6} (2x_0\lambda)^{1/2}}{\Gamma(1/3) (t_1^0)^{1/6}} Y^{1/2} \Phi\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{8} Y S^2\right)$$

Исследование задачи (2.5), (2.9) проведено численными методами в работах [6, 11], где для локального числа Шервуда получено следующее выражение:

$$(2.10) \quad j(S) = \frac{\partial c_1^{(3)}}{\partial r} \Big|_{r=x_0} = \frac{3^{3/4} (x_0\lambda)^{-1/2}}{2\Gamma(1/3) (t_1^0)^{1/6}} \frac{\partial c_1^*}{\partial Y} \Big|_{Y=0}$$

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial Y} \Big|_{Y=0} = \begin{cases} 1.124, & S=0 \\ S+0.406 S^{-1}, & S \rightarrow \infty \end{cases}$$

Из выражения (2.10) видно, в частности, что локальное число Шервуда в задней критической точке частицы отлично от нуля, в то время как приближение диффузионного пограничного слоя дает нулевое значение. Можно показать, что вклад этой области в полный диффузионный приток вещества к частице будет порядка ε .

Рассмотрим область смещения $W^{(4)} = \{\varepsilon^{-1} \ll r, \psi \ll \varepsilon^2\}$, в которой, как и в $W_1^{(2)}$, диффузией вдоль линий тока можно пренебречь. Концентрация $c_1^{(4)}$ удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$(2.11) \quad \frac{\partial c_1^{(4)}}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial c_1^{(4)}}{\partial \xi}, \quad \rho_1 = \frac{\varepsilon \Gamma}{2}$$

$$\frac{\partial c_1^{(4)}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad c_1^{(4)} \Big|_{\xi=\infty} = 1$$

$$c_1^{(4)} \Big|_{\rho_1 \rightarrow 0} = [c_1^{(1)}(\xi) - \Gamma^{-1} (1/3) 3^{1/6} (t_1^0)^{-1/6} \xi + c_1^{(2)}(\xi, y)] \Big|_{y \rightarrow \infty} =$$

$$= \varphi_1(\xi) - \Gamma^{-1} (1/3) 3^{1/6} (t_1^0)^{-1/6} \xi +$$

$$+ 2\Gamma^{-1} (1/3) \Gamma(3/2) 3^{1/6} (t_1^0)^{-1/6} \rho_1^{1/2} \Phi\left(-\frac{1}{2}, 1, -\xi^2/4\rho_1\right)$$

Здесь начальное условие при $\rho_1 \rightarrow 0$ определено сравнением решения в $W_1^{(4)}$ с решениями в областях $W_1^{(1)}$ и $W_2^{(2)}$, а $\varphi_1(\xi)$ в (2.3). Решение задачи имеет вид [13]

$$(2.12) \quad c_1^{(4)}(\xi, \rho_1) = \mathbf{B}(\xi, \rho_1) * [\varphi_1(\xi) - \Gamma^{-1} (1/3) 3^{1/6} (t_1^0)^{-1/6} \xi] +$$

$$+ 2\Gamma(3/2) \Gamma^{-1} (1/3) 3^{1/6} (t_1^0)^{-1/6} \rho_1^{1/2} \Phi(-1/2, 1, -\xi^2/4\rho_1)$$

$$V(\xi, \rho) * u(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\xi^*}{2\rho} \exp\left(-\frac{\xi^2 + \xi^{*2}}{4\rho}\right) I_0\left(\frac{\xi\xi^*}{2\rho}\right) u(\xi^*) d\xi^*$$

Здесь $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν .

Полученные выше выражения (2.2), (2.3), (2.8), (2.10), (2.12) дают приближенное описание поля концентрации во всех характерных областях. Из них при $R=1$ следуют результаты работ [6, 11, 12], в которых рассматривался случай сферической частицы, обтекаемой однородным и прямолинейным на бесконечности потоком.

