МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1977

УДК 532.546+517.544

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОБРАТНЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

А. М. ЕЛИЗАРОВ

(*Казань*)

Рассматривается устойчивость решений группы задач построения подземного контура по эпюре фильтрационного давления при ограниченной и неограниченной глубине водопроницаемого слоя, а также в случае наклонного водоупора. В основе их решения лежит следующая схема [1].

Определяется функция $w(\zeta)$, конформно отображающая внешность единичного круга с разрезом в плоскости ζ на образ области фильтрации и ее симметричного продолжения через один из бьефов в плоскости комплексного потенциала $w=\varphi+i\psi$. По ней находится соответствие $x(\gamma)$, где γ – полярный угол, представляющее собой граничные значения действительной части функции $z(\zeta)$, отображающей конформно $|\zeta|>1$ на область фильтрации вместе с симметричным продолжением. Далее, по $x(\gamma)$ функция $z(\zeta)$ определяется в виде

$$z(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}x(\theta)\frac{\zeta+e^{i\theta}}{\zeta-e^{i\theta}}d\theta+C\zeta-C/\zeta+ib_0,\qquad C=A+iB \tag{0.1}$$

откуда получаются параметрические уравнения искомого контура.

Близость способа получения решений рассматриваемых задач к способу получения решений обратных краевых задач позволяет применить (с некоторыми изменениями) и к фильтрационным задачам методы исследования на устойчивость решений этих последних. В основе исследований лежит указанное интегральное представление функции $z(\zeta)$.

Устойчивость решений обратных краевых задач изучалась многими авторами. В [1] в предположении дважды непрерывной дифференцируемости заданной функции $f(s)$, s – дуговая абсцисса, $s\in[0, l]$, ее однозначности на $(0, l)$ и необращения в нуль $f'(s)$ получена устойчивость единственного решения в том смысле, что при $\|f-f_1\|_{C^{(2)}}<\varepsilon$ для функций $z(\zeta)$ и $z_1(\zeta)$, конформно отображающих круг $|\zeta|<1$ на искомые D_z, D_{z_1} справедливы неравенства $|z_1^{(j)}(\zeta)-z^{(j)}(\zeta)|<\varepsilon_1$; $j=0,1$. В подобном определении в [2] исследуется устойчивость решений обратной задачи гидроаэромеханики. В [3] без требования существования второй производной доказана устойчивость в смысле сходимости областей D_{zn} и D_z как к ядру [4]. В [5] результаты обобщаются на случай неоднолистности D_z. В [6, 7] определения устойчивости вводятся так, что из сходимости к заданной функции $f(s)$ любой последовательности $\{f_n(s)\}$, для каждой функции которой также решается задача, делается вывод о сходимости граничных значений $z_n(\zeta)$ и $z(\zeta)$ при $n\to\infty$. В смысле подобных определений исследуется и устойчивость фильтрационных задач.

1. Случай неограниченной глубины водопроницаемого слоя. Рассматривается следующая задача [8]: построить подземный контур по заданной вдоль ширины флютбета (т. е. вдоль ширины основания гидросооружения) эпюре фильтрационного давления

$$h=f(x),\ 0\leqslant x\leqslant l \tag{1.1}$$

где $f(x)$ – монотонно убывающая однозначная функция с $f'(x)<0$, l – ширина флютбета. В плоскости комплексного потенциала области фильтрации соответствует полуполоса шириной $\varkappa H$ ($\varkappa$ – коэффициент фильтрации грунта); после симметричного продолжения фильтрационного потока через вещественную ось получим симметричную относительно мнимой оси полуполосу. Функция, отображающая внешность единичного круга с разрезом в плоскости ζ на эту полуполосу, имеет вид

$$w=-i(\varkappa H/\pi)\ln\zeta$$

На $|\zeta|=1$ получаем

$$h=-\frac{H}{\pi}\gamma,\quad -\pi\leqslant\gamma\leqslant\pi,\quad \zeta=e^{i\gamma} \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) следует:

$$x(\gamma)=f^{-1}\left(\frac{H}{\pi}\gamma\right),\quad -\pi\leqslant\gamma\leqslant\pi \tag{1.3}$$

Из соответствия $z=0$ и $\zeta=1$, $z=l$ и $\zeta=1$ и $x(\gamma)=x(-\gamma)$ в формуле (0.1) имеем $b_0=B=0$. Окончательно

$$z(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(\theta)\frac{\zeta+e^{i\theta}}{\zeta-e^{i\theta}}d\theta+A\left(\zeta-\frac{1}{\zeta}\right) \tag{1.4}$$

В пределе при $\zeta\to e^{i\gamma}$ с применением формул Сохоцкого [9] для мнимой части $z(\zeta)$ получаем

$$y(\gamma)=v(\gamma)+2A\sin\gamma,\quad v(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta \tag{1.5}$$

$$-\pi\leqslant\gamma\leqslant\pi$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Таким образом, (1.3) и (1.5) дают параметрические уравнения искомого контура. Для существования $v(\gamma)$ нужно наложить на $f(x)$ некоторые ограничения. Пусть, например, $f'(x)$ ограничена: $f'(x)\leqslant k<0$. Тогда из (1.3) следует, что $x'(\gamma)$ удовлетворяет условию Липшица, что достаточно для существования особого интеграла [9]. В дальнейшем считаем, что рассматриваются только физически реальные решения и ограничение $f'\leqslant k<0$.

В [8] указан способ определения A: пусть y^* — заглубление флютбета в некоторой точке с абсциссой x^*, отличной от 0 и l. Из (1.3) определим γ^*. Тогда по (1.5)

$$A=[y^*-v(\gamma^*)]/(2\sin\gamma^*) \tag{1.6}$$

причем заранее выбранная величина y^* соответствует именно физически реальному решению. Представления (1.4), (1.5) используются в неизменном виде для целого ряда фильтрационных задач; различие же — в конкретных выражениях функции $x(\gamma)$.

Так как заданная функция непрерывна, то можно рассмотреть последовательность заданных на $[0, l]$ функций $f_n(x)$, принадлежащих подпространству E пространства непрерывных функций C и приближающих $f(x)$ в том смысле, что $\|f_n(x)-f(x)\|_E\to0$, $n\to\infty$.

Накладывая на $\{f_n(x)\}$ все необходимые ограничения, получим аналогично (1.4), (1.5) $z_n(\zeta)$ и $v_n(\gamma)$ после замены всюду $f(x)$ на $f_n(x)$. Для определения постоянных A, A_n выберем одно и то же значение абсциссы x^*, а заглубления y_n^* такими, что

$$y_n^*\to y,\ n\to\infty \tag{1.7}$$

Теперь естественным было бы понимать устойчивость в таком смысле:

$$\|z_n(e^{i\gamma})-z(e^{i\gamma})\|_E\to0,\quad w_n(z)\rightrightarrows w(z)\text{ в }D_z$$

(здесь и далее $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость).

Устойчивость будем рассматривать в пространствах E, наиболее часто используемых в практических приложениях, причем последовательный выбор этих пространств будем проводить с целью улучшения свойств решений.

1. Пространство непрерывных функций C.

Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность дифференцируемых монотонно убывающих функций, таких, что

$$f_n'(x)\leqslant k_n<0,\ n\geqslant 1;\ \|f_n(x)-f(x)\|_C\to 0,\ n\to\infty \tag{1.8}$$

Определение 1. Решение задачи устойчиво, если при $y_n^*\to y, n\to\infty$ и (1.8) выполняется

$$\|y_n(\gamma)-y(\gamma)\|_C\to 0,\quad w_n(z)\rightrightarrows w(z),\quad n\to\infty$$

Равномерную сходимость $x_n(\gamma)$ к $x(\gamma)$ не включали в определение, ибо она очевидно следует из (1.8) и (1.3). Теперь имеем

$$|v_n(\gamma)-v(\gamma)|=\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta}[x_n(\theta)-x_n(\gamma)]\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta-\right.$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta}[x(\theta)-x(\gamma)]\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_\delta}[x_n(\theta)-x(\theta)]\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta+\frac{1}{2\pi}[x_n(\gamma)-x(\gamma)]\times$$

$$\left.\times\int\limits_{L_\delta}\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta\right|\leqslant\frac{-\delta(k+k_n)}{Hkk_n}+\max|x_n(\theta)-x(\theta)|\Big/\left(\pi\sin\frac{\delta}{2}\right)$$

Здесь L_δ — часть единичной окружности без дуги, вырезаемой кругом радиуса δ с центром в точке $e^{i\gamma}$, δ — некоторое малое число.