3. Диффузия к поверхности второй частицы. Распределение концентрации около второй частицы удовлетворяет уравнению конвективной диффузии, которое в системе координат, связанной со второй частицей, имеет вид (2.1). Аналогично п. 2 в окрестности второй частицы можно выделить области e , b_2 , d_2 , $W_2^{(4)}$. Как и в случае одиночной частицы, диффузионный приток вещества на поверхность второй частицы с точностью до поправок более высокого порядка малости определяется массообменом в области диффузионного пограничного слоя i , следовательно, зависит от концентрации растворенного вещества в жидкости, поступающей в пограничный слой, т. е. от распределения концентрации вблизи линии тока, попадающей в переднюю критическую точку второй частицы.

При симметричном обтекании двух частиц линия тока, вышедшая из задней критической точки первой частицы, попадает в переднюю критическую точку второй частицы.

Из результатов п. 2 следует, что за поглощающей частицей вблизи оси симметрии (нулевая линия тока) имеется диффузионный след W_1 толщиной $O(\varepsilon)$, в котором концентрация изменяется от $O(\varepsilon)$ вблизи задней критической точки до $1-O(\varepsilon)$ на расстояниях $O(\varepsilon^{-1})$.

Чтобы найти распределение концентрации около второй частицы, необходимо произвести сращивание решений в областях передней критической точки b_2 и диффузионного пограничного слоя d_2 второй частицы с решениями в областях $W_1^{(1)}$, $W_1^{(2)}$ или $W_1^{(4)}$ (в зависимости от расстояния между частицами) первой частицы (фиг. 2). Если ограничиться нахождением главного члена в разложении полного диффузионного потока на вторую частицу по степеням ε , то достаточно получить решение задачи в диффузионном пограничном слое второй частицы.

Уравнение и граничные условия для концентрации в диффузионном пограничном слое второй частицы $d_2 = \{r_2 - R_2(\theta_2) \ll \varepsilon, \varepsilon \ll \theta_2\}$ имеют вид

$$(3.1) \quad \xi \frac{\partial c_2^d}{\partial t_2} - \frac{\partial^2 c_2^d}{d\xi^2} = 0, \quad c_2^d|_{\xi=0} = 0, \quad c_2^d|_{\xi=\infty} = 1$$

$$\xi = \varepsilon^{-1} \psi^{1/2}$$

$$t_2(\theta_2) = \frac{1}{2} \int_{\theta_2} \sin \tau \left[R_2^2 + \left(\frac{dR_2}{d\theta_2} \right)^2 \right] f_2^{1/2}(\tau) d\tau$$

Соотношения (3.1) должны быть дополнены начальным условием «на входе» в пограничный слой, которое зависит от расстояния между частицами l_1 . При $l_1 \ll \varepsilon^{-1}$ оно определяется распределением концентрации (2.3) в области $W_1^{(1)}$, а при $\varepsilon^{-1} \ll l_1$ — выражением (2.12) для распределения концентрации в области $W_1^{(4)}$ (см. фиг. 2).

Равномерно-пригодное по ε начальное условие определяется выражением

$$(3.2) \quad c_2^d(\xi, t_2) \Big|_{t_2=0} = \Psi_1(\xi, \lambda_1) = \mathbf{B}(\xi, \lambda_1) * [\varphi_1(\xi) - \Gamma^{-1}(1/3) 3^{1/2} (t_1^0)^{-1/2} \xi] + \\ + 2\Gamma(3/2) \Gamma^{-1}(1/3) 3^{1/2} (t_1^0)^{-1/2} \lambda_1^{1/2} \Phi(-1/2, 1, -\xi^2/4\lambda_1), \quad \lambda_1 = \varepsilon l_1/2$$

при $\lambda \rightarrow 0$, $\Psi_1(\xi, \lambda_1) \rightarrow \varphi_1(\xi)$.