Предположим дополнительно, что

$$k_n,\ k\leqslant k_0<0,\ n\geqslant 1 \tag{1.9}$$

Зададимся сколь угодно малым $\varepsilon>0$. В силу свободы выбора δ можем положить $\delta=-{}^1/_4Hk_0\varepsilon$. Далее, из равномерной сходимости $x_n(\theta)$ к $x(\theta)$ следует, что существует номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого

$$\frac{1}{\pi}\max|x_n(\theta)-x(\theta)|\Big/\sin\frac{\delta}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|v_n(\gamma)-v(\gamma)|\leqslant-\frac{2\delta}{Hk}+\max|x_n(\theta)-x(\theta)|\Big/\left(\pi\sin\frac{\delta}{2}\right)\leqslant\varepsilon,$$

$$n\geqslant N(\varepsilon)$$

что и доказывает равномерную сходимость $v_n(\gamma)\rightrightarrows v(\gamma)$. Из (1.7), установленной равномерной сходимости, (1.3) и (1.6) выводим сходимость A_n к A, т. е. получим и $y_n(\gamma)\rightrightarrows y(\gamma)$.

По принципу сгущения [4] из последовательности $\{\zeta_n(z)\}$ обратных к $z_n(\zeta)$ функций в любой замкнутой области, целиком лежащей в рассматриваемой области D_z, можно выделить сходящуюся подпоследовательность, причем из $z_n(\zeta)\rightrightarrows z(\zeta)$ следует, что предел совпадает с $\zeta(z)$ (обратной к $z(\zeta)$). Но $w_n(z)=w(\zeta_n(z))$ и $w(z)=w(\zeta(z))$, откуда вытекает равномерная сходимость $w_n(z)$ к $w(z)$. Таким образом доказана теорема

Теорема 1. Если выполнены условия (1.7), (1.8), причем $\{f_n(x)\}$ такова, что имеем дополнительно (1.9), то решение задачи устойчиво в C в смысле определения 1.

2. Пространство непрерывно дифференцируемых функций $C^{(1)}$.

Теперь необходимо наложить на функции $f(x)$ и $f_n(x)$, $n\geqslant 1$, условия, которые бы обеспечивали принадлежность $z_n(\zeta)$ и $z(\zeta)$ как внутри области, так и на границе пространству $C^{(1)}$ с нормой [10]

$$\|g\|_{C^{(1)}}=\max_{0\leqslant x\leqslant l}|g(x)|+\max_{0\leqslant x\leqslant l}|g'(x)|$$

Дадим сразу общее для всех пространств $C^{(k)}$, $k\geqslant 1$, определение устойчивости; в случае пространства $C^{(1)}$ нужно во всех условиях положить $k=1$.

Пусть $f_n(x)$, $f(x)$ — монотонно убывающие однозначные функции из $C^{(k)}$ (с нормой $\|g\|_{C^{(k)}}=\sum_{j=0}^{n}\max_x(|g^{(j)}(x)|)$, такие, что

$$(1.10)\qquad \lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_{C^{(k)}}=0$$

$$f_n^{(k)}(x)\in H(B_n,\lambda_n),\qquad f^{(k)}(x)\in H(B,\lambda)$$

Определение 2. Решение задачи устойчиво в $C^{(k)}$, если при выполнении (1.7) из (1.10) следует:

$$(1.11)\qquad \|z_n(e^{i\gamma})-z(e^{i\gamma})\|_{C^{(k)}}\to 0,\ n\to\infty$$

Равномерную сходимость $w_n(z)\rightrightarrows w(z)$ не включали в определение, так как она доказана для C, а следовательно будет иметь место и для $C^{(k)}$.

Докажем устойчивость при дополнительном предположении

$$(1.12)\qquad B,\ B_n\leqslant B_0,\ 1>\lambda,\ \lambda_n\geqslant\lambda_0>0,\ n\geqslant 1$$

Так как свойства $f(x)$, $f_n(x)$ данного пункта обеспечивают выполнение (1.8), а ограничение (1.12) дает (1.9), то равномерная сходимость $z_n(e^{i\gamma})$ к $z(e^{i\gamma})$ следует из результатов для C. Следовательно, для выполнения (1.11) достаточно доказать, что $z_n'(e^{i\gamma})\rightrightarrows z'(e^{i\gamma})$.