Решение задачи (3.1), (3.2) имеет вид [14]

$$(3.3) \quad c_2^d(\xi, t_2) = \int_0^{\infty} \xi^* G(t_2, \xi, 0, \xi^*) \Psi_1(\xi^*, \lambda_1) d\xi^* = \mathbf{L}(\xi, t_2) * \Psi_1(\xi, \lambda_1)$$

$$G(t, \xi, 0, \xi^*) = \begin{cases} \frac{(\xi \xi^*)^{1/2}}{3t} \exp\left(-\frac{\xi^3 + \xi^{*3}}{9t}\right) I_{1/2}\left(\frac{2(\xi \xi^*)^{3/2}}{9t}\right), & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Дифференциальный и полный диффузионный притоки вещества на поверхность второй частицы определяются формулами

$$j_2(\theta_2) = \frac{\partial c_2^d}{\partial n} \Big|_{r_2=R_2(\theta_2)} = \frac{j_2^{1/2}(\theta_2)}{\varepsilon} \frac{\sqrt{R_2^2 + R_2'^2}}{R_2} \int_0^{\infty} \Lambda(\xi^*, t_2(\theta_2)) \Psi_1(\xi^*, \lambda_1) d\xi^*$$

$$I_2 = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \tau R_2^2(\tau) j_2(\tau) d\tau$$

$$(3.4) \quad I_2^0 = 4\pi \varepsilon^{-1} \int_0^{t_2^0} \int_0^{\infty} \Lambda(\xi^*, t) \Psi_1(\xi^*, \lambda_1) d\xi^* dt, \quad t_2^0 = t(\theta_2=0)$$

$$\Lambda(\xi, t) = \frac{\xi^2}{3^{2/3} \Gamma(1/3) t^{1/3}} \exp\left(-\frac{\xi^3}{9t}\right)$$

Здесь I_2 — полный диффузионный поток на частицу.

Полученное выражение (3.4) для полного диффузионного притока вещества на поверхность второй частицы включает учет как гидродинамического, так и диффузионного влияния первой частицы. Для оценки сравнительной роли гидродинамического и диффузионного факторов рассмотрим в качестве примера случай диффузии к поверхностям двух сфер, находящихся на расстоянии l_1 в однородном поступательном потоке. Решение задачи о стоксовом обтекании такой системы частиц приведено в [15]. Пусть расстояние между частицами лежит в пределах $1 \ll l \ll \varepsilon^{-1}$ ($\lambda_1 = \varepsilon l/2 \ll 1$). Тогда функция тока вблизи поверхности каждой из сфер имеет вид

$$(3.5) \quad \psi_1 = 3/4 (1 - k_2) (r_1 - 1)^2 \sin^2 \theta_1, \quad k_2 = 3\kappa l^{-1}/2 \\ \psi_2 = 3/4 (1 - k_1) (r_2 - \kappa)^2 \sin^2 \theta_2, \quad k_1 = 3\kappa l^{-1}/2$$

Здесь κ — отношение радиусов частиц, все расстояния отнесены к радиусу первой частицы.

Используя (3.5) из (3.3) — (3.4), с учетом неравенства $\lambda_1 = \varepsilon l/2 \ll 1$ с точностью до следующих членов разложения по степеням ε и l_1^{-1} для полных диффузионных притоков вещества на поверхности сфер можно

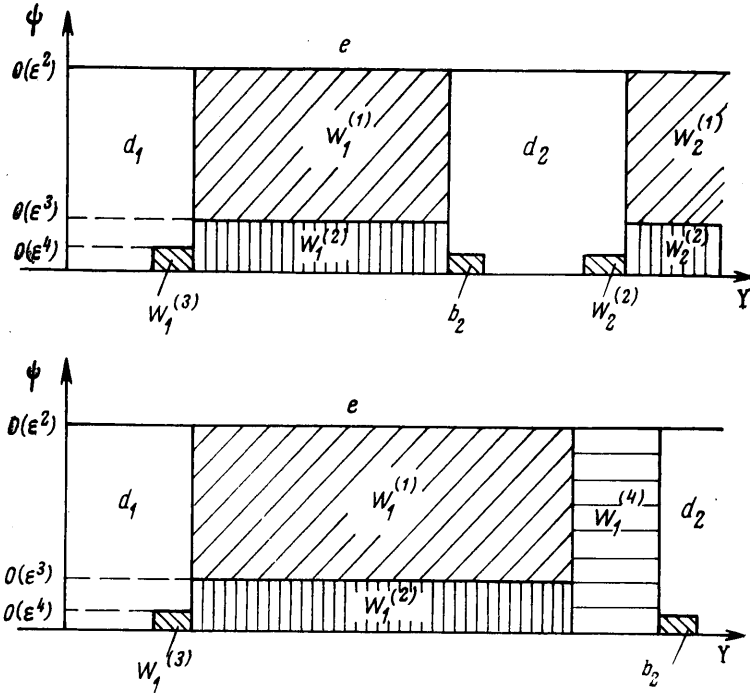
получить

$$(3.6) \quad I_1^\circ = \frac{2\pi 3^{4/3}}{\varepsilon \Gamma(1/3)} (t_1^\circ)^{2/3}, \quad t_1^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi \left(1 - \frac{k_2}{2}\right)$$