Из (1.4) получаем формулу

$$z'(\zeta)=\frac{1}{2\pi i\zeta}\int_{-\pi}^{\pi}x'(\theta)\frac{\zeta+e^{i\theta}}{\zeta-e^{i\theta}}d\theta+A(\zeta+1/\zeta^2)$$

откуда выводим

$$z'(e^{i\gamma})=e^{-i\gamma}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}x'(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta-ix'(\gamma)+2A\cos\gamma\right]=$$

$$=e^{-i\gamma}[v^1(\gamma)-ix'(\gamma)+2A\cos\gamma]$$

$$z_n'(e^{i\gamma})=e^{-i\gamma}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}x_n'(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta-ix_n'(\gamma)+2A_n\cos\gamma\right]=$$

$$=e^{-i\gamma}[v_n^1(\gamma)-ix_n'(\gamma)+2A_n\cos\gamma]$$

где через $v'(\gamma)$ и $v_n^1(\gamma)$ обозначены особые интегралы, существование которых обеспечивается гельдеровостью $f'(x)$ и $f_n'(x)$, так как в силу (1.3)

$$x'(\gamma)=-H\Big/\Big[\pi f'\Big(-\frac{H}{\pi}\gamma\Big)\Big],\quad x_n'(\gamma)=-H\Big/\Big[\pi f_n'\Big(-\frac{H}{\pi}\gamma\Big)\Big]$$

Тогда условие (1.10) даст равномерную сходимость $x_n'(\gamma)$ к $x'(\gamma)$. Доказательство справедливости $v_n^1(\gamma)\rightrightarrows v^1(\gamma)$ проводится, как и в п. 1, с той лишь разницей, что плотности особых интегралов удовлетворяют не условию Липшица, а являются гельдеровыми с дополнительным условием (1.12).

Заметим, однако, что непосредственными оценками доказывается равностепенная непрерывность и равномерная ограниченность $\{v_n^1(\gamma)\}$, а отсюда, как и в п. 3 доказательства принципа сгущения [4], следует опять равномерная сходимость $v_n^1(\gamma)\rightrightarrows v^1(\gamma)$.

Далее, из (1.6) получаем

$$A_n=[y_n^*-v_n(\gamma_n^*)]/(2\sin\gamma_n^*),\ A=[y^*-v(\gamma^*)]/(2\sin\gamma^*)$$

По определению γ_n^*, γ^* (см. (1.3)) $\sin\gamma_n^*\to\sin\gamma^*$. Кроме того

$$|v_n(\gamma_n^*)-v(\gamma^*)|\leqslant|v_n(\gamma_n^*)-v_n(\gamma^*)|+|v_n(\gamma^*)-v(\gamma^*)|$$

т. е. $A_n\to A$ в силу равностепенной непрерывности и равномерной сходимости к $v(\gamma)$ последовательности $\{v_n(\gamma)\}$. Таким образом доказана следующая теорема:

Теорема 2. Если последовательность функций $f_n(x)$ из $C^{(1)}$ удовлетворяет (1.12) и приближает заданную функцию $f(x)$ по (1.10), то решение задачи устойчиво в $C^{(1)}$.

3. Пространство $C^{(k)}$.

Для получения устойчивости в $C^{(k)}$ в смысле определения 2 нужно доказать, что $z_n(e^{i\gamma})$, $z(e^{i\gamma})\in C^{(k)}$ и $z_n^{(j)}(e^{i\gamma})\rightrightarrows z^{(j)}(e^{i\gamma})$, $0\leqslant j\leqslant k$.

Нетрудно получить формулу для выражения $z^{(p+1)}(\zeta)$ через интегралы

$$v^m(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{(m)}(\theta)\frac{\zeta+e^{i\theta}}{\zeta-e^{i\theta}}d\theta,\qquad 0<m\leqslant p+1 \tag{1.13}$$

Пусть

$$R_{p-m+2}^{m-1}=\sum_{j=1}^{p-m+2}\frac{1}{j+m-2}R_j^{m-2}$$

причем $R_j^0=1$ для всех j и $R_1^m=1/m!$. Тогда

$$z^{(p+1)}(\zeta)=(-1)^p\frac{p!}{\zeta^{p+1}}\Big[\frac{1}{i}v^1(\zeta)-\frac{1}{i^2}R_p^1v^2(\zeta)+\ldots+ \tag{1.14}$$
$$+(-1)^{m-1}\frac{1}{i^m}R_{p+2-m}^{m-1}v^m(\zeta)+\ldots+(-1)^p\frac{1}{p!\,i^{p+1}}v^{p+1}(\zeta)\Big]+$$
$$+(-1)^p\frac{(p+1)!}{\zeta^{p+2}}A$$

Очевидно, что $z^{(p+1)}(\zeta)$ содержит только интегралы (1.13) с $m\leqslant p+1$ и ограниченными коэффициентами R_l^r. Методом математической индукции докажем устойчивость решений при дополнительном ограничении (1.12).

Так как выполнены условия теоремы 2, то $z'(e^{i\gamma})\in C^{(1)}$ и (1.11) выполняется при $k=1$. Предположим, что утверждение справедливо для некоторого $k-1$, т. е. что $v_n^j(e^{i\gamma})\rightrightarrows v^j(e^{i\gamma})$ для всех $1\leqslant j\leqslant k-1$, и покажем, что для k $v_n^k(e^{i\gamma})$, $v^k(e^{i\gamma})$ непрерывны и $v_n^k(e^{i\gamma})\rightrightarrows v^k(e^{i\gamma})$ (предположение индукции дает непрерывность и равномерную сходимость всех $v^j(e^{i\gamma})$, $j\leqslant k-1$ в (1.14), где применены прежде формулы Сохоцкого). Применение формул Сохоцкого к $v_n^k(\zeta)$ и $v^k(\zeta)$ дает

$$v_n^k(e^{i\gamma})=\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x_n^{(k)}(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta+x_n^{(k)}(\gamma)$$

$$v^k(e^{i\gamma})=\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^{(k)}(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\gamma}{2}d\theta+x^{(k)}(\gamma)$$

Из (1.10), (1.12) аналогично ранее доказанному получим следующий результат.

Теорема 3. Если имеем последовательность (1.10) и выполнено (1.9), то при условии (1.12) $z^{(k)}(e^{i\gamma})$ непрерывны и задача устойчива в смысле определения 2 в пространстве $C^{(k)}$.

Легко было бы рассмотреть f_n и $f(x)$ из пространства бесконечное число раз непрерывно дифференцируемых функций $C^{(\infty)}$ с системой норм [10]

$$\|f(x)\|^k_{C^{(\infty)}}=\max_{\substack{0\leqslant x\leqslant l\\ 0\leqslant j\leqslant k}}|f^{(j)}(x)|,\qquad k=0,1,2,\ldots \tag{1.15}$$

Пусть $\|f_n-f\|_{C^{(\infty)}}\to 0$ при $n\to\infty$. Устойчивость понимаем как сходимость $z_n(e^{i\gamma})$ к $z(e^{i\gamma})$ по норме (1.15). Тогда имеющееся условие

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x)-f(x)\|_{C^{(j)}}=0,\qquad j\geqslant 1$$

и легко устанавливаемая ограниченность последовательности $\{f_n^{(j+1)}(x)\}$ дают гельдеровость $f_n^{(j)}(x)$, т. е. рассматриваем задачу в $C^{(j)}$. В силу произвольности j получим устойчивость в $C^{(\infty)}$ без дополнительных ограничений типа (1.12).

2. Случай ограниченной глубины водопроницаемого слоя ($T<\infty$). Исследование на устойчивость задачи п. 1 упрощается тем, что соответствие $x(\gamma)$ полностью определяется заданной функцией $f(x)$. В задачах с ограниченной глубиной водопроницаемого слоя T это соответствие имеет более сложный вид; кроме того, решение зависит от величины фильтрационного расхода под сооружением Q (будем считать ее заранее заданной). Однако и здесь удается доказать устойчивость тем же методом.

Итак, рассматривается задача п. 1, но с известной величиной и заданными напором H и расходом Q [8]. Области фильтрации в плоскости w соответствует прямоугольник шириной Q и длиной $\varkappa H$. При его отображении на нижнюю полуплоскость плоскости $\zeta=\xi+i\eta$ получаем соответствие

$$h=-\frac{H}{2K}F(\arcsin\xi,\lambda),\qquad -1\leqslant\xi\leqslant 1 \tag{2.1}$$

где $F(\varphi,\lambda)$ — эллиптический интеграл первого рода, $K(\lambda)$, $K'=K(\lambda')$ — соответственно полные эллиптические интегралы, модуль λ определяется из соотношения $K'/K=2Q/H$, $\lambda'=\sqrt{1-\lambda^2}$. Из сравнения заданой функции $h=f(x)$ и (2.1) следует:

$$x(\xi)=f^{-1}\left[-\frac{H}{2K}F(\arcsin\xi,\lambda)\right],\qquad -1\leqslant\xi\leqslant 1 \tag{2.2}$$