$$I_2^\circ = \frac{2\pi 3^{4/3}}{\varepsilon \Gamma(1/3)} (t_1^\circ)^{2/3} [(1+T)^{2/3} - 1], \quad \delta = I_2^\circ / I_1^\circ = (1+T)^{2/3} - 1$$

$$T = t_2^\circ / t_1^\circ = \kappa^2 (1 - k_1/2 - k_2/2)$$

Из формул (3.6) следует, в частности, что в рассматриваемом интервале изменения расстояния между частицами гидродинамическое взаимодействие сфер приводит к появлению в выражениях для полного притока



Фиг. 2

малых слагаемых порядка k_1 и k_2 , в то время как учет влияния диффузионного следа первой сферы на вторую проявляется в изменении величины главного члена в выражении для диффузионного потока на поверхность второй частицы. Так, в случае одинаковых сфер ($\kappa=1$) полный диффузионный приток вещества к поверхности второй частицы оказывается в 1,7 раза меньше, чем на первую. Видно также, что диффузионный поток вещества на каждую из сфер оказывается меньше, чем поток на одиночную сферу, и что величина полного притока уменьшается при сближении сфер.

4. Произвольное число частиц. Основываясь на результатах п. 2, 3 можно заключить, что диффузионный след частицы, расположенной выше по потоку, ведет к резкому снижению полного диффузионного потока на частицу, лежащую ниже по потоку, по сравнению с тем, который она имела бы при отсутствии первой. Аналогичное заключение имеет место при взаимодействии произвольного числа частиц ($k=1, \dots, N$), лежащих на

оси потока. Поэтому представляет интерес получение рекуррентных формул для полных диффузионных потоков на любую частицу с номером k .

Сравнивая порядки отброшенных и оставленных членов уравнения (2.1), получаем, что приближение диффузионного пограничного слоя второй частицы (3.3) становится непригодным при $\theta_2 \ll \varepsilon$. Здесь будет найдется диффузионный след второй частицы, состоящей из областей $W_2^{(i)}$ ($i=1-4$), аналогичных областям $W_1^{(i)}$ первой частицы. Уравнения для $W_2^{(i)}$ получаются заменой нижнего индекса 1 на 2 (например: $t_1 \rightarrow t_2$, $c_1^i \rightarrow c_2^i$ и т. д.) в уравнениях, определяющих след первой частицы. Граничные условия будут определяться сращиванием решений в соответствующих областях $W_2^{(i)}$ аналогично тому, как это делалось в п. 2, 3.

В конвективно-погранслошной области $W_2^{(1)}$ концентрация зависит лишь от функции тока, а сращивание с решением диффузионного пограничного слоя (3.3) дает выражение

$$c_2^1 = c_2^d(\xi, t_2(\theta_2)) \Big|_{\theta_2 \rightarrow 0} = c_2^d(\xi, t_2^0) = \varphi_2(\xi), \quad t_2^0 = t_2(\theta_2 = 0)$$

Распределение концентрации в области смешения $W_2^{(4)}$ определяется формулой:

$$(4.1) \quad c_2^4 = \mathbf{B}(\xi, \rho_2) * \{ \varphi_2(\xi) - p_2 \xi \} + \sqrt{\pi} p_2 \rho_2^{1/2} \Phi(-1/2, 1, -\xi^2/4\rho_2) = \psi_2(\xi, \rho_2)$$

где оператор определен формулой (2.12), $p_2 = [\partial \varphi_2 / \partial \xi]_{\xi=0}$.