Сведением исходной задачи к прямой смешанной для $\operatorname{Im}\zeta<0$ [8], получаем

$$(2.3)\qquad z(\zeta)=i[v(\zeta)-\mu(\zeta)],\qquad v(\zeta)=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{x(\tau)\,d\tau}{(\tau-\zeta)\sqrt{1-\tau^2}}$$

$$\mu(\zeta)=\frac{2T}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{\lambda\sqrt{1-\zeta^2}}{\lambda'}$$

и с применением формул Сохоцкого $y(\xi)=v(\xi)-\mu(\xi)$, причем для существования в смысле главного значения интеграла $v(\zeta)$ требуем $f'(x)\leqslant k<0$. Как и в п. 1, оцениваем $|v_n(\xi)-v(\xi)|$ (здесь $L_\delta=(-1,\,1)\setminus(\xi-\delta,\,\xi+\delta)$) и получаем устойчивость решений в C.

Далее, из (2.2) и (2.3) выводим

$$(2.4)\qquad \frac{dz}{d\zeta}=i[v^1(\zeta)-\mu'(\zeta)],\qquad v^1(\zeta)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{d\tau}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\zeta}d\tau$$

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{H}{2Kf'(-{}^1/{}_2HK^{-1}F(\arcsin\tau,\lambda))\sqrt{1-\lambda^2\tau^2}\sqrt{1-\tau^2}}$$

откуда следует, что при ограничениях (1.10), (1.12) плотности интегралов $v^1(\xi)$, $v_n{}^1(\xi)$, т. е. $x'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}$, $x_n'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}$, гельдеровы. Как и в п. 1, докажем выполнимость (1.11). Для второй производной функции $z(\zeta)$ имеем

$$z''(\zeta)=\Bigg[\frac{2\zeta}{\pi(1-\zeta^2)}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{d\tau}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\zeta}d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi\sqrt{1-\zeta^2}}\int\limits_{-1}^{1}\frac{d}{d\tau}[x'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}]\frac{d\tau}{\tau-\zeta}+\mu''(\zeta)\Bigg]i$$

$$\frac{d}{d\tau}[x'(\tau)\sqrt{1-\tau^2}]=-Hf''(\ )/[2Kf'^2(\ )(1-\lambda^2\tau^2)\sqrt{1-\tau^2}]-$$
$$-H^2\lambda^2\tau/[Kf'(\ )(1-\lambda^2\tau^2)]$$

Следовательно, получим интеграл типа $v(\xi)$ с плотностью $p(\tau)=$ $=Hf''(\ )/[2Kf'^2(\ )\sqrt{1-\lambda^2\tau^2}]$ и интеграл типа $v^1(\xi)$ с плотностью $q(\tau)=$ $=-H^2\lambda^2\tau/[Kf'(\ )(1-\lambda^2\tau^2)]$, если выполнены (1.12) и (1.10) для $k=2$, откуда следует устойчивость решений в $C^{(2)}$.

При переходе от $C^{(2)}$ к $C^{(3)}$ появятся интегралы с плотностями, содержащими $p'(\tau)$ и $q'(\tau)$. Легко выводим

$$p'(\tau)=H^2f'''(\ )/[4K^2f'^2(\ )(1-\lambda^2\tau^2)\sqrt{1-\tau^2}]-$$
$$-H^2f''(\ )/[2K^2f'^3(\ )(1-\lambda^2\tau^2)\sqrt{1-\tau^2}]-$$
$$-Hf''(\ )\lambda^2\tau/[2Kf'^2(\ )(1-\lambda^2\tau^2)]$$

$$q'(\tau)=-H\lambda^2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\tau}{1-\lambda^2\tau^2}\right)\Big/[Kf'(\ )]-$$
$$-H^2\lambda^2\tau/[2K^2(1-\lambda^2\tau^2)^{3/2}f'^2(\ )\sqrt{1-\tau^2}]$$

Опять получим интегралы типа $v(\xi)$ и $v^1(\xi)$, если потребуем, чтобы $f(x)$, $f_n(x)\in C^{(3)}$ и $f^{(3)}(x)$, $f_n^{(3)}(x)$ были гельдеровыми с равномерно ограниченными коэффициентами и показателями Гельдера. Переход от $C^{(k-1)}$ к $C^{(k)}$ проводится аналогично. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. При выполнении (1.8), (1.9) решение задачи устойчиво в C_r, а при выполнении (1.12), (1.10) — в пространстве $C^{(k)}$ для $k\geqslant 1$.

В [8] показано, что при $T\to\infty$ расход Q неограниченно возрастает, тогда $\lambda=0$ и (2.1) принимает вид $h=-(H\arcsin\xi)/\pi$ (в качестве канонической области взята полуплоскость), т. е. случай $T=\infty$ — лишь частный случай задачи п. 2.

3. Задачи с решениями, устойчивыми не на всей области определения. В приводимых ниже задачах метод исследования сохраняется, поэтому указываются только изменения в определениях устойчивости исходя из механического смысла.

Задача п. 1 обобщена для контура с угловыми точками и вертикальными участками [8]. Эпюра давления имеет вид

$$h=f_n(x),\ x_{n-1}\leqslant x\leqslant x_n,\ n=1,2,\ldots,m$$

$$f_n(x_{n-1})=H_{n-1},\ f_n(x_n)=H_n,\ x_0=0,\ x_m=l$$

Все f_n — однозначные монотонно убывающие функции. На каждом из участков (ограниченных соседними угловыми точками) задается величина гашения напора $H_n{}^\circ=H_n-H_n'$. Если α_n, β_n — углы, определяющие положение концов на границе круга, то

$$x(\gamma)=f_n^{-1}\left(-\frac{H}{\pi}\gamma\right),\qquad \alpha_{n-1}\leqslant\gamma\leqslant\beta_n$$

$$x(\gamma)=x_n,\ \beta_n\leqslant\gamma\leqslant\alpha_n,\ \alpha_0=-\pi,\ n=1,2,\ldots,m$$

Накладывая на функции $f_i(x)$, $i=1,\ldots,m$, ограничения п. 1, 2, докажем устойчивость отдельно для двух областей

$\Gamma_1=\bigcup\limits_{n=1}^{m}(\alpha_{n-1},\beta_n)$, где $z(e^{i\gamma})$ определяется по (1.4), $\Gamma_2=\bigcup\limits_{n=1}^{m}(\beta_n,\alpha_n)$, где $z_j(e^{i\gamma})=x_j+2Ai\sin\gamma$, $j=1,\ldots,m$.

В [8] решается задача построения подземного контура по эпюре фильтрационного давления $h=f(x)$, $0\leqslant x\leqslant l$, и по заданной величине гашения напора $H-H_1$ на плоском понуре. Для этой задачи

$$w(\zeta)=\frac{2\varkappa H}{\pi}\arcsin\left(a\sin\frac{\ln\zeta}{2i}\right),\qquad a=\sin\frac{\pi H_1}{2H}$$

$$x(\gamma)=f^{-1}\left[-\frac{2H}{\pi}\arcsin\left(a\sin\frac{\gamma}{2}\right)\right],\qquad -\pi\leqslant\gamma\leqslant\pi$$

При условии ограниченности производной $f'(x)\leqslant k<0$ получаем решение в виде (1.4), (1.5), так как тогда $x(\gamma)$ удовлетворяет условию Липшица. Устойчивость получаем в смысле тех же определений.

При наличии дренажной галереи [8] $x(\gamma)$ определяется в виде

$$x(\gamma)=f^{-1}\left(-\frac{H}{\pi}\gamma-\frac{q}{\varkappa\pi}\ln\left|\frac{\sin{}^1/_2(\gamma-\gamma_1)}{\sin{}^1/_2(\gamma+\gamma_1)}\right|\right),\qquad -\pi\leqslant\gamma\leqslant\pi$$

где $t_1=e^{i\gamma_1}$ — соответствующая положению стока точка окружности, q — расход галереи. Функция $f(x)$ на $[0, x_1]$, где x_1 — абсцисса стока, монотонно убывает, а на (x_1, l) положительна и имеет один максимум. Устойчивость получаем на $[-\pi, \pi]$ с удаленными сколь угодно малыми окрестностями точек экстремума функции $f(x)$.