Выражение (4.1) задает равномерно пригодное по ε начальное условие для уравнения диффузионного пограничного слоя d_3 третьей частицы

$$c_3^d \Big|_{t_3=0} = \psi_2(\xi, \lambda_2), \quad \lambda_2 = 1/2 \varepsilon l_2$$

где l_2 — расстояние между второй и третьей частицами.

Аналогично тому как это делалось для второй частицы, можно получить распределение концентрации в диффузионном пограничном слое третьей и всех последующих частиц.

Для частицы с индексом k распределение концентрации в диффузионном пограничном слое d_k определяется выражениями:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} c_k^d &= \mathbf{L}(\xi, t_k) * \psi_{k-1}(\xi, \lambda_{k-1}), \quad \psi_0 = 1 \quad (k=1, \dots, N) \\ \psi_k(\xi, \lambda_k) &= \mathbf{B}(\xi, \lambda_k) * \{ \varphi_k(\xi) - p_k \xi \} + \sqrt{\pi} p_k \lambda_k^{1/2} \Phi(-1/2, 1, -\xi^2/4\lambda_k) \\ \varphi_k(\xi) &= \mathbf{L}(\xi, t_k^0) * \psi_{k-1}(\xi, \lambda_{k-1}), \quad p_k = [\partial \varphi_k / \partial \xi]_{\xi=0} \end{aligned}$$

$$t_k(\theta_k) = \frac{1}{2} \int_{\theta_k}^{\pi} \sin \tau (R_k^2 + R_k'^2) f_k^{1/2}(\tau) d\tau, \quad \lambda_k = 1/2 \varepsilon l_k$$

Здесь операторы \mathbf{L} и \mathbf{B} определены выражениями (3.3) и (3.2), N — число частиц.

Дифференциальный и полный диффузионные потоки на k частицу определяются

$$j_k(\theta_k) = \frac{\partial c_k^d}{\partial n} \Big|_{r_k=R_k(\theta_k)} = \frac{f_k^{1/2}(\theta_k)}{\varepsilon} \frac{\sqrt{R_k^2 + R_k'^2}}{R_k} \int_0^{\infty} \Lambda(\xi^*, t_k(\theta_k)) \psi_{k-1}(\xi^*, \lambda_{k-1}) d\xi^*$$

$$(4.3) \quad I_k = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \tau R_k^2(\tau) j_k(\tau) d\tau$$

$$I_k^0 = 4\pi \varepsilon^{-1} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Lambda(\xi^*, t) \psi_{k-1}(\xi^*, \lambda_{k-1}) d\xi^* dt$$

Здесь Λ определено в формуле (3.4).

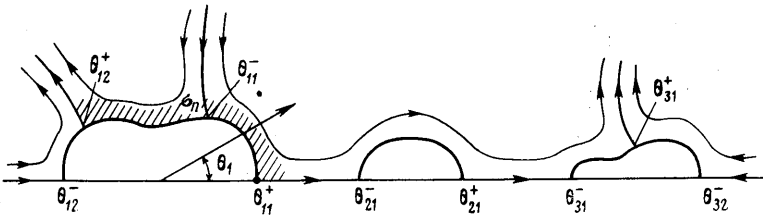
Рассмотрим задачу о диффузии к n сферическим частицам одинакового радиуса, расположенным на равных расстояниях l одна за другой на оси симметрии однородного и прямолинейного на бесконечности потока. Считая, что $1 \ll l \ll \varepsilon^{-1}$, получаем в стоксовом приближении следующие выражения для функции тока вблизи поверхностей сфер:

$$(4.4) \quad \psi_k \approx \frac{3}{4} (r_k - 1)^2 \sin^2 \theta_k$$

Используя выражения (4.2), (4.3), аналогично п. 3 получаем выражения для полного диффузионного потока на поверхности частиц

$$(4.5) \quad I_k = I_1^\circ [k^{2/3} - (k-1)^{2/3}], \quad I_k \rightarrow \frac{2}{3} I_1^\circ k^{-1/3}, \quad k \rightarrow \infty$$

Здесь I_1° — полный диффузионный поток на первую частицу цепочки и определяется формулой (3.6) с $k_2 = 0$.



Фиг. 3

Из (4.5) видно, что полный диффузионный поток на поверхность частицы стремится к нулю обратно пропорционально корню третьей степени ее порядкового номера.

Суммарный диффузионный поток на поверхности всех сфер цепочки определяется выражением

$$(4.6) \quad I_\Sigma = \sum_{k=1}^N I_k = I_1^\circ N^{2/3}$$

Отметим, что если бы не учитывалось взаимное диффузионное влияние частиц, то закон роста суммарного диффузионного потока был бы линейен по N .

Полученные результаты обобщим на случай, когда помимо критических точек на поверхности частиц могут быть и критические линии (фиг. 3). Считаем, что в потоке отсутствуют области замкнутой циркуляции.

Введем обозначения θ_{ki}^+ (θ_{ki}^-), аналогичные [9], где k указывает номер частицы, знак $+$ ($-$) соответствует траектории вытекания (натекания), а i — ее порядковый номер. Траектории вытекания и натекания будут чередоваться. Каждая траектория натекания задает на поверхности частицы область σ_{ki} , границы которой определяются ближайшими к θ_{ki}^- траекториями вытекания. Если аналогично [9] ввести переменную

$$(4.7) \quad t_{ki}(\theta_k, \theta_{ki}^-) = \text{sign } f_k(\theta_k) \frac{1}{2} \int_{\theta_k}^{\theta_{ki}^-} \sin \tau (R_k^2 + R_k'^2) |f_k(\tau)| d\tau$$

то распределение концентрации в диффузионном пограничном слое σ_{ki} будет описываться уравнением (3.1), где начальное условие $c|_{t_{ki}=0} = \zeta(\xi)$ определяется концентрацией, которую «приносит» траектория натекания.

Траектория натекания, приходящая из бесконечности, задается $\zeta(\xi)=1$, а приходящая с поверхности другой частицы — формулами (4.3), где N определяется максимальным числом частиц, «нанизанных» на эту траекторию и имеющих единственную траекторию вытекания, расположенную на оси симметрии. Роль t_i° здесь будет играть $t_{ki}(\theta_{ki}^+, \theta_{ki}^-)$, определенное (4.4), где θ_{ki}^+ — начало этой траектории. Отсюда видно, что все диффузионные характеристики σ_{ki} могут быть получены из формул (4.2) — (4.4).

Поступила 15 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М., «Мир», 1976.
2. Kuwabara S. The forces experienced by randomly distributed parallel circular cylinders or spheres in viscous flow at small Reynolds numbers. J. Phys. Soc. Japan, 1959, vol. 14, No. 4.
3. Gluckman M. J., Pfeffer R., Weinbaum S. A new technique for treating multiparticle slow viscous flow: axisymmetric flow past spheres and spheroids. J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, pt. 4.
4. Batchelor G. K., Green J. T. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in linear flow field. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt. 2.
5. Aminzadeh Karamat, Altaba T. R., Cornish A. R. H., Kolansky M. S., Pfeffer R. Mass transport around two spheres at low Reynolds numbers. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1974, vol. 17, No. 12.
6. Sih P. H., Newman J. Mass transfer to the rear of a sphere in Stokes flow. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1967, vol. 10, No. 12.
7. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
8. Acrivos A., Goddard J. D. Asymptotic expansions for laminar forced-convection heat and mass transfer, pt 1. Low speed flows. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt 2.
9. Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице при больших числах Пекле в случае произвольного осесимметричного обтекания вязкой жидкостью. ПММ, 1976, т. 40, вып. 5.
10. Волощук В. М. Фундаментальные решения уравнения диффузионного пограничного слоя. Тр. Ин-та эксперим. метеорол., 1973, вып. 3 (37).
11. Newman J. Mass transfer to the rear of a cylinder at high Schmidt numbers. Ind. and Engng Chem. Fundament., 1969, vol. 8, No. 3.
12. Полянин А. Д. Распределение концентрации в диффузионном следе частицы, обтекаемой стоксовым потоком. Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № 1.
13. Sutton W. G. L. On the equation of diffusion in a turbulent medium. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1943, vol. 182, No. 988.
14. Friedman B. Principles and techniques of applied mathematics. N. Y., Wiley, 1956.
15. Tam Christopher K. W. The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow. J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 3.