В случае контура с широким дренажом, доходящим до низового зуба [8], задается эпюра фильтрационного давления $h=f_1(x)$, $0\leqslant x\leqslant x_1$, и эпюра расходов $\psi=f_2(x)$, $x_1\leqslant x\leqslant l$. Зависимость $x(\gamma)$ получается из сравнения заданных функций и соотношений

$$h(\gamma)=\frac{H}{\pi}\arccos\frac{b^2+\cos\gamma}{1-b^2},\qquad -\pi\leqslant\gamma\leqslant\gamma_1$$

$$\psi(\gamma)=-\frac{\varkappa H}{\pi}\operatorname{arc\,ch}\frac{b^2+\cos\gamma}{1-b^2},\qquad \gamma_1\leqslant\gamma\leqslant 0$$

$$\gamma_1=-2\arcsin(\operatorname{th}[\pi q/(2\varkappa H)])$$

Исследование устойчивости проводится опять на двух интервалах.

Заметим, что и при $T<\infty$ также можно получить обобщения на задачи достраивания [8], задачи определения контура с проницаемым участком [8], на задачи с разной высотой бьефов [8], причем в последних решение записывается в виде (2.3) с

$$\mu(\zeta)=-\frac{T_1}{\pi}\arcsin\frac{\zeta+\lambda}{1+\lambda\zeta}+\frac{T_2}{\pi}\arcsin\frac{\zeta-\lambda}{1-\lambda\zeta}+\frac{1}{2}r$$

где $T_1-T_2=r$ — разность высот.

При построении контура по эпюре давления при наклонном водоупоре, проходящем через фиксированную точку z_0 и составляющем с вещественной осью угол $\pi\alpha$, решение имеет вид [11]

$$x(\xi)=f^{-1}\left[\frac{Q}{\varkappa K(1+\lambda)}F\left(\arcsin\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\,\frac{\xi+1}{\xi-d}},\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\right]=f_0(\xi)\tag{3.1}$$

$$z(\zeta)=m+\left(\frac{\zeta-d}{\zeta-a}\right)^\alpha\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f_1(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\zeta)}$$

$$f_1(\tau)=\left(\frac{\tau-a}{\tau-d}\right)^\alpha[x(\tau)-m]$$

Области фильтрации в плоскости w соответствует прямоугольник, отображаемый на нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta<0$ функцией

$$w(\zeta)=\frac{iQ}{2K(\lambda)}\left[F\left(\arcsin\frac{1-\lambda}{2\lambda}\zeta+\frac{1+\lambda}{2\lambda},\lambda\right)-K(\lambda)\right]$$

В (3.1) фигурируют постоянные a, d — точки на вещественной оси плоскости ζ, образы точки $A(x_A=-\infty)$ и точки D пересечения водоупора с вещественной осью

$$a=\zeta_A=-\frac{3+\lambda}{1-\lambda},\qquad d=\zeta_D=-\frac{1+3\lambda}{1-\lambda}$$

С применением формул Сохоцкого при $\zeta\to\xi$, $-1<\xi<1$, имеем

$$x=f_0(\xi),\qquad y=-\left(\frac{\xi-d}{\xi-a}\right)^\alpha\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f_1(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-\xi)}$$

Накладывая на $f(x)$ и приближающую последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничения предыдущих пунктов, получим устойчивость решений данной задачи в тех же пространствах функций.

В заключение автор выражает признательность Л. А. Аксентьеву за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 26 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тумашев Г. Г., Нужин М. Т.* Обратные краевые задачи и их приложения. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1965.
2. *Салимов Р. Б., Молокович Ю. М.* К обратной задаче гидроаэромеханики об изменении профилей. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.
3. *Хоанг Динь Зунг.* Об устойчивости обратной краевой задачи аналитических функций. Изв. АН БССР, Сер. физ.-мат. н., 1967, № 4.
4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., «Наука», 1966.
5. *Хоанг Динь Зунг.* Устойчивость обратной краевой задачи в случае многолистности решения и некоторые обобщения. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. н., 1968, № 4.
6. *Кузнецова Л. Н.* О единственности и устойчивости решений обратных краевых задач. Тр. семинара по краевым задачам, вып. 11. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1974.
7. *Кузнецова Л. Н.* Об устойчивости решений обратных краевых задач в пространстве C^k. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1975, Деп. № 718–75.
8. *Нужин М. Т., Ильинский Н. Б.* Методы построения подземного контура гидротехнических сооружений. Обратные краевые задачи теории фильтрации. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1963.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
11. *Салимов Н. Б.* Обратная задача напорной фильтрации при наклонном водоупоре. Тр. семинара по краевым задачам, вып. 3. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1966